RECHERCHES HYDRODYNAMIQUES.

PREMIER MÉMOIRE.

LES ÉQUATIONS HYDRODYNAMIQUES ET LES RELATIONS SUPPLÉMENTAIRES

PAR

C. A. BJERKNES
À CHRISTIANIA.

Au moyen de vibrations de corps plongés dans un fluide, on peut imiter les phénomènes fondamentaux du magnétisme, et en grande partie aussi ceux de l'électricité. Je me propose dans une série d'articles d'en donner la théorie mathématique.

Le fond même de ces recherches a été publié autrefois; mais il nous reste à y faire des additions et des développements sans lesquels les conséquences ne peuvent être expliquées d'une manière satisfaisante.

Dans ces comparaisons, il s'est manifesté une particularité très caractéristique: les phénomènes hydrodynamiques correspondant aux phénomènes de l'influence présentent, vis à vis de ces phénomènes de la nature, une analogie directe; ceux, au contraire, qui répondent aux actions pondéromotrices présentent une analogie inverse.

Ce contraste singulier et, en même temps, cette ressemblance s'étendant jusqu'aux moindres détails avaient fait naître des craintes sur la possibilité d'une erreur; c'est ce qui nous a engagé à commencer des expériences par lesquelles les résultats analytiques ont trouvé maintenant leur constatation expérimentale.

Mais, de plus, une nouvelle idée se fera alors jour. Nous pourrions nous imaginer un perfectionnement de la théorie, d'après lequel on aurait égard aussi aux chocs et aux contacts momentanés entre les corps vibrants; on pourrait aussi modifier et compléter les mouvements, et choisir, au lieu d'un fluide incompressible, un autre fluide, ou même un milieu tout différemment constitué: un milieu de petits corps vibrants. Cela nous amènerait, peut-être, à des résultats ressemblant encore plus à ceux de la nature. Ou, si cela ne se réalisait pas, l'on pourrait compléter les représentations des phénomènes naturels, tout en conservant cette inversion qui s'est manifestée à chaque pas dans les généralisations.

Il serait naturel, d'abord, tant que cela pourrait se faire par des considérations générales sur les fluides, de se demander dans quel sens se modifieraient les phénomènes quand on passerait des liquides aux fluides élastiques.

Déjà d'avance il paraît probable que, si certaines limites ne sont pas dépassées, on n'obtiendra pas de nouveaux résultats; et que surtout l'inversion, dans les actions des forces naissantes, ne disparaîtra pas. Mais si les faits sont d'accord avec ces prévisions, ils fourniront une extension importante des anciennes propositions.

On le prévoit en se figurant les liquides, non plus comme absolument incompressibles, mais seulement comme peu compressibles en les comparant avec les fluides aériformes. Il ne faudrait pas ensuite regarder les phénomènes comme se produisant sur des distances trop grandes: on devrait se représenter les points sur lesquels s'étendront les recherches comme appartenant au commencement d'une onde vibratoire, extrêmement étendue. Cette coïncidence des phénomènes s'est aussi produite dans des expériences exécutées dans l'air.

Dans le présent mémoire, nous fixerons l'attention sur une formule que nous allons démontrer. Prise en elle-même, cette formule n'est pas nouvelle puisqu'elle est une conséquence immédiate des équations fondamentales. Mais elle nous permettra d'établir ce résultat indiqué plus haut, qu'entre des limites suffisamment restreintes, il n'y aura aucune différence essentielle dans les phénomènes, qu'il s'agisse d'un liquide ou d'un fluide élastique.

C'est donc en dehors de ces premières limites, mais dans la même direction qu'il faut étendre ces recherches pour arriver à des phénomènes coïncidant, sans traces d'inversion, avec ceux des grandes forces de la nature: en supposant qu'ils puissent être trouvés par cette voie.

Si l'on conserve l'intensité des vibrations, mais qu'on rende les périodes beaucoup plus courtes, de sorte que les longueurs des ondes ne soient plus si incomparablement grandes par rapport aux distances des corps, des phénomènes d'une nouvelle espèce naîtront. L'influence de ce changement portera sur deux points: d'abord les phénomènes dépendent du lieu qu'y occupent les corps, et ils diffèrent suivant que ces longueurs des ondes sont grandes ou petites par rapport aux dimensions de ceux-ci; puis il y a aussi une dépendance plus intimement liée à la propagation des ondes et qui paraît présenter de l'intérêt. Dans tous les détails, on ne peut cependant se faire, tout de suite, une idée nette de ce qui résultera d'une telle intervention de l'élasticité. Il faut qu'on se soit posé des problèmes particuliers et qu'on ait réussi à les résoudre.

Il se posera aussi d'autres questions ayant rapport à une extension des résultats, en sorte que l'analyse employée pourrait être transportée immédiatement à de nouvelles études.

On s'écarte de l'idéalité des fluides en ayant égard à leur viscosité. Pour le moment nous ne nous en occuperons pas; elle pourrait devenir un élément de nos futures recherches. Mais cette supposition de la fluidité parfaite présentera aussi des défauts en ce sens que l'élasticité d'un fluide aériforme ne se manifeste pas toujours aussi purement que dans le cas de l'équilibre. Il y a là quelque chose d'analogue à ce qu'on connaît des corps solides. Ceux-ci ne se présentent pas comme ces corps parfaitement élastiques dont on parle dans la mécanique rationnelle, en y considérant les phénomènes à leurs limites; et néanmoins, il n'y aura pas nécessairement pour cette raison de défaut dans leur élasticité. À cause de leur grandeur et de leur forme, à cause du temps que prendra la propagation d'un mouvement, etc. . . ., lorsqu'un choc sera fini il restera des vibrations internes, et celles-ci ne seront pas forcément dues à un manque de l'élasticité. Les phénomènes externes se montreront donc comme s'il y avait eu une espèce de demi-élasticité.

Il en est de même, quoique pour d'autres raisons, quant aux fluides élastiques. À cause de leurs mouvements vibratoires, la loi de MARIOTTE ne sera plus exacte. Pendant les condensations il se développera de la chaleur; pendant les dilatations un refroidissement aura lieu. Et les choses se passeront comme si l'élasticité elle-même était modifiée.

Aussi long temps que les vibrations des corps, donnant lieu aux mouvements d'un tel fluide, seront bien régulières ou uniformes, et que les condensations seront assez petites, aucun changement essentiel ne se produira dans les résultats, non plus que dans la méthode que l'on suivra pour y parvenir; c'est seulement une constante dont la valeur devra être corrigée, la vitesse de propagation ne coïncidant pas avec celle que donnerait la loi indiquée si elle était admise encore comme vraie.

Si, cependant, l'on se place en dehors des questions qui sont ordinairement l'objet du calcul, si les mouvements ont un caractère moins régulier et si l'on a toujours égard au développement de la chaleur, alors des difficultés prendront naissance. Des changements soudains dans les vibrations, et, par conséquent, de nouvelles actions pourraient se produire; quelque temps après, ces nouvelles actions pourraient être interrompues subitemment à leur tour.

Il serait intéressant, sans doute, d'examiner comment les problèmes devraient être traités alors, au moins tant qu'on supposerait des circonstances simplifiantes comme l'existence de petites vitesses. Il serait aussi avantageux d'étudier à part quel côté de la question il importerait le plus d'approfondir. Car souvent, lorsqu'un problème résiste à tous les efforts faits pour en chercher la solution complète, on en peut résoudre une partie déterminée; et ce qui est le plus accessible pour le calcul est très ordinairement aussi le plus utile. Ainsi, dans le cas d'actions soudaines, les accélérations joueront un plus grand rôle que les vitesses; il est donc naturel, pour se rapprocher de la vérité, d'aborder la question en regardant les dernières comme très petites.

Dans ces recherches relativement à un sujet qui n'appartient plus à la mécanique toute seule, nous ne pourrons être, il est vrai, aussi sûrs de l'exactitude des résultats (peu généraux d'ailleurs mais très simples) qu'il serait à désirer. En quittant le domaine de la mécanique rationnelle, on est forcé de faire des hypothèses. Et si simples que soient ces hypothéses, on ne peut regarder les conséquences qui en sont déduites analytiquement que comme des résultats préliminaires, dont la vérité doit être confirmée expérimentalement.

Ces investigations auront, du reste, vis à vis de nos recherches principales, une position indépendante. Elles ont pour but de leur donner, autant qu'il est possible, un peu plus d'étendue. Car nous essayerons de montrer que les irrégularités dont nous venons de parler n'auront que peu d'importance, aussi long temps que l'on s'occupera, dans une question d'hydrodynamique, des parties qu'il est important d'étudier ici. On se servira, en conséquence, des moyens analytiques ordinaires et des anciennes méthodes.

Dans ce mémoire d'introduction, nous envisagerons surtout, dans la mésure de nos forces, les principes eux mêmes, pour en déduire quel est l'effet des passages d'un fluide à un autre et d'un mouvement à un autre. De cette manière, les résultats que nous développerons, plus tard, pour les liquides, nous tâcherons de les transférer aux fluides aériformes; et nous nous efforcerons de le faire dans toute l'étendue où cela sera compatible avec la différence de leur nature. Dans les mémoires suivants, nous aborderons alors les problèmes spéciaux, en supposant qu'on ait à traiter des liquides. Nous y omettrons, au moins provisoirement, toutes les questions concernant les moyens de modifier les résultats ou de les changer, peut-être, profondement dans leurs points essentiels.

I.

Les équations hydrodynamiques et les relations empiriques ou supplémentaires.

1. Soit q la densité, p la pression, et t le temps. Désignons de plus par x, y, z les coordonnées d'un point M dans un système d'axes rectilignes et rectangulaires; soit enfin u, v, w les composantes de la vitesse suivant les axes.

Dans un fluide doué d'une fluidité parfaite, les équations de mouvement s'écriront alors:

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

X, Y, Z désignent les composantes, suivant les axes des x, des y et des z, d'une *force extérieure,* rapportée à l'unité de masse. Et nous supposons, pour restreindre dans un certain but la généralité, que cette force dépende d'un potentiel, de sorte qu'on ait

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Nous concevrons, en outre,

$$-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad -\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad -\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial z}$$

comme les composantes d'une *force intérieure* sollicitant la même masse. Elle provient de l'action des pressions sur les surfaces des éléments et est censée agir, comme la précédente, dans tous les points de leur intérieur.

Les forces des deux espèces produisent, par leur coaction, une *force accélératrice,* dont les composantes sont déterminées par

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dw}{dt}.$$

Ainsi les dernières composantes se présentent comme des dérivées totales par rapport au temps, et en développant on aura en conséquence:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

À ces équations il faut ajouter l'équation de continuité

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (qu)}{\partial x} + \frac{\partial (qv)}{\partial y} + \frac{\partial (qw)}{\partial z} = 0.$$

Elle exprime que la masse d'un élément correspondant au point géométrique (x, y, z) ne variera pas pendant le temps.

Nous aurons encore des conditions relativement à l'état initial, aux surfaces libres, et à celles des corps qu'enferme le fluide et qui le terminent.

Si toutefois le fluide est indéfini et qu'il reste en repos à l'infini, le problème se simplifie. La vitesse tendra vers zéro à l'infini et la valeur de la pression vers une limite constante. Soit maintenant

$$F = 0$$

l'équation commune de toutes les surfaces des corps. Alors puisque, d'après une hypothèse généralement admise, une particule du fluide qui à un certain moment touche l'une de ces surfaces le fera aussi immédiatement après, il faut qu'on satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial z} w + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

pourvu qu'on ait $F = 0$.

