DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CAUCHY.

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite

PAR

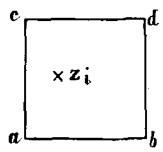
E. GOURSAT

à TOULOUSE.

Voici une démonstration du théorème de CAUCHY, qui me paraît un peu plus simple que les démonstrations habituelles. Elle repose uniquement sur la définition de la dérivée et sur cette remarque que les intégrales définies $\int dz$, $\int z dz$, prises le long d'un contour fermé quelconque, sont nulles.

Soit $f(z)$ une fonction de la variable complexe z, uniforme et continue, ainsi que sa première dérivée $f'(z)$, à l'intérieur d'une aire A limitée par un contour fermé C, simple ou multiple, et sur ce contour lui-même; j'admettrai de plus que ce contour a une *longueur* finie. Imaginons que l'on partage l'aire A en parties plus petites par des parallèles équidistantes à deux directions rectangulaires; l'intégrale $\int f(z)dz$, prise le long du contour total dans le sens direct, est égale à la somme des intégrales $\int f(z)dz$, prises dans le même sens le long du contour de chacune des parties en lesquelles on a subdivisé l'aire A. Il suffit de remarquer qu'en ajoutant ces dernières les parties de l'intégrale qui proviennent des lignes auxiliaires se détruisent, comme étant prises deux fois dans des sens différents, et il reste l'intégrale $\int f(z)dz$, prise le long du contour total. Soit C_i le contour de l'une de ces parties; on aura

$$(1) \qquad \int_{(C)} f(z)dz = \Sigma \int_{(C_i)} f(z)dz.$$



Les parties A_i sont de deux sortes; les unes sont des carrés, les autres sont limitées en partie par des lignes droites, en partie par des arcs du contour C. Je considère d'abord un carré, tel que $abdc$ et un point z_i à l'intérieur. Le long du contour de ce carré, on a

$$\frac{f(z) - f(z_i)}{z - z_i} = f'(z_i) + \varepsilon,$$

ou

$$f(z) = f(z_i) + f'(z_i)(z - z_i) + \varepsilon(z - z_i);$$

par suite

$$\int_{(C_i)} f(z)dz = [f(z_i) - z_i f'(z_i)] \int_{(C_i)} dz + f'(z_i) \int_{(C_i)} zdz + \int_{(C_i)} \varepsilon(z - z_i)dz.$$

Les deux premières intégrales étant nulles, d'après la remarque faite au début, il reste

$$\int_{(C_i)} f(z)dz = \int_{(C_i)} \varepsilon(z - z_i)dz.$$

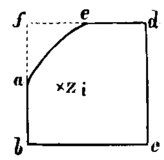
Soit l la distance de deux parallèles voisines et ε_i la valeur maximum du module de ε le long du contour du carré $abdc$; on sait que

$$\text{Mod}\left(\int_{(C_i)} f(z)dz\right) < \int_{(C_i)} \varepsilon_i l \sqrt{2} ds = 4\varepsilon_i l^2 \sqrt{2}.$$

En appelant a_i l'aire de ce carré, on aura

$$(2) \qquad \text{Mod}\left[\int_{(C_i)} f(z)dz\right] < 4\varepsilon_i \sqrt{2} a_i.$$

Prenons en second lieu un polygone curviligne tel que *abcde* et un point z_i à l'intérieur. On aura encore



$$\int_{(C_i)} f(z)\,dz = \int_{(C_i)} \varepsilon_i(z - z_i)\,dz,$$

et par suite

$$\text{Mod}\left[\int_{(C_i)} f(z)\,dz\right] < \varepsilon_i l\sqrt{2}\int_{(C_i)} dz < \varepsilon_i l\sqrt{2}(4l + \text{arc}\,ae)$$

ou

$$\text{Mod}\left[\int_{(C_i)} f(z)\,dz\right] < 4\varepsilon_i\sqrt{2}\,b_i + \varepsilon_i l\sqrt{2}\,\text{arc}\,ae, \tag{3}$$

en appelant encore ε_i la valeur maximum de ε et b_i l'aire du carré *abcdef*. En ajoutant toutes les inégalités (2) et (3) et désignant par η la valeur maximum des ε_i, on a *à fortiori*

$$\text{Mod}\left[\int_{(C)} f(z)\,dz\right] < \eta\sqrt{2}\{4\mathcal{A} + lS\},$$

où $\mathcal{A}$ désigne la somme des aires des carrés qui ont une partie à l'intérieur de l'aire A et S la longueur totale du contour C. On voit que le second membre est le produit d'un facteur qui a une limite supérieure finie par un facteur $\eta\sqrt{2}$ qui peut être rendu aussi petit qu'on le voudra. Or le premier membre a une valeur déterminée; donc on doit avoir

$$\int_{(C)} f(z)\,dz = 0.$$

A la vérité, la démonstration suppose, pour être rendue absolument rigoureuse, que l'on peut prendre la longueur l assez petite pour que tous les modules des quantités désignées par ε soient constamment moindres qu'un nombre donné à l'avance, aussi petit qu'on le voudra. C'est ce qui résulte des hypothèses faites sur $f(z)$ et sa dérivée. En effet, cette dérivée étant supposée continue à l'intérieur de l'aire A et sur le contour lui-même, on sait, qu'étant donnée une quantité positive σ, arbitrairement choisie, on pourra toujours trouver une autre quantité positive δ telle que

$$\operatorname{Mod}\left\{\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)\right\}<\sigma,$$

dès que le module de h ne surpasse pas δ, et cela pour toutes les valeurs de z considérées. Il suffira donc de prendre $l<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ pour qu'on soit sûr que les modules de toutes les quantités ε sont moindres que σ, et la démonstration devient entièrement rigoureuse.

Toulouse, Novembre 1883.