ZUR THEORIE DER

STETIGEN FUNKTIONEN EINER REELLEN VERÄNDERLICHEN[1]

VON

LUDWIG SCHEEFFER

in MÜNCHEN.

(Fortsetzung von B. 5, pag. 183—194.)

In dem ersten Teile dieser Arbeit haben wir einige Erweiterungen des bekannten Satzes bewiesen:

Wenn die Differentialquotienten zweier stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ überall endlich und einander gleich sind, so besteht die Gleichung

$$F(x) = f(x) + \text{const.}$$

Wir haben nämlich (§ 1) statt des Begriffes *Differentialquotient* vier allgemeinere Begriffe eingeführt, *vordere obere* (D^+), *vordere untere* (D_+), *hintere obere* (D^-) *und hintere untere* (D_-) *Ableitung*, und haben gezeigt, dass der Begriff *Differentialquotient* in dem obigen Satze durch jeden dieser vier allgemeineren Begriffe ersetzt werden kann. Dadurch entstand der Satz I:

Weiss man, dass zwischen den stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ für alle Punkte des Intervalles x_0x_1 die Relation

$$(1) \qquad DF(x) - Df(x) = 0$$

---

(1) Zwei inzwischen im 24ten Bande der Mathematischen Annalen erschienene Aufsätze der Herrn HARNACK und HÖLDER bieten mehrfach Berührungspunkte mit den vorliegenden Untersuchungen.

gilt, in welcher D eine der vier Ableitungen D^+, D_+, D^-, D_-, und zwar für alle Punkte dieselbe, bedeutet, so darf man schliessen, dass im ganzen Intervalle $x_0 x_1$

$$F(x) = f(x) + \text{const.} \tag{2}$$

sei.

Wir haben dann (§ 2—5) gezeigt, dass der Schluss auf das Bestehn der Gleichung (2) unter Umständen auch dann noch zulässig bleibt, wenn die Gültigkeit der Voraussetzung (1) nicht für alle Punkte des Intervalles $x_0 x_1$ gesichert ist, sei es, dass an gewissen Stellen die Grössen $DF(x)$ und $Df(x)$ beide unendlich gross werden, oder dass ihre Gleichheit nicht nachweisbar ist. Es reicht beispielsweise (§ 3 Satz II$_a$) zur Begründung der Relation (2) aus, dass die Gleichung (1) an allen Stellen x gilt, ausgenommen höchstens eine Menge P, deren abgeleitete Menge P' endlich oder abzählbar unendlich ist.

Man kann nun allgemein fragen:

In welchem Umfang, d. h. für wie viel Punkte x muss die Gleichung (1) *erfüllt sein, damit man — immer unter Voraussetzung der Stetigkeit von $F(x)$ und $f(x)$ — schliessen darf, dass auch die Gleichung* (2) *bestehe?*

Zur Beantwortung dieser Frage sind im Folgenden einige Untersuchungen angestellt, teils von der positiven, teils von der negativen Seite, von deren Ergebnissen wir als neu die nachfolgenden hervorheben:

Gilt die Gleichung (1) *für alle irrationalen Werte von x, so darf man schliessen, dass auch die Gleichung* (2) *besteht* (§ 1).

Ist dagegen die Gültigkeit der Gleichung (1) *nur für alle rationalen Werte von x nachgewiesen, so besteht nicht notwendig die Gleichung