2. Les cinq inconnues p, q, u, v, w, ne peuvent être trouvées par ces équations toutes seules comme fonctions des coordonnées et du temps, par conséquent comme fonctions de x, y, z, t. Il peut y avoir aussi des solutions avec certaines valeurs particulières de p et de q, p_0 et q_0. Elles correspondent à un état d'équilibre qui n'existe pas, mais qui est censé pouvoir exister *virtuellement,* puisque la force extérieure dépend d'un potentiel.

Il est donc nécessaire, en étudiant, dans des circonstances variées, les propriétés physiques des fluides et les fluides des différentes espèces d'établir de nouvelles relations. Et ces *relations empiriques* ou *supplémentaires* devront être distinguées des équations plus proprement dites *hydrodynamiques.*

3. En premier lieu, on peut avoir une relation connue d'avance, ou autrement dit, une relation sans aucun caractère infinitésimal.

Préalablement nous nous bornons à représenter cette relation sous la forme

$$f(p, q) = 0.$$

Nous supposons ainsi que les composantes de la vitesse, c'est à dire, que les trois autres quantités dont on cherche les valeurs (à côté de celles de p et de q) n'y entrent pas explicitement.

Cependant, si le mouvement ne joue pas un rôle direct, nous n'exclucrons pas toute influence de ce côté. On peut être contraint d'admettre une certaine imperfection dans la fluidité; et alors la fonction f, qui conviendrait pour certaines espèces de mouvements, devrait au moins contenir des *constantes* qui pourraient *varier* en passant d'un problème donné à un autre. Il s'ensuivrait qu'en donnant une fois à celles-ci des valeurs correspondant au mouvement qu'on examinera, une autre fois des valeurs correspondant à l'équilibre, la valeur de p, déduite de la relation précédente, ne coïnciderait pas avec la valeur de p_0 correspondant au dernier état.

4. Particulièrement la relation pourrait ne pas contenir la pression. On aurait donc une équation exprimant que

$$q = Const.$$

Ainsi q est maintenant constant, et a toujours la même valeur.

Evidemment il s'agit ici des *liquides.*

Mais en passant de ces corps fluides de la mécanique rationnelle à ceux de la nature, il ne faut plus les concevoir, en sens absolu, comme incompressibles. Au lieu de dire qu'il n'y a pas de liaison entre la pression et la densité, ou bien entre la pression et la condensation, on doit donc admettre qu'il en existe; et même, si cela paraît nécessaire, on devra dans l'équation empirique et généralisée, introduire des quantités ayant rapport au mouvement. Comme pour les fluides en général, la pression s'exprime ainsi, approximativement, en fonction linéaire de la condensation, les coefficients pouvant être considérés comme constants ou non. Toutefois, les variations de la densité étant extrêmement petites, le coefficient du terme contenant cette condensation aura une valeur d'autant plus grande; et il en est de même, par conséquent, de la vitesse de propagation.

Ces variations n'ayant ordinairement aucune importance en elles-mêmes, on renonce à les chercher; et en allant à la limite, on remplacera la relation empirique inconnue, et plus exacte, mais peut-être beaucoup plus compliquée que celle des fluides élastiques, par une équation très simple, $q = const.$ Cela nous permet de résoudre les problèmes, lors même qu'il s'agirait d'évaluer les pressions.

L'évaluation des condensations, tant qu'elles proviennent des mouvements, sera donc aussi une question secondaire pour cette raison que ce sont les fortes variations principales des pressions qu'il faut d'abord connaître, au moins approximativement. S'il devenait nécessaire de déterminer les condensations, bien que leurs valeurs soient si faibles, on devrait recourir à la relation empirique donnée avec la seconde approximation. Mais les variations *additionnelles* des pressions étant du même ordre que les condensations, on serait amené à chercher ensemble les unes et les autres; ce qui donnerait lieu à de nouveaux problèmes ayant de l'intérêt dans le cas où les effets des pressions principales s'élimineraient.

5. La relation entre p et q pourrait ensuite être telle que même en se tenant à la première approximation, la pression y entrerait avec la densité. En d'autres termes, la condensation n'est plus négligeable; et la pression ne peut être évaluée séparément.

En résolvant par rapport à p, on parvient donc à une équation de la forme

$$p = \varphi(q),$$

tandis que pour l'équilibre on aura généralement

$$p_0 = \varphi_0(q_0).$$

L'indice o ajouté à φ désignera qu'on a varié convenablement les constantes de la fonction.

Ordinairement la pression s'exprime de la manière indiquée, c'est à dire sans aucune dépendance directe du mouvement, lorsqu'il s'agit des *fluides élastiques.* Mais il faut distinguer entre deux cas: le cas idéal et un autre qui est plus complexe.

Tout étant pris le plus simplement, une loi commune existera pour l'équilibre et pour le mouvement. C'est celle de MARIOTTE, d'après laquelle la pression est proportionnelle à la densité. On a donc

$$p = kq$$

$$p_0 = kq_0,$$

et les fonctions φ et φ_0 sont identiques.

Mais si l'on s'éloigne de plus en plus de l'équilibre, si les mouvements sont très forts ou qu'ils varient rapidement, on peut être forcé de tenir compte des modifications que subira cette loi fondamentale. Pour conformer les résultats du calcul à ceux des expériences, on sera alors amené à regarder φ comme différent de φ_0.

6. La forme de φ, dans ce cas complexe, n'est pas encore donnée. Mais si, au lieu de la densité, on introduit de nouveau la condensation, et que celle-ci soit toujours petite, on peut se borner aux premiers termes dans le développement en série. Aucune autre chose n'est donc inconnue que les valeurs de quelques coefficients.

Dans un certain sens, tant que ces derniers peuvent être considérés comme constants, la relation empirique sera donc toujours *connue d'avance.* Toutefois, suivant le caractère du mouvement, on sera conduit à prendre les coefficients tantôt avec certaines valeurs, tantôt avec d'autres.

Si les mouvements ont un caractère assez irrégulier, ni l'un ni l'autre système de coefficients ne convient plus. La relation empirique ne peut alors être représentée par une équation de la forme simple $f(p, q) = 0$, et la question doit être considérée d'un point de vue plus élevé. Nous reprendrons cet objet plus tard, mais sous certaines conditions simplifiantes.

7. Les choses se compliquent aussi lorsque de ces questions relatives aux fluides élastiques (dans le cas d'une élasticité imparfaite), on revient aux liquides, mais qu'on les étudie quand ils *cessent* d'être *homogènes.*

Dans ce cas la relation empirique, ou plutôt *supplémentaire* (puisqu'on n'a plus recours à des propriétes qu'on puisse à proprement parler appeler physiques), n'est pas donnée sous forme finie; on est alors conduit à une équation différentielle. En effet, on aura la condition différentielle

$$\frac{dq}{dt} = 0,$$

ou en développant

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y} + w\frac{\partial q}{\partial z} = 0;$$

condition qui exprime que la densité des particules, quoiqu'elle diffère de lieu en lieu au même instant, et de temps en temps au même point, demeurera invariable pendant leurs mouvements.

8. On peut donc avoir à traiter des problèmes concernant les liquides dans des cas où ils ne sont plus homogènes, ou bien où ils sont censés n'être pas absolument incompressibles. Pareillement on pourrait rencontrer des problèmes relatives aux fluides élastiques dans des cas où, à cause des phénomènes internes qui se développent, tout se passe comme s'il y avait des défauts dans leur élasticité. Nous ne parlons pas même des conséquences de la viscosité, à laquelle on devrait avoir égard d'avance, dans les équations des mouvements.

La solution de tels problèmes en partie hydrodynamiques, en partie physiques, présenterait de grandes difficultés. Lorsqu'il devient question de *travaux intérieurs,* que l'on néglige ordinairement, il faut recourir à la théorie mécanique de la chaleur; et même on pourrait être contraint de la combiner avec la théorie analytique de la propagation de la chaleur. Cela serait nécessaire, soit que les masses fluides échauffées se meuvent de telle façon qu'en moyenne, dans le cours d'une période, on ait repos, soit qu'elles se meuvent d'une manière plus générale, de sorte qu'on commettrait une trop grande erreur en négligeant leurs déplacements continus.

Mais quelles que soient les difficultés à vaincre en mettant le problème en équation, et en le résolvant, au moins il existera une solution. Les cinq inconnues

$$p,\ q,\ u,\ v,\ w,$$

s'exprimeront ainsi au moyen de certaines constantes et des quatre variables indépendantes x, y, z, t. Et celles-ci étant éliminées, on obtiendra une relation de la forme

$$f(p,\ q,\ u,\ v,\ w) = 0.$$

Il entrera donc, en général, dans la relation empirique, non seulement la *pression* et la *densité,* mais aussi les *composantes de la vitesse.* En outre, on aura un nombre de constantes dépendant de celles du problème.

On peut donc supposer que dans tous les cas l'on possède une relation empirique sous forme finie, et qu'il n'y a jamais à s'occuper que d'une seule équation supplémentaire. Nous la désignerons comme réduite à la *forme finale.*

D'après cela, n'ayant rien à faire avec de nouvelles quantités et de nouvelles équations différentielles, on fera, suivant la nature du problème, différentes hypothèses quant au caractère de la relation. Ensuite on composera les résultats du calcul avec ceux des observations, pour en conclure dans quel cas et dans quelle étendue ces hypothèses seront utiles. On renonce donc à poursuivre les solutions par le moyen des méthodes directes, conduisant à des difficultés insurmontables, pour pouvoir obtenir, par d'autres voies, au moins quelques indications de ce qui se passe.

Dans un cas important, qui a rapport aux fluides gazeux, cas que nous allons traiter bientôt, nous nous baserons en particulier sur cette manière de voir.

II.

Variation d'une vibration uniforme à une autre, et changement des coefficients dans la relation empirique.

9. Nous reprenons la question de savoir comment se présente la relation supplémentaire dans le cas d'un fluide élastique, lorsqu'elle est réduite à la forme finale.

Comme la plus grande généralité le demande, nous posons ainsi, préalablement, p comme fonction de q, u, v, w, donnée par l'équation

$$f(p, q, u, v, w) = 0.$$

Mais nous faisons la restriction *que la vitesse dépend d'un potentiel.*

Puisque la force est déterminée aussi à l'aide d'un potentiel, on déduit des équations du mouvement que les termes $-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x}$ etc. sont des dérivées partielles par rapport aux coordonnées, d'une seule fonction $-P$; et l'on en conclut que *la pression, pourvu qu'un tel potentiel existe, est fonction de la densité sans contenir les u, v, w.*

Pendant le temps où dure un état de potentiel, le mouvement ne joue dont aucun rôle *direct* dans la relation; et l'on revient à l'équation plus simple $f(p, q) = 0$, ou

$$p = \varphi(q).$$

L'équation correspondante pour l'équilibre est

$$p_0 = \varphi_0(q_0) = kq_0.$$

Mais rien ne décide, quand on ne se borne plus à considérer les fluides sous le point de vue le plus idéal, si φ et φ_0 seront les mêmes fonctions.

Ainsi en passant d'un état de potentiel à un autre, la fonction φ pourrait changer.

10. Imaginons-nous que les vitesses ne varient que faiblement de temps en temps, et que, de plus, elles ne soient pas bien fortes.

La chaleur qui, en vertu de ce manque de l'idéalité, se développe dans les condensations, aura alors le temps nécessaire pour s'échapper, en étant conduite aux parties environnantes du fluide et aux corps; et de même les dilatations ne seront accompagnées d'aucun refroidissement.

Il est donc naturel de supposer que la loi de Mariotte, qui est vraie pour l'équilibre, le soit aussi sous les suppositions actuelles; et cela même si la pression a essentiellement son origine dans les mouvements, aucune force extérieure n'agissant. Les fonctions φ et φ_0 sont ainsi les mêmes et la dernière étant connue, on en tire

$$p = kq,$$

comme au n° 5.

Si ensuite l'on y introduit la condensation σ, en posant

$$q = q_0(1 + \sigma),$$

on obtiendra

$$p = kq_0 + kq_0\sigma.$$

La pression sera donc, exactement, une fonction linéaire de la condensation. Elle a, de plus, un caractère spécial, puisque les deux coefficients sont égaux.

11. Nous choisissons, en second lieu, le mouvement d'une telle manière que les vitesses, même si elles restent toujours faibles, varient assez rapidement en grandeur et en direction. Cette circonstance pourrait être remplacée aussi par une plus grande intensité, sans que les variations soient bien prononcées.

Rien n'empêche d'ailleurs qu'on ait le même problème qu'auparavant: un problème de vibration, par exemple, où la période des vibrations chez les corps donnant lieu aux mouvements du fluide, serait raccourcie considérablement, sans que l'intensité de celles-ci fût amoindrie. Ou bien l'intensité pourrait être fortement augmentée sans que la durée des périodes fût diminuée. — Nous ne considérerons pas les forces extérieures, de sorte que q_0 sera constant.

Dans le cas des courtes périodes, la chaleur qui se produit n'a que très peu de temps pour se dissiper. Car il y aura une disproportion entre la conductibilité et cette rapidité avec laquelle les condensations et les dilatations se succèdent. D'autre part, lorsque les amplitudes croissent sans que la durée de la période change, de plus grandes quantités de chaleur se développent ou s'absorbent. Et à cause de la longueur des ondes, la dissipation ne sera pas complète. On ne doit donc non plus négliger l'effet des variations de la température.

Comme une conséquence de son augmentation dans les condensations et de sa diminution dans les dilatations, l'on obtient durant les premières une pression plus grande que d'après la loi de Mariotte, durant les dernières une pression plus petite. En général, on parvient à une relation entre la pression et la densité dont les constantes dépendent de la durée des périodes et de la grandeur des amplitudes.

12. Appliquons cela au premier cas, mais en allant à la limite. Il y aura donc une extrême rapidité dans les variations de la vitesse.

Au moyen de la théorie mécanique de chaleur, la pression se détermine alors comme il suit

$$p = jq^{x},$$

x désignant le rapport entre la chaleur spécifique à pression constante et la chaleur spécifique à volume constant.

Donc les fonctions φ et φ_0 sont maintenant, même *analytiquement*, différentes. Pour l'air atmosphérique, on a d'ailleurs trouvé

$$x = 1{,}4;$$

de sorte que l'écart se montre bien essentiel.

Introduisant, cette fois encore, dans l'équation entre p et q la condensation, on en déduira

$$p = jq_0^{x} + x.jq_0^{x}\sigma + \ldots$$

Par suite, si p se réduit à p_0 lorsque σ s'annule, et qu'on admette que p_0 soit égal à kq_0, ou à la pression d'équilibre, la formule précédente deviendra

$$p = kq_0(1 + x\sigma) = p_0(1 + x\sigma).$$

Si non, on peut bien encore poser:

$$p = p_0(1 + x\sigma),$$

mais p_0 aura une valeur modifiée.

Ainsi, soit que le terme constant ait varié ou non, la pression cesse, à la rigueur, d'être une fonction linéaire de la condensation. Et si, en outre, on néglige les puissances supérieures, et qu'on forme de cette sorte une telle relation linéaire et approchée, il n'y a plus égalité entre les coefficients, x étant plus grand que l'unité.

13. Mais passons à un mouvement de potentiel auquel il correspond des vitesses de vibration ayant une intensité moyenne et dans lequel la durée des périodes n'est plus si excessivement courte.

Alors, comme nous l'avons dit, il y aura bien une dissipation de la châleur, mais elle ne sera pas si complète qu'on puisse regarder la température comme restant constante. Il sera donc certainement difficile d'indiquer la forme exacte de la fonction. On posera, en conséquence,

$$p = \varphi(q),$$

et l'on se réservera, en ayant égard au caractère du mouvement et aux propriétés du fluide, de déterminer, pour chaque cas, les termes principaux dans le développement suivant les puissances de σ.

Or si l'on se contente de garder, à côté du terme constant, celui du premier ordre, on peut se figurer qu'on soit parti d'une formule analogue à celles des cas précédents:

$$p = jq^{\lambda}.$$

λ est alors un nombre compris entre 1 et $\varkappa$. Quant à j, on pourrait admettre que

$$p_0 = jq_0^{\lambda} = kq_0;$$

ce qui signifierait que la pression se réduit à celle de l'équilibre, lorsque la condensation s'annule. Ou bien, on pourrait laisser la valeur de j indéterminée, en n'acceptant pas comme certain qu'une coïncidence absolue existe.

14. En résumé, on peut donc prétendre que toujours lorsqu'il existe, à la fois, un potentiel de force et un potentiel de vitesse, et qu'il est permis, en même temps, de négliger la seconde puissance de la condensation, on parvient à une relation de la forme

$$p = p_0(1 + \lambda\sigma).$$

Nous laissons indécise la question de savoir si p_0 coïncide avec le p_0 qui correspond à l'équilibre, c'est à dire à kq_0, ou s'il y a entre eux une différence. Mais ni p_0 ni λ ne dépendront de la vitesse.

p_0 et λ (l'un ou tous deux) varieront, au contraire, *de problème en problème,* avec la durée des périodes et avec la grandeur des amplitudes. Ils pourront dépendre aussi d'autres constantes se rapportant à la nature du fluide et aux mouvements comme aux formes et au nombre des corps qu'il contient. Nous supposerons surtout dans ce cas que ces corps soient animés de mouvements vibratoires synchrones, et en supposant que ces mouvements restent bien réguliers ou *uniformes,* nous admettrons, comme on le fait ordinairement, qu'un potentiel puisse exister.

Pour un autre choix des *constantes du problème,* les coefficients de la relation empirique se modifieront aussi. Mais il est bon de remarquer que c'est seulement pour des variations très grandes des premières qu'il peut être question d'une variation sensible des secondes.

III.

Vibrations variées. Changement du caractère de la relation empirique.

15. Ayons toujours égard au développement de la chaleur; et faisons voir que la relation cherchée pourrait revêtir aussi un caractère différent. Il en sera ainsi, par exemple, si les vibrations des corps, qui sont la cause des mouvements, ne sont plus régulières.

16. Pour le reconnaître, considérons une espèce particulière de telles *vibrations variées.*

Au commencement, la durée des périodes, si l'on en peut parler encore, est censée être très longue; et les vibrations sont supposées à peu près uniformes. Vers la fin, au contraire, cette durée deviendra excessivement courte, et les vibrations seront de nouveau à peu près régulières. Nous supposerons aussi que l'intensité des vibrations soit alors diminuée, en sorte que les condensations dans les deux époques ne différeront que peu.

Mais il existera ainsi un temps intermédiaire où les vibrations commenceront à varier plus fortement; cette variation ira d'abord en croissant, l'intensité s'affaiblira graduellement, et la rapidité avec laquelle les vibrations se succèdent augmentera; puis la variation deviendra plus lente, et enfin le nombre des vibrations dans l'unité de temps, ainsi que l'intensité de ces vibrations tendront de nouveau vers des limites constantes.

17. Si donc la valeur $\lambda = 1$ convient dans le premier temps, pourvu qu'on raisonne comme si un mouvement de potentiel fut exactement

possible, λ finira par prendre une valeur s'approchant de $\varkappa$. Car aux mêmes condensations, il repondra de plus fortes pressions.

Cependant, λ, qui varierait ainsi dans le *même* problème, ne contient pas le temps explicitement; puisque, dans la relation déterminant la pression, les quantités q, u, v, w, ou au lieu de celles-ci σ, u, v, w, remplacent le temps et les coordonnées.

Admettons donc, comme ailleurs, que les puissances de σ plus hautes que la première puissent être négligées. Figurons-nous, en conséquence, que la pression soit représentée toujours par une équation comme celle qui précède:

$$p = p_0(1 + \lambda\sigma),$$

ou bien

$$p - p_0 = q_0 a^2 \sigma.$$

Cela étant, au moins λ ne peut être indépendant des variations des mouvements; ce coefficient λ sera ainsi une *fonction des composantes de la vitesse.*

18. On ne peut même surement prétendre que p_0 est constant. A $\sigma = 0$, aussi bien qu'à $\sigma = \sigma_1$, il pourrait correspondre des pressions différentes. Voici en effet une raison en faveur de la variabilité de p_0.

Nous savons qu'à la limite, lorsque le nombre des vibrations (dans l'unité de temps) devient de plus en plus grand, sans que l'intensité soit trop diminuée, λ tendra vers une valeur constante, $\varkappa$ qui est le rapport entre les chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant. Cependant il y aura aussi une différence, bien qu'ordinairement faible, entre les vitesses de propagation a dans le cas d'une petite et dans le cas d'une grande intensité des vibrations. Mais a pouvant ainsi varier tandis que λ, comme on l'admet, conservera une valeur peu différente de $\varkappa$, de l'équation

$$p_0 \lambda = q_0 a^2$$

on conclut que p_0 changera aussi. Particulièrement il le fera de manière qu'il croisse avec l'intensité de la vitesse vibratoire.

On sait encore que dans le voisinage d'un corps d'où part un ébranlement soudain et violent, c'est à dire précisément là où le mouvement est le plus fort, la vitesse de propagation aura de plus grandes valeurs qu'à des distances considérables.

19. En même temps que les coefficients varient, le mouvement dans le fluide change aussi de caractère. Il *cesse,* rigoreusement parlant, d'être un mouvement de *potentiel.* Car p ne dépendant plus de q tout seul, les termes $-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x}$ etc. ne peuvent être exactement des dérivées partielles d'une fonction unique. Il en sera donc le même des composantes de la vitesse.

IV.

Vibrations uniformément variées.

20. Parmi les mouvements vibratoires et variées, il y en a quelques-uns qui, étant les plus élémentaires, mériteront une attention spéciale. Nous les désignerons sous le nom de *vibrations uniformément variées;* et on doit bien les distinguer de ces mouvements compliqués dont nous nous sommes servi, plus haut, pour mettre en évidence un caractère plus général de la relation empirique.

Montrons par un exemple, très facile à généraliser, comment d'un problème de vibrations uniformes on passera à des problèmes voisins dans lesquels on rencontrera des vibrations variées de l'espèce indiquée.

Nous considérerons en commençant le cas qui nous parait le plus élémentaire et le plus instructif, et nous varierons ensuite un à un les éléments du problème.

Aussi longtemps, en effet, qu'on ne sait pas traiter la question rationnellement, avec toutes les ressources que fourniraient les branches diverses de la mécanique de la chaleur, il faut se borner à chercher quelle est la forme approchée des fonctions, ou quel est le caractère de ces nouvelles constantes qui, dans des circonstances simplifiantes, pourraient remplacer les coefficients des anciens problèmes. Et dans ces recherches, basées sur des faits expérimentaux mais incomplets, nous ne nous guiderons donc que sur des considérations générales concernant la nature des fonctions telles qu'elles se présentent le plus ordinairement.

Nous supposerons, jusqu'à ce que les conséquences obtenues exigent des modifications dans un sens déterminé, que *ces fonctions* cherchées ne présentent *aucune espèce de singularité* quant à leur continuité, quant à la possibilité d'être développées etc.

Naturellement les résultats auxquels on doit s'attendre dans de telles conditions ne peuvent consister alors qu'en de petites extensions et modifications des relations connues. Un objet principal de ces discussions sera donc de montrer qu'on peut encore se servir de ces relations pour des problèmes d'une nouvelle espèce, traités approximativement, en attribuant seulement aux coefficients des valeurs différentes.

21. Nous considérons une sphère »pulsante«, c'est à dire une sphère dont le volume varie, comme la source d'où dérivent les mouvements dans le fluide. Le centre de la sphère est au repos, et la vitesse radiale à sa surface est déterminée par une expression de la forme suivante

$$j \sin ht.$$

Si maintenant j et h sont des constantes, un mouvement de potentiel sera possible. Dans la relation empirique, p_0 et λ sont donc aussi des constantes, dont les valeurs dépendent seulement des constantes du problème, j et h; et celles-ci ne changent que lorsqu'on passe d'un problème à un autre.

22. Mais l'intensité j des pulsations pourrait varier avec le temps; nous supposerons qu'elle en soit une fonction linéaire:

$$j = j_0 + j_1 t.$$

Ou bien h, qui indique le nombre des vibrations dans l'unité de temps, ou la hauteur du son, serait, de son côté, variable; et serait de nouveau une fonction linéaire du temps:

$$h = h_0 + \frac{1}{2} h_1 t.$$

Alors l'argument ht du sinus, qui pourrait être comparé à un nombre croissant, ou à un chemin parcouru, deviendrait une fonction de *second* degré:

$$h_0 t + \frac{1}{2} h_1 t^2.$$

Dans le premier cas, l'intensité varie donc d'une manière uniforme, mais la vitesse s'annule périodiquement. En d'autres termes, le son devient plus fort ou plus faible, mais la hauteur reste la même.

Dans l'autre cas, l'intensité se conserve, et la vitesse s'annule après des intervalles de temps inégaux; c'est à dire, que la hauteur change, mais qu'il n'y a pas de variation en intensité. Ici cependant le mouvement n'a plus immédiatement un caractère aussi simple; nous emploierons néanmoins la dénomination proposée, puisque, en quelque sorte, il existera un *mouvement coordonné* et uniformément varié, avec lequel on peut comparer le mouvement considéré: c'est celui qui est indiqué par *l'argument, ht.*

On se prépare ainsi le passage à des problèmes plus généraux, dépendant, cette fois, de *trois* constantes j_0, j_1, h ou j, h_0, h_1; et l'on y arrive en variant ou l'intensité ou le nombre des vibrations.

23. En faisant abstraction du signe, nous prenons d'ailleurs comme mésure de la première grandeur, »*l'intensité variable*», le fonction-facteur j ou

$$j_0 + j_1 t.$$

j_0 est la valeur initiale de l'intensité variable, la dérivée j_1 est la *fluxion* de cette intensité; elle indique donc avec quelle vitesse elle croît.

Pareillement la rapidité, dans la succession des vibrations, peut se mesurer comme une vitesse, en prenant la dérivée d'une certaine fonction par rapport au temps. Cette fonction est *l'argument* de la fonction périodique; et la vitesse cherchée, dans le mouvement coordonné, est donc

$$h_0 + h_1 t.$$

h_0 se rapporte au temps initial, h_1 désigne de quelle manière s'accélère cette vitesse spéciale, ou bien la *fluxion de ce mouvement fictif.*

On observe aussi que si l'on prend un temps $\tau + t$, très voisin de τ, et que l'on néglige une quantité du second ordre, l'argument devient à une constante près égal à

$$(h_0 + h_1 \tau)t.$$

On en conclut que, pourvu qu'on fixe un certain moment τ, on peut considérer le nouveau coefficient h_τ, où

$$h_\tau = h_0 + h_1 \tau,$$

comme inversément proportionnel, au moment donné, à la durée d'une période, ou comme indiquant la hauteur du son au même moment.

24. Pour fixer les idées, occupons-nous particulièrement du dernier problème. Le premier se traite de la même manière, et il n'y a de différences que dans les conclusions auxquelles on arrivera.

Nous désignons par U la vitesse au point (x, y, z) du fluide. Si donc les mouvements qui s'y produisent n'ont d'autre cause que les pulsations de la sphère, la vitesse est radiale; et elle peut être et positive et négative. Au lieu d'exprimer p_0 et λ comme fonctions de u, v, w, contenant les constantes j, h_0, h_1, on peut donc dire qu'ils dépendent des mêmes constantes et d'une *seule variable* U.

De cette façon, on aura encore des valeurs différentes pour les coefficients suivant qu'il s'agit d'un éloignement ou d'un rapprochement par rapport à la sphère.

1°. Nous allons introduire cependant une restriction bien naturelle: soit qu'elle tienne à la nature des choses, soit qu'elle n'ait pour but que de dégager du grand nombre de problèmes un nouveau groupe, qui puisse être soumis au calcul. Faisons l'hypothèse que la *pression, quoique dépendant de la vitesse, soit indépendante de sa direction.*

Si V désigne le carré de la vitesse, on aura alors

$$p_0 = \varphi(j, h_0, h_1, V)$$

$$\lambda = f(j, h_0, h_1, V).$$

2°. Ensuite, tant que l'argument sera assez simple pour représenter en lui-même un mouvement *uniformément varié,* nous admettrons qu'on s'approche suffisament de la vérité en considérant, *pour toute l'époque,* φ et f comme des *fonctions développables suivant les puissances entières de* V.

Cela étant admis, les fonctions essentiellement positives φ et f seront d'une telle nature que si l'on y pose

$$h_1 = 0,$$

que par suite, V se réduise à V_0, les valeurs que prennent ces expressions

$$\varphi(j, h_0, 0, V_0) \text{ et } f(j, h_0, 0, V_0)$$

ne dépendent pas de V_0. Cependant V_0 aussi bien que V peut prendre un nombre infini de valeurs. Nous en concluons, puisqu'il existe un développement suivant les puissances de V, qu'aussi les expressions

$$\varphi(j,\ h_0,\ 0,\ V) \quad \text{et} \quad f(j,\ h_0,\ 0,\ V)$$

sont indépendantes de V.

Dans la relation empirique, écrite sous la forme

$$p = p_0(1 + \lambda\sigma),$$

p_0 et λ sont donc d'abord des fonctions des *constantes fondamentales*, j, h_0, h_1 et du carré de la vitesse au point donné; nous pourrons dire aussi qu'ils dépendent de *l'énergie* au point et des mêmes constantes. Et parmi ces dernières, la constante h_1, qui détermine comment la hauteur du son, représenté par les vibrations de la sphère, s'élève ou s'abaisse, entrera dans les fonctions φ et f d'une manière caractéristique: quelles que soient, en effet les valeurs qu'on attribuera à V, considéré comme une variable indépendante, *si l'on égale h_1 à zéro, V s'éliminera.* En d'autres termes, l'on aura

$$\varphi(j,\ h_0,\ 0,\ V) = \varphi(j,\ h_0,\ 0,\ 0)$$
$$f(j,\ h_0,\ 0,\ V) = f(j,\ h_0,\ 0,\ 0).$$

25. Soient, de plus, U et U_0 des quantités très petites, V et V_0 par suite des quantités du second ordre. Développons alors, conformément à la seconde hypothèse, φ et f suivant les puissances croissantes de V.

Cela posé, si l'on néglige les puissances supérieures, ni p_0 ni λ ne contiendront plus la vitesse, et l'on aura simplement

$$p_0 = \varphi(j,\ h_0,\ h_1,\ 0)$$
$$\lambda = f(j,\ h_0,\ h_1,\ 0).$$

Il s'ensuit que dans le cas de *vibrations uniformément variées et de petites vitesses,* on aura le grand avantage que la *relation conservera sa forme normale;* toutefois, il faudra, pour cela, négliger les quantités du second ordre. p_0 et λ dépendront ensuite de *trois* constantes, j, h_0, h_1: où bien de *l'intensité des vibrations,* de *la vitesse initiale dans le mouvement coordonné,* et de *la fluxion de ce mouvement fictif.*

Cela ne convient cependant que pour un *temps fini*. Étant donnée une telle époque, on diminuera, si cela devient nécessaire, l'intensité jusqu'à ce que la relation acquière le degré d'exactitude que l'on demande.

26. On remarquera que si la vitesse vibratoire ne peut être négligée dans les expressions de φ et de f, celles-ci, en conséquence des hypothèses admises, auront essentiellement un caractère oscillant.

La vitesse de pulsation, bien que ses périodes soient inégales, s'annulera une fois dans chacune des moitiés. À la surface du corps, φ et f doivent donc aussi reprendre les valeurs correspondant aux moments où la vitesse est nulle. Et c'est seulement à cause d'un changement de la condensation que la pression, dans des moments différents de cette même espèce, pourrait acquérir des valeurs modifiées.

Hors du corps, à de plus grandes distances, il en pourrait être autrement, puisque dans le fluide élastique la vitesse ne disparaîtra pas simultanément en tous points comme dans le liquide. Mais là les mouvements sont aussi plus faibles.

Donc φ et f, et par conséquent les coefficients, p_0 et λ, reprendront dans chacune des périodes une fois une ancienne valeur à la surface du corps; et, approximativement, cela aura lieu aussi quand on s'en éloigne. Les coefficients auront donc un caractère oscillant comme nous venons de l'expliquer.

Afin qu'il en soit autrement, il faudrait que les fonctions soient d'une espèce plus transcendentale; de sorte qu'elles ne pourraient pas être développées suivant les puissances de V. Elles devraient acquérir ainsi de nouvelles valeurs chaque fois que V s'annulerait.

27. Si en laissant ces problèmes où l'intensité se conserve, on revient à ceux où il n'en est pas ainsi, les coefficients subiront des changements plus forts. Car quoique V s'annule encore périodiquement sur la surface du corps, ni là ni à des distances plus on moins grandes de cette surface, ses valeurs moyennes, pendant le cours d'une période, ne seront plus essentiellement les mêmes de temps en temps; on arrivera donc au même résultat quant aux fonctions φ et f, ou bien quant aux p_0 et λ.

V.

Suite sur les vibrations variées. Petites vitesses et seconde approximation.

28. Généralisons les considérations précédentes en ne considérant pas seulement une sphère pulsante unique. Étendons-les à un nombre quelconque de corps de formes différentes effectuant des vibrations uniformément variées de toute espèce. Ayons enfin égard à la seconde puissance de la condensation.

Cela posé, nous écrirons

$$p = p_0(1 + Q + \lambda\sigma + \frac{1}{2}\mu\sigma^2),$$

p_0 étant la valeur constante que prendra la pression p si à la fois la condensation et la vitesse s'annulent. Pour plus de simplicité, nous supposerons qu'il n'y ait pas de forces extérieures.

Donc si l'on admet toujours, comme plus haut, que la *pression ne dépende pas de la direction de la vitesse,* Q, λ et μ peuvent être considérés comme fonctions seulement de V (c'est à dire du carré de la vitesse) et des constantes du problème.

Nous admettrons de nouveau qu'il soit permis de *les développer suivant les puissances entières de V.* Et nous le ferons aussi, si les vibrations ne sont plus uniformément variées, mais qu'on puisse seulement les considérer comme telles en ne s'occupant que d'un intervalle de temps assez court.

29. Pour arriver à des résultats plus déterminés, reprenons ici la supposition simplifiante que les *vitesses* soient très *petites.* Mais gardons les quantités du second ordre. Cela n'empêche pas, comme nous le savons, qu'il puisse exister des accélérations marquées ou de grandes variations dans la rapidité avec laquelle les vibrationsose succèdent.

Cela étant, λ et μ seront indépendants de V, car autrement on aurait des termes d'un ordre trop élevé.

Q, au contraire, en dépendra, et l'on trouve

$$Q = \frac{1}{2}\nu V;$$

Q, en effet, s'évanouit quand on fait converger V vers zéro. D'un autre côté, ν va disparaître, si l'on fait varier les constantes de façon à revenir à un problème de potentiel.

Ainsi on arrive à la relation

$$p = p_0(1 + \frac{1}{2}\nu V + \lambda\sigma + \frac{1}{2}\mu\sigma^2),$$

λ, μ, ν, p_0, *étant* des *constantes.* On observe encore qu'en passant au problème de potentiel, ν s'annule, et les autres coefficients prennent, respectivement, des valeurs différentes.

30. Donnons maintenant aux constantes fondamentales des valeurs peu différentes de celles qui correspondent à un problème de potentiel. En considérant un intervalle de temps assez court, on peut donc s'imaginer qu'à côté des constantes originaires, représentées par

$$h,$$

on en aura d'autres représentées par

$$h_1,$$

et qui seront très petites. Nous les désignerons comme les *constantes d'accélération.*

Alors ν devient une quantité du *premier* ordre, et l'on aura simplement

$$p = p_0(1 + \lambda\sigma + \frac{1}{2}\sigma^2).$$

31. D'après cela, en résumant et généralisant, on parvient à la *proposition suivante:*

Si la pression, exprimée comme fonction de la condensation et de la vitesse, est censée être indépendante de la direction de celle-ci; si, de plus, les vitesses sont très petites, de sorte qu'on puisse négliger les quantités d'un ordre plus élevé que le second; si enfin les constantes du problème sont telles que, rigoureusement parlant, aucun potentiel de vitesse n'existe: alors, *sauf un terme d'énergie*

$$\frac{1}{2}p_0\nu V,$$

la pression sera une fonction de second degré par rapport à la condensation.

Les coefficients varient avec les constantes du problème; et, en faisant tendre vers zéro *les constantes d'accélération,* le terme d'énergie disparaît.

Si enfin ces dernières sont très petites, avec l'approximation demandée, la pression deviendra seulement fonction de la condensation.

32. Toutes les fois que le terme d'énergie ne disparaîtra pas, toutes les fois par conséquent que les constantes d'accélération auront des valeurs finies, ce n'est qu'improprement qu'on pourra parler d'un potentiel de vitesse. Mais nous le ferons encore, pour des raisons que nous développerons, pourvu que toujours les vitesses soient très petites.

Nous remarquerons que les termes $-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x}$ etc. ne sont plus, *absolument* parlé, des dérivées par rapport aux coordonnées. Car quoique q s'exprime par σ, p ne dépend pas de σ tout seul.

Cependant, si l'on se rappelle que les termes du troisième ordre doivent être négligés, l'expression précédente peut être conçue comme provenant d'une différentiation. En effet, le carré V de la vitesse étant du second ordre, $-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x}$ s'écrira (en posant d'ailleurs $p_0 = kq_0$), de la manière suivante:

$$-k\left(\frac{1}{2}\nu\frac{\partial V}{\partial x} + \lambda(1 - \sigma)\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \mu\sigma\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right);$$

et cette expression est la dérivée par rapport à x d'une autre

$$-P$$

où

$$P = k\left(\frac{1}{2}\nu V + \lambda(\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2) + \frac{1}{2}\mu\sigma^2\right).$$

On peut donc dire que, pour *l'époque choisie,* on aura un potentiel *en diminuant assez l'intensité des vibrations.*

33. Dans ce qui précède, nous avons considéré un mouvement vibratoire et varié qui, rigoreusement, ne permettrait jamais aucun potentiel, même si l'on prenait intervalle de temps aussi court que l'on voudrait.

Maintenant nous nous représenterons les vibrations des corps comme étant régulières à partir de l'instant initial pendant un temps fini. De cette façon elles seront complètement compatibles avec l'existence d'un potentiel: ce qui doit être conforme aussi à l'état initial. Mais supposons qu'au bout d'un certain temps, le caractère des vibrations change.

Alors si les condensations restent petites et qu'on demande une formule *unique* pour tout l'intervalle de temps considéré, on aura encore une relation de la forme:

$$p = p_0(1 + Q + \lambda\sigma + \frac{1}{2}\mu\sigma^2).$$

Et Q, λ, μ seront des fonctions de la vitesse; car autrement la pression deviendrait la même fonction de la condensation que si le développement de la chaleur avait été toujours régulier.

Or, même au temps premier, où existe un potentiel de vitesse, celle-ci varie. Donc si les coefficients peuvent s'exprimer encore, pour toute époque, par des séries de puissances entières de V, ils en doivent être de telles fonctions que, dans toutes les variations que subira V, ils garderont les mêmes valeurs. Mais alors ils le feront aussi plus tard, lorsque la vitesse variera d'une manière essentiellement différente; car les constantes fondamentales ne devront pas changer. p serait ainsi toujours fonction de la seule condensation: ce qui est absurde.

Si l'on admettait ainsi que les coefficients, exprimés en fonctions du carré de la vitesse, eussent un caractère aussi simple, dans le cas d'un mouvement variant d'une manière si peu élémentaire, au sens analytique, aucune formule *unique* ne serait possible. Si une telle formule existait et si les Q, λ, μ s'exprimaient en fonctions de V de la manière que nous venons d'indiquer, l'existence d'un potentiel pour un temps fini entraînerait un potentiel exact pour tout l'intervalle de temps.

34. Quand il s'agit de mouvements accompagnés d'un développement de chaleur, l'hypothèse d'un potentiel n'exprime vraisemblablement, même dans le cas de vibrations régulières, qu'une vérité approchée. Le plus souvent on peut cependant partir de là sans commettre de grandes erreurs.

Donc si quelquefois il se présente, dans les problèmes, *une espèce de discontinuité* dans le passage d'un état qui est censé être compatible avec un potentiel à un ou plusieurs autres états qui ne le sont pas, il faut diviser le problème en plusieurs. Ces problèmes partiels se succèdent dans le temps, et ils répondent à des *relations empiriques distinctes.*

35. Ainsi quand, d'abord, on a eu des vibrations uniformes et, qu'après un court passage, des vibrations uniformes mais d'un nouveau caractère commencent, pour se servir de relations empiriques permettant le calcul, il faudra traiter les trois époques séparément. Pour la première et la dernière, les relations se présenteront sous leurs formes normales, mais avec des coefficients distincts. Dans la période moyenne il existera une relation plus compliquée.

Pourvu qu'alors on puisse remplacer avec assez d'exactitude le mouvement vibratoire et varié par un autre qui est *uniformément varié,* et que les *vitesses* soient *peu intenses,* on sera ramené ici encore à la *forme normale.* Seulement on aura à changer les valeurs des coefficients constants. Dans les trois cas, ces coefficients répondront, respectivement, à trois systèmes de constantes fondamentales; et le nombre de celles-ci sera plus grand dans le second cas que dans les autres.

VI.

Représentation hydrodynamique de la pression. Pressions partielles.

36. Nous avons essayé de donner une extension à la relation empirique, servant à déterminer la pression comme fonction de la condensation, ou comme fonction de celle-ci et de la vitesse. Toutefois il ne s'agit là que d'approximations et d'interpolations; et il ne faut pas s'écarter loin des mouvements ordinairement traités. En particulier, nous étions arrivés à cette conclusion que même en cas des vibrations peu régulières un état de potentiel subsisterait, pourvu que les vitesses fussent assez petites pour que l'on pût négliger les puissances du troisième dégré.

Nous allons fixer maintenant notre attention plutôt vers le caractère *hydrodynamique* que *physique* de la pression. En d'autres termes, nous passons à une autre forme de représentation, et en traitant les équations générales nous ferons usage de la dite relation.

Un fait remarquable se manifestera alors. Dans *l'expression hydrodynamique* de p, certains coefficients de la relation empirique ne se présentent pas: ce sont ceux qui appartiennent aux *termes du second ordre;* en particulier tous ceux qui dépendent du carré de la vitesse ou de celui de la condensation.

C'est d'abord lorsqu'il s'agit de déterminer avec la *seconde* approximation la grandeur de la dernière quantité qu'il est nécessaire d'avoir égard aux valeurs de ces *coefficients secondaires.*

37. On peut donc concevoir, comme il est dit, $\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x}$ etc. comme des dérivées, par rapport aux coordonnées, d'une fonction P, déterminé par l'intégrale

$$P = \int \frac{\partial p}{q}. \tag{1}$$

Et cela a lieu bien que q dépende de σ, p au contraire de σ *et de* V. Mais rappelons-nous que ce carré de la vitesse est du second ordre et que les quantités d'un ordre plus élevé doivent être négligées.

La vitesse pouvant ainsi être déterminée par un potentiel, après une première intégration des équations du mouvement on obtient l'équation suivante, exprimant la valeur de P:

$$P = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} V. \tag{2}$$

38. Le produit de P par la densité normale q_0,

$$p_i = P q_0,$$

ne désigne pas, généralement, la pression, mais il en constitue une partie caractéristique. Le potentiel φ étant connu, on en déduit la valeur de P de la même manière, que l'on ait à faire à un fluide incompressible ou à un fluide élastique. Et dans le premier cas, p_i est la *pression due aux mouvements des masses fluides.*

Nous pouvons donc dire que p_i est la pression provenant immédiatement de l'état des condensations et des mouvements, tels qu'ils existent au lieu. On se figure ainsi que les masses agitées, en exerçant leurs pressions, se comportent après comme des masses fluides incompressibles. Et pour cette raison, nous désignerons cette pression partielle, p_i, comme la *pression d'inertie.*

39. On a donc eu égard, en partie, à la compressibilité. Mais provisoirement, on néglige de le faire encore une fois, en ne voulant conclure qu'à la valeur de la dite pression spéciale.

La compressibilité joue cependant de nouveau un rôle. En effet, elle donne lieu à une pression additionnelle, pression qui n'existera pas dans le cas de l'incompressibilité, puisqu'elle s'annule lorsque les condensations sont censées tendre beaucoup plus rapidement vers zéro que la vitesse de propagation vers infini.

Cette pression, comme nous le verrons bientôt, est proportionnelle au carré de la condensation; de sorte qu'on en a effectivement un double emploi.

Nous le reconnaîtrons plus clairement quand nous passerons de l'évaluation de la pression d'inertie à celle de la pression complète.

40. Pour cet effet, partons de la relation empirique

$$p = p_0(1 + \lambda\sigma + \frac{1}{2}\mu\sigma^2 + \frac{1}{2}\nu V), \tag{1}$$

ou d'ailleurs $p_0 = kq_0$. En développant ensuite la valeur de P, donnée par l'intégrale ci-dessus, nous obtiendrons de nouveau, comme au n° 32, après avoir introduit dans la dernière la valeur de p:

$$P = k(\lambda\sigma + \frac{1}{2}(\mu - \lambda)\sigma^2 + \frac{1}{2}\nu V). \tag{2}$$

De là, en comparant (1) et (2), en posant $k\lambda = a^2$, et $p_p = \frac{1}{2}q_0 a^2\sigma^2$, on tire

$$p = p_0 + p_i + p_p. \tag{3}$$

La pression additionnelle p_p se manifeste ainsi comme une *pression de propagation.* Elle naîtra parce que l'état de la condensation (ou de la dilatation) qui existe au lieu, tend à s'en répandre, dans toutes les directions, avec une vitesse a, la *vitesse de propagation.*

41. De cette expression mixte, on peut passer à une autre, que nous appellerons *l'expression hydrodynamique de la pression;* et l'on y arrive en effectuant l'élimination de la condensation.

Si l'on part des deux expressions de P, l'expression *empirique,* donnée par (2) n° 40, et l'expression *hydrodynamique,* déterminée par (2) n° 37; si, de plus, on néglige ici les quantités d'un ordre plus élevé que le *premier,* on obtient

$$\text{(a)} \qquad a^2\sigma = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Il faut cependant se rappeler que σ et φ contiennent des termes et du premier et du second ordre. On devait ainsi poser plutôt

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

σ_1 et φ_1 ne contenant que termes du premier ordre.

Dans l'équation différentielle qui précède, il en est de même du second membre. Si, en effet, l'équation des surfaces, $F = 0$, contient les paramètres

$$a_g,\ b_g,\ c_g,\ d_g\ \ldots\ldots\ a_k,\ b_k,\ c_k,\ d_k\ \ldots\ldots,$$

tous dépendant du temps, φ dépend aussi des mêmes quantités. Mais il contient encore le temps explicitément. On aura donc, en distinguant entre les ∂ et les δ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\delta\varphi_1}{\delta t} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g}a'_g + \ldots + \frac{\delta\varphi_2}{\delta t}.$$

Et dans cette équation, le premier terme à droite, comme le potentiel φ et ses dérivées par rapport aux coordonnées, est une quantité du premier ordre; les termes composés seront donc du second ordre, parce qu'ils contiennent les facteurs a'_g etc., qui sont censés être très petits. Enfin la dérivée partielle de φ_2, par rapport au temps, $\frac{\delta\varphi_2}{\delta t}$, est aussi de second ordre.

Il s'ensuit que l'équation (a) s'écrira, plus correctement,

$$a^2\sigma_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}; \tag{1}$$

et l'on en déduit, puisque $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ et $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$,

$$a^2\sigma^2 = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi^2}{\partial t^2}. \tag{1'}$$

La *pression hydrodynamiquement exprimée,* ainsi exprimée en sorte qu'il n'y ait plus de trace de la condensation, prend donc la forme suivante:

$$p = p_0 - q_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}V\right) + \frac{1}{2}q_0\cdot\frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi^2}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Elle peut s'écrire aussi, en ayant égard à *l'ordre des termes,*

$$p - p_0 = -q_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - q_0\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g}a_g' + \ldots\right) + \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}\frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi_1^2}{\partial t^2}\right]. \tag{2'}$$

42. Nous arriverons à cette équation encore d'une autre manière.

Multiplions la première des équations de mouvement par q, ou $q_0(1 + \sigma_1 + \ldots)$. Alors, puisqu'en développant on doit rejeter les termes d'un ordre plus élevé que le second, on aura

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -q_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - q_0\sigma_1\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{1}{2}q_0\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Mais en remarquant qu'avec la première approximation la relation empirique (e) s'écrira

$$p - p_0 = q_0 a^2\sigma_1, \tag{e}$$

après avoir comparé, des deux côtés du signe, les termes du premier ordre et effectué l'intégration, on en déduit

$$a^2\sigma_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}, \tag{1}$$

comme plus haut.

On conclura donc comme auparavant que

$$p = p_0 - q_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}V\right) + \frac{1}{2}q_0\cdot\frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi^2}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Mais les termes qu'on obtient en effectuant les développements doivent être mis hors de considération s'ils surpassent le second ordre.

43. La pression se décompose ainsi en trois pressions partielles: la pression de transmission, la pression d'inertie et la pression de propagation. Nous donnerons maintenant aux dernières une explication *hydrodynamique,* servant à suppléer la précédente où l'on a eu égard d'une manière explicite à la compressibilité des masses. Nous avons:

1°. *La pression de transmission*

$$p_0 = kq_0 .$$

2°. *La pression d'inertie*

$$p_i = - q_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V \right) .$$

Cette pression partielle est celle qu'exercent les masses fluides *en tant qu'elles se meuvent,* et *en tant qu'elles tendent à changer leurs mouvements comme des masses fluides élastiques,* supposé qu'elles *agissent* alors, c'est à dire en produisant cette pression, *comme des masses incompressibles.*

3°. *La pression de propagation*

$$p_p = \frac{1}{2} q_0 a^2 \sigma^2 = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{2} q_0 \frac{\partial \varphi^2}{\partial t^2} .$$

Elle sera à ajouter parce que les masses fluides n'agissent pas, au point où nous sommes, tout-à-fait *commes des masses incompressibles.* La pression additionnelle qui en provient exprime, pouvons-nous dire, *l'énergie avec laquelle le mouvement dans le fluide élastique tend à changer* au moment et au point en question. On voit, de plus, qu'il y a ici quelque chose qui est caractéristique pour les fluides élastiques. Car si l'on passe à la limite, en considérant ainsi les fluides incompressibles, le facteur

$$\frac{1}{2} q_0 \frac{\partial \varphi^2}{\partial t^2}$$

se modifiera sans devenir cependant infini, et de l'autre côté, le facteur

$$\frac{1}{a^2}$$

s'annulle, puisque la vitesse de propagation, a, est censée maintenant être infinie; on conclut donc que la pression de propagation va disparaître.

Il est bien à remarquer que la pression de propagation est *toujours positive.*

Nous observons aussi qu'elle est la seule pression partielle dans laquelle il entre, explicitement, quelque coefficient appartenant à la relation empirique. Ce coefficient étant a^2, il suffit même de connaître cette relation (e) dans sa forme la plus élémentaire, correspondant à la première approximation.

44. La *pression d'inertie* se décompose aussi en pressions partielles, ayant chacune un caractère distinct.

1°. On a d'abord la *pression de fluxion,* p_{if}, ou

$$-q_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Nous l'appellerons ainsi parce qu'on peut désigner la dérivée par rapport au temps comme une fluxion. Et cette pression correspond aussi à »*l'état de fluxion*» dans le mouvement, ou à l'état de mouvement qui se prépare.

2°. On a ensuite, comme nous dirons, la *pression d'énergie,* p_{ie}, ou

$$-\frac{1}{2}q_0 V.$$

Elle est, en effet, représentée, au signe près, par une expression d'énergie. Cette pression, qui est du second ordre, est *toujours négative.*

Si l'on remplaçait $-q_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ par $-q\frac{d\varphi}{dt}$, en rapportant ainsi la pression de fluxion au *point physique* et non pas au point géométrique, dans l'expression de la pression d'inertie

$$-q_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}V\right),$$

le terme contenant la pression d'énergie devait changer de signe et devenir une tension correspondante. En écrivant, en effet, $-q_0\frac{d\varphi}{dt}$, pour parvenir à l'ancienne expression il faudra ajouter

$$q_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}u+\frac{\partial\varphi}{\partial y}v+\frac{\partial\varphi}{\partial z}w\right),$$

c'est à dire

$$q_0 V.$$

Mais cette expression se réduit avec $-\frac{1}{2} q_0 V$ à $\frac{1}{2} q_0 V$, et l'on aura

$$-q_0\left(\frac{d\varphi}{dt}-\frac{1}{2} V\right).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

45. La pression d'énergie n'est pas susceptible d'être partagée en pressions encore plus spéciales, à moins qu'on ne partage aussi le potentiel φ_1 en une somme de plusieurs. Mais c'est ce qui a lieu, au contraire, avec la *pression de fluxion,* qui s'écrira quand on la développe

$$-q_0 \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}-q_0 \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}-q_0\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g} a_g' + \ldots\right).$$

Elle se décompose, par suite, en trois pressions partielles, dont l'une a un caractère qui la rapproche sensiblement de la pression d'énergie, comme on le peut prévoir d'après la remarque qui précède, tandis que les autres accusent un caractère qui en diffère d'avantage.

1°. La première des pressions partielles qui sont contenues dans la pression de fluxion est

$$(1) \qquad -q_0 \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}.$$

Elle est la seule de toutes qui soit de premier ordre, et elle est donc prédominante. Comme nous le savons, cette pression peut aussi s'exprimer comme il suit

$$q_0 a^2 \sigma_1,$$

et on devra alors la comprendre comme une *pression de condensation.*

Mais puisqu'on a la même expression lorsqu'il s'agit des fluides incompressibles (ou bien peu compressibles) que celle que nous avons exposée d'abord, nous préférons ici la concevoir *hydrodynamiquement,* c'est à dire conformément à cette première expression.

En faisant varier avec le temps le potentiel φ_1, nous considérons ici comme constants tous les paramètres, a_g, b_g, c_g, d_g, ..., a_k, ... etc., qui déterminent, dans le sens le plus général, les mouvements des corps: en d'autres termes, leurs mouvements de translation, leurs rotations, et leurs déformations de toutes espèces. Mais on a égard aux changements dans ces mouvements qui se préparent, pourvu qu'on puisse considérer le potentiel comme étant aussi fonction des paramètres dérivés, a'_g, b'_g, c'_g, d'_g, ..., a'_k, ... etc., désignant les vitesses dans tous les mouvements des corps; et s'il en est ainsi, on peut concevoir la pression qui en naît comme une *pression d'impulsion.* Plus généralement, nous dirons qu'on a une *pression d'influence,* puisque, indépendamment des mouvements des corps, tels qu'ils existent, il se manifeste entre ceux-ci et le fluide un rapport caractéristique, d'après lequel se fera remarquer aussi dans le fluide un changement d'état qui ne se rattache pas nécessairement à un changement actuel dans les positions ou les formes des corps.

2°. La seconde pression

$$(2) \qquad - q_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}$$

étant donnée aussi par une fluxion, sans qu'on fasse varier avec le temps les paramètres a_g, b_g, c_g, d_g, ..., a_k, ..., nous la regarderons de même comme une *pression d'impulsion* ou *d'influence,* mais secondaire.

3°. La troisième pression partielle

$$- q_0 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_g} a'_g + \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_g} b'_g + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_k} a'_k + \ldots\ldots \right)$$

correspond, au contraire, à une variation des mêmes paramètres a_g, b_g, c_g, d_g, ..., a_k, ... déterminant les positions et les formes des corps à chaque moment. En vertu de ces mouvements, externes et internes, les masses fluides qui touchent les surfaces se déplaceront. Et de cette façon, pourvu qu'on n'ait plus égard aux *changements* qui se préparent dans les mouvements, il résultera une nouvelle pression de fluxion partielle, pression qui ne se rapporte pas, comme dans les cas précédents, à *l'accélération* dans les mouvements divers, mais seulement aux *déplacements eux mêmes* qui se produisent. On aura donc une pression partielle qui, bien qu'elle appartienne à la pression de fluxion, présente une certaine analogie avec la pression d'énergie.

Mais il y a encore d'autres raisons d'établir une telle comparaison, au moyen de laquelle on aura une espèce de transition entre les deux classes de pression dans lesquelles se décompose la pression d'inertie. Si l'on considère les

$$a_g', \; b_g', \; \ldots, \; a_k', \; \ldots$$

comme des vitesses, de différentes espèces, appartenant aux *corps* $S_g, \ldots, S_k, \ldots$ et

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g}, \; \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_g}, \; \ldots, \; \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_k}, \; \ldots\ldots$$

comme des vitesses fictives et correspondantes, appartenant au *point* (x, y, z) *du fluide,* on reconnaîtra une analogie avec des expressions comme

$$-\frac{1}{2}q_0(a_g'^2 + b_g'^2 + \ldots + a_k'^2 + \ldots\ldots),$$

on comme

$$-\frac{1}{2}q_0 V.$$

En composant la pression dont il s'agit avec la pression d'énergie qui précède, on aura, en effet, une expression de la forme

$$\text{(c)} \qquad -\frac{1}{2}q_0\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g}a_g' + \ldots \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}u + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}v + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}w\right) + \ldots + a_g'\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g}\right].$$

Et ici le terme moyen et trinôme qui représente le carré de la vitesse, V, ne se présente naturellement qu'une seule fois, parce que les facteurs u, v, w coïncident en valeur respectivement avec $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}, \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}$. Dans les autres termes cela n'est plus le cas; a_g' ne coïncide pas en valeur avec $\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g}$ etc., et les termes dont il s'agit se présentent ainsi deux fois.

La pression partielle que nous traitons se comporte ainsi, pouvons-nous dire, comme une *pression d'énergie potentielle* ou, plus simplement, comme une *pression potentielle.* La pression d'énergie, que nous avons choisie pour terme de comparaison, et que nous désignerons brièvement par ce nom, sera alors plus exactement une »*pression d'énergie kinétique*». Et la pression (c) sera une *pression d'énergie composée.*

Si l'on fixe l'attention sur le mot *énergie,* il faut se souvenir qu'on forme ici le demi-produit de deux vitesses différentes, l'une correspondant à un corps, l'autre (qui en outre est d'espèce fictive) correspondant au point du fluide. De plus, il faut toujours former deux produits identiques qui se correspondent, et l'on établira ensuite la série entière de ces produits doubles; enfin pour en obtenir la pression partielle que l'on cherche, on les ajoute les uns aux autres. Surtout lorsqu'on aura à considérer des points du fluide situés sur les surfaces des corps, la ressemblance entre la pression d'énergie potentielle et celle de l'énergie kinétique s'accentuera, et il s'en présentera des applications dans les problèmes spéciaux.

Si, d'un autre côté, on fixe l'attention sur le mot *potentielle* en tant qu'épithète au mot énergie, il faut se rappeler qu'on arrive à l'expression de la pression partielle que l'on considère en partant du *potentiel principal* qui se rapporte au mouvement, $q_0\varphi_1$, et en faisant ensuite varier, négativement, les paramètres avec le temps.

VII.

Superpositions de potentiels. Cas simplifiants. Conclusions.

46. Nous examinerons de quelle manière on peut déterminer les fonctions φ_1 et φ_2 dont est composé le potentiel φ.

47. L'équation de continuité s'écrira

$$\Delta\varphi + \frac{1}{q}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial t}\right) = 0,$$

Δ désignant l'opération

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

En développant $\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial t}$, il faut cependant avoir égard aux termes et du premier et du second ordre; en développant $\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x}$ etc., il suffira de tenir compte de ceux du premier. On aura donc

$$\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x},$$

etc., et

$$\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\delta \sigma_1}{\delta t} + \frac{\delta \sigma_2}{\delta t} - \sigma_1 \frac{\delta \sigma_1}{\delta t} + \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial a_g} a'_g + \frac{\partial \sigma_1}{\partial b_g} b'_g + \ldots + \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_k} a'_k + \ldots\ldots\right).$$

Substituant et effectuant ensuite une séparation en deux équations (ce qui est permis parce que φ_1 et σ_1 ne contiennent pas de termes du second ordre), on arrive aux équations suivantes:

$$\Delta \varphi_1 + \frac{\delta \sigma_1}{\delta t} = 0$$

$$(1) \qquad \Delta \varphi_2 + \frac{\delta \sigma_2}{\delta t} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial \sigma_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\frac{\partial \sigma_1}{\partial z}$$

$$- a'_g \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_g} - \ldots - a'_k \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_k} - \ldots + \sigma_1 \frac{\delta \sigma_1}{\delta t}.$$

Il faut y ajouter les conditions relativement aux surfaces des corps. En les considérant comme formant une seule surface donnée par l'équation

$$F = 0,$$

on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Cependant, nous supposerons que F ne contienne pas le temps explicitement et ne dépende que de x, y, z et des paramètres a_g, b_g, ... a_k, ... De là il résulte que l'équation de condition se décompose aussi en deux:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial a_g} a'_g + \frac{\partial F}{\partial b_g} b'_g + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_k} a'_k + \ldots\ldots = 0$$

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0;$$

car dans la première équation il n'y a que des termes du premier ordre, dans la seconde il n'y a que des termes du second. Les équations subsistent, comme on le sait, pour tous les points des surfaces, c'est à dire tant que $F = 0$.

48. *Pour déterminer* φ_1, il faut maintenant combiner la première des équations (1) avec l'équation connue (n° 41)

$$a^2\sigma_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}; \tag{3'}$$

et l'on emploie aussi la première des équations de condition (2). En même temps, on a égard à l'état initial, et l'on demande que la vitesse s'annule à l'infini.

À côté de φ_1 on trouve encore σ_1. Et il est bon de remarquer *qu'on n'a besoin de connaître que le coefficient principal de la relation empirique,* $k\lambda$ ou a^2, c'est à dire le carré de la *vitesse de propagation.*

49. Il en est tout autrement lorsqu'il s'agit de φ_2 et de σ_2. Alors on aura recours à la seconde équation (1), combinée avec la seconde condition (2). Il faut y ajouter une équation correspondant à (3'), équation que l'on trouve en introduisant, dans l'expression hydrodynamique de la pression (n° 41), la valeur de celle-ci au moyen de la relation empirique (n° 40); puis on éliminera σ_1 au moyen de l'équation (3'). De cette façon l'on obtient

$$\begin{aligned} a^2\sigma_2 = &-\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} - \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g}a'_g + \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_g}b'_g + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_k}a'_k + \ldots\ldots\right) \\ &-\frac{1}{2}\left(1 + a^2\frac{\nu}{\lambda}\right)V + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)\frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi_1^2}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{3''}$$

φ_2 et σ_2 *ne peuvent donc être déterminés à moins qu'on ne connaisse les coefficients secondaires de la relation empirique.*

50. En général, il serait chose difficile d'achever la solution d'un problème où il faudrait avoir égard à tous les termes du second ordre; car il deviendrait nécessaire de déterminer aussi σ_2 et φ_2.

Mais il y a des problèmes spéciaux dont la solution n'exige pas qu'on tienne compte de tels termes.

Ou bien il peut arriver qu'il suffise d'en connaître quelques-uns qui ne contiennent ni σ_2 ni φ_2.

51. Souvent il est suffisant de connaître la partie dominante ou de la vitesse ou de la pression, et l'on se borne alors à la *première approximation.*

Cela a lieu si l'on cherche seulement à déterminer, dans ses grands traits, l'état de vibration qui se communique au fluide; mais qu'on ne se soucie pas de déterminer à part les forces apparentes provenant des vibrations originaires et sollicitant les corps.

Figurons-nous aussi qu'après une série de vibrations uniformes, il s'y produise des changements relativement considérables, ou imaginons-nous que ces vibrations commencent ou finissent très soudainement. Pour parvenir à une solution complète, on devrait ainsi introduire les coefficients *secondaires* de la relation empirique, pourvu que les difficultés à vaincre ne fussent pas encore plus grandes. Mais justement alors, pour reconnaître ce qui est le plus important quant aux phénomènes incidents, y comprises même les variations des pressions, il suffira ordinairement d'étudier ce qui se rapporte aux accélérations; et l'on s'en tiendra donc encore à la première approximation. Les difficultés s'éliminent ainsi, et l'on n'a besoin que du *coefficient principal* ou du carré de la *vitesse de propagation.*

On aura maintenant

$$p = p_0 - q_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t},$$

et c'est seulement φ_1 dont la connaissance est exigée.

52. En second lieu, nous prendrons en considération les quantités du *second ordre.* Les mouvements dans le fluide proviennent toujours des vibrations des corps. Mais celles-ci doivent être *assez régulières* pour qu'on puisse admettre que les *coefficients secondaires disparaissent.*

Nous admettons aussi qu'après la fin d'une vibration la place d'un corps ou d'une particule du fluide (si l'on compare leurs déplacements avec les amplitudes des vibrations) ne soit que faiblement changée.

Cela posé, nous nous proposons de déterminer la *pression moyenne,* dans un point *géométrique* du fluide, pendant le cours d'une période. Cette période est donc censée être commune pour tous les corps: en d'autres termes, les vibrations seront *synchrones.*

On peut alors faire abstraction de la *pression de fluxion,* dont la valeur moyenne s'annulle; et l'on partira de l'équation abrégée

$$p - p_0 = - q_0 \left(\frac{1}{2} V_1 - \frac{1}{2a^2} \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial t^2} \right) + \dots$$

Les termes qui ne sont qu'indiqués seront d'un ordre trop élevé, ou bien leurs moyennes sont nulles. Différemment pour un point qui se *déplace.*

Si d'un autre côté il s'agit de déterminer les *forces moyennes* qui imprimeront aux corps de nouveaux mouvements progressifs, il est seulement permis de supprimer la *pression d'influence secondaire*

$$- q_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t},$$

qui donnerait lieu à une force du deuxième ordre, mais d'une espèce périodique. Et l'on peut écrire la pression dynamique $p - p_0$ comme il suit

$$p - p_0 = - q_0 \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_g} a_g' + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_k} a_k' + \dots\dots \right) + \frac{1}{2} V_1 - \frac{1}{2a^2} \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial t^2} \right].$$

Dans les deux cas, il ne sera ainsi nécessaire de connaître que le potentiel principal φ_1.

C'est à dire que *l'on aura seulement recours aux équations simples*

$$(2) \qquad \begin{aligned} \Delta \varphi_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} &= 0 \\ a^2 \sigma_1 &= - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \end{aligned}$$

auxquelles il faut ajouter les conditions relativement aux surfaces, à l'état à l'infini, et à l'état initial.

Dans ce qui suit, nous nous bornons à examiner les problèmes des deux dernières espèces.

53. φ_1 était une quantité du premier ordre; car dans tous les points du fluide la vitesse s'annulerait avec une certaine quantité de cet ordre ε. Nous concevrons cette quantité ε comme le rapport entre la plus grande amplitude des vibrations des corps et les dimensions de ceux-ci. Et si ε diminue suffisamment, tandis que toutes les autres quantités se conservent,

même les mouvements progressifs auxquels donnent lieu les vibrations originaires ne varieront que faiblement.

La pression d'énergie composée

$$-q_0\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g}a'_g+\frac{\partial\varphi_1}{\partial b_g}b'_g+\ldots+\frac{\partial\varphi_1}{\partial \alpha_k}a'_k+\ldots\ldots+\frac{1}{2}V_1\right)$$

aussi bien que la *pression de propagation*

$$q_0\frac{1}{2a^2}\frac{\partial\varphi_1^2}{\partial t^2}$$

étant donc, toutes les deux, du second ordre, il en est de même de leurs valeurs moyennes aux surfaces des corps.

Ordinairement, ces deux espèces de pressions exerceront ainsi une influence l'une comparable à l'autre.

54. Nous allons maintenant varier aussi, mais toujours en passant de problème à problème, un second élément. C'est la vitesse avec laquelle les vibrations se succèdent. Ou autrement dit, c'est la *hauteur du son*. Alors c'est surtout le potentiel d'influence $\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$ qui changera bien sensiblement. Et l'on arrive au résultat suivant:

Plus les périodes seront courtes et plus, par conséquent, la longueur des ondes sera petite, d'autant plus grande devient l'influence de la pression de propagation.

Cela a un intérêt particulier quand il s'agit d'étudier les forces qui prennent naissance lorsqu'on passe du fluide incompressible au fluide élastique, et qu'on s'arrange en sorte que les ondes deviennent de plus en plus petites. Car, nous le rappelons, la pression partielle dont il est question est toujours *positive,* tandis que la pression d'énergie, à laquelle s'ajoute une pression potentielle d'un signe indéterminé, est toujours *négative.*

55. D'autre part, augmentons la durée des périodes, de sorte qu'on obtienne des *ondes d'une longueur de plus en plus grande, relativement à la distance des corps au point que l'on considère.* Alors, tant qu'on se borne à considérer ce même point qui, à la fin, appartiendra au commencement de la première onde, on s'approchera successivement de l'état qui dans les mêmes circonstances convient à un liquide.

Car si l'on ne fait pas varier la position du point, et qu'on prolonge toujours la durée des périodes des vibrations pour obtenir des ondes de la longueur voulue, il faut concevoir le potentiel d'influence $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$ comme une quantité d'un ordre inférieur à celui du potentiel φ_1 lui même. Or des deux équations (2) du n° 52, on conclut que.

$$a^2 \Delta \varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial t^2}.$$

Et puisque ensuite a^2 est une constante déterminée, il en résulte que la partie dominante de φ_1 se déterminera par l'équation différentielle simplifiée

$$\Delta \varphi_1 = 0.$$

Les autres parties de la même fonction tendent vers zéro.

On peut donc calculer le potentiel de vitesse comme s'il s'agissait d'un liquide. Et l'on peut aussi faire la même simplification pour déterminer la valeur de la pression, puisque, dans ce cas, la pression de propagation doit être négligée par rapport aux autres pressions partielles comme étant d'un ordre inférieur.

56. *Donc pour des vibrations assez lentes, et lorsqu'il s'agit des points qui ne se trouvent pas à de trop grandes distances des corps vibrants, le fluide se comporte comme un fluide incompressible.* Et les *forces* qui se développent entre les corps sont donc *essentiellement les mêmes que si elles avaient été calculées pour un liquide.* La pression d'inertie aura à peu près la même valeur que pour un liquide et la pression de propagation, qui a un caractère presque opposé, tend à disparaître.

Mais il n'en est pas ainsi quand on *sépare* suffisamment les corps, en gardant leurs vibrations; ou bien, si l'on fait assez *raccourcir* les périodes. Chaque corps ne se trouve plus au commencement de la première onde que produit un autre. La pression d'inertie se modifie alors, et elle peut changer essentiellement, même en prenant sa valeur moyenne, avec l'état des ondes. La pression de propagation, d'un autre côté, gagnera de l'influence, et pourrait devenir prédominante.

Pour imiter dans l'air les phénomènes relatifs aux liquides, il ne faut pas nécessairement aller aux limites extrêmes. En effet, la vitesse de propagation est très grande par rapport à celle des vibrations ordinaires (p. ex. dans le cas des sons perceptibles), et les objets vibrants dont on pourrait examiner avec succès l'action mutuelle sont aussi le plus souvent bien rapprochés l'un de l'autre; par conséquent, les phénomènes de force qu'on reconnaîtra d'après des expériences faites dans l'eau, se montreront alors dans l'air très clairement et de la même manière.

Il en pourrait être tout autrement à de grandes distances, et pour des vibrations correspondant à des sons très élevées.

57. Avant de finir, nous donnerons, pour plus de clarté et d'utilité, au théorème que nous venons d'exposer un peu plus de développement et d'extension.

Nous étudierons ainsi, successivement, la forme du potentiel qui se rattache aux suppositions que nous avons prises pour point de départ, la simplification qui en résultera pour l'équation de continuité, et la manière dont se décompose l'équation de condition relativement aux surfaces des corps. Nous ferons ensuite apercevoir quelles en seront les conséquences quand il s'agira de chercher la valeur approchée du potentiel et celle de la pression, surtout celle de la pression moyenne.

58. Nous prolongerons, comme il a été dit, de plus en plus la durée des périodes des vibrations, et en même temps nous ferons tendre vers zéro le rapport ε entre la plus grande amplitude et les dimensions des corps. Il y aura ainsi une double raison pour l'affaiblissement de l'intensité des vibrations; et le rapport de cette intensité (c'est à dire la plus grande vitesse dans le mouvement vibratoire) à la vitesse de propagation (qui a une valeur déterminée) doit donc être considéré comme une quantité infiniment petite du second ordre.

En vertu de cela, nous développerons le potentiel de vitesse en une somme de potentiels partiels, comme suit:

$$(1) \qquad \varphi = \varepsilon^2 a\psi + \varepsilon^3 a\chi + \varepsilon^4 a\omega + \ldots\ldots$$

ψ, χ, ω sont des fonctions périodiques dépendant d'un argument

$$i\varepsilon at;$$

et il en résulte ainsi d'abord que $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ est une quantité de *troisième* ordre tandis que φ comme aussi a'_g, b'_g, ..., a'_k, ..., sont de deuxième ordre.

59. On observera maintenant que dans l'expression hydrodynamique de la pression (n° 41) la partie dominante de $p - p_0$ est toujours la pression d'influence. Cette pression partielle est en effet du troisième

ordre comme $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. La pression d'énergie composée est au contraire du quatrième ordre, et la pression de propagation même du sixième.

On aura donc, comme ailleurs, en n'ayant égard qu'au terme principal du développement:

$$p - p_0 = - q_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Et au moyen de l'équation empirique, on retrouvera

$$\text{(a)} \qquad a^2 \sigma = - \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

d'où il suit que la condensation sera une quantité du *troisième* ordre.

Maintenant revenons aussi à l'équation de continuité (n° 47), et voyons de quelle manière elle se simplifiera dans ces nouvelles circonstances. σ étant du troisième ordre, $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ par suite du quatrième, et a_g' etc. du deuxième ordre, on reconnaît que cette équation se réduira à la forme simple

$$\text{(b)} \qquad \Delta \varphi + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0,$$

pourvu toutefois que les termes du cinquième ordre soient négligés.

Des deux équations (a) et (b), que nous venons de retrouver, on conclura que sous les suppositions faites plus haut on aura

$$\text{(ab)} \qquad a^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

60. Il faut donc substituer ici la valeur de φ en l'exprimant par *trois* termes, par ceux du deuxième, du troisième et du quatrième ordre. Car dans l'équation (ab) le membre à gauche est du deuxième ordre et celui à droite du quatrième.

On posera donc

$$(1) \qquad \varphi = \varepsilon^2 a \psi + \varepsilon^3 a \chi + \varepsilon^4 a \omega,$$

où ψ, χ, ω doivent satisfaire aux équations différentielles

$$(2) \qquad \Delta \psi = 0, \qquad \Delta \chi = 0, \qquad \varepsilon^2 a^2 \Delta \omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

En écrivant plus simplement

$$\Phi = \varepsilon^2 a \psi, \quad \Phi_1 = \varepsilon^3 a \chi, \quad \Phi_2 = \varepsilon^4 a \omega$$

de sorte qu'on a

$$(1') \qquad \varphi = \Phi + \Phi_1 + \Phi_2,$$

on aura

$$(2') \qquad \Delta\Phi = 0, \quad \Delta\Phi_1 = 0, \quad a^2\Delta\Phi_2 = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}.$$

61. L'équation de condition relativement aux surfaces se décompose en même temps en trois équations

$$(3) \qquad \begin{gathered} \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial a_g}a'_g + \frac{\partial F}{\partial b_g}b'_g + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_k}a'_k + \ldots = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = 0; \end{gathered}$$

et ces équations subsistent pour tous les points des surfaces, c'est à dire tant que $F = 0$.

62. On déterminera donc les valeurs de Φ, Φ_1, Φ_2 au moyen des équations différentielles (2') et les conditions relatives aux surfaces; et l'on trouvera ainsi la valeur cherchée de φ (1').

On voit de plus que Φ et Φ_1 satisfont à l'équation de LAPLACE

$$\Delta = 0,$$

comme s'il s'agissait d'une question sur les liquides. Et nous ferons particulièrement remarquer que la valeur de Φ_1 est égale à zéro, ou, si elle en diffère, elle dépend dans tous les cas uniquement du temps.

Φ_2 satisfait à l'équation differentielle

$$\Delta\Delta = 0.$$

Et ordinairement cette fonction doit avoir un caractère binaire pour pouvoir satisfaire aussi à l'équation de condition. L'un des deux termes sera alors une intégrale de l'équation de LAPLACE.

63. On observera encore que les mouvements vibratoires qui se développent dans le fluide ne sont pas, de cette façon, déterminés d'une

manière assez correcte à moins que le point que l'on considère ne se trouve au commencement de la première onde.

Mais si la vitesse de propagation, a, a une valeur assez grande, rien n'empêche que l'espace au dedans duquel les mouvements du fluide doivent être étudiés et où nous supposons que tous les corps vibrants se trouvent, puisse avoir une étendue aussi grande que l'on veut, en même temps que les vitesses qui se produisent pourront acquérir une intensité quelconque. La durée des périodes pourra être choisie extrêmement courte, bien que les amplitudes restent toujours excessivement petites par rapport aux dimensions des corps.

64. Si maintenant on se borne à chercher *la partie dominante de la pression,* afin d'étudier le caractère vibratoire de la pression elle même, on peut s'arréter à la première approximation, et l'on se servira alors de l'équation

$$p - p_0 = - q_0 \frac{\delta \Phi}{\delta t}.$$

La question est donc la même que si l'on se l'était posée relativement à un liquide.

65. Si, au contraire, on cherche *la valeur moyenne de la pression* dynamique $p - p_0$, pour un point géométrique, on peut faire abstraction de la pression de fluxion, qui s'exprime comme une dérivée totale par rapport au temps. On partira donc d'une équation abrégée où se trouvent seulement la pression d'énergie kinétique et la pression de propagation. La première de celles-ci est du quatrième ordre, la seconde du sixième.

En y introduisant maintenant la valeur de φ, le potentiel partiel Φ_1, qui ne dépend que du temps et qui en même temps est du troisième ordre, ne jouera aucun rôle: on peut écrire simplement

$$p - p_0 = \ldots - \frac{1}{2} q_0 \left(\frac{\partial \Phi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial z^2} \right)$$
$$- q_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right) + \frac{q}{2a^2} \frac{\delta \Phi^2}{\delta t^2}.$$

Dans le membre à droite, les termes écrits dans la première ligne sont du quatrième ordre, ceux de la seconde du sixième. Tous les termes sont aussi proportionnels à a^2; d'où il suit qu'en choisissant a assez grand, on peut obtenir des pressions aussi fortes que l'on désire, quoiqu'on se soit arrêté à un point où l'on avait attribué à ε une valeur fixe extrêmement petite.

L'expression précédente se simplifie lorsqu'on met les termes du sixième ordre hors de considération. Tout se passe alors comme s'il s'agissait d'un liquide. — On arrive au même résultat si l'on fait tendre a vers l'infini, mais en sorte que $\varepsilon^2 a$ garde une valeur déterminée. Car alors Φ_2 s'annulle et il en est aussi de même avec la pression de propagation à cause du facteur $\frac{1}{a^2}$.

66. Au lieu de chercher la pression moyenne, on pourrait se proposer de déterminer *la force moyenne,* sollicitant un quelconque des corps, en raison des pressions qu'ils éprouvent pendant une période de vibration.

Alors il ne sera pas permis, en général, de partir de l'expression de la pression moyenne. Il ne faut pas exclure la pression de fluxion. Mais on aura une simplification d'une autre espèce en tant qu'on peut faire abstraction du potentiel partiel Φ_1 qui ne dépend que du temps, soit d'ailleurs que le temps y entre explicitement ou non. À cause de cela et puisqu'on doit rejeter tous les termes dont l'ordre est plus grand que le sixième, Φ_1 ne peut se présenter que dans la pression de fluxion. Et puisqu'ainsi il donne seulement lieu à des pressions partielles qui ne varient pas d'un point à un autre, il sera sans aucun effet pour produire de nouveaux mouvements.

L'équation abrégée de la pression dynamique $p - p_0$ s'écrira donc maintenant de la manière suivante, sans faire y entrer Φ_1:

$$
\begin{aligned}
p - p_0 = &- q_0 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_g} a'_g + \dots \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial z} \right) \right] \\
&- q_0 \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial a_g} a'_g + \dots \right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right) \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2a^2} \frac{\partial \Phi^2}{\partial t^2} \right] + \dots
\end{aligned}
$$

On réduit particulièrement au cas des liquides si on met hors de considération les termes de la seconde parenthèse, qui sont du sixième ordre.

Christiania, Juillet 1883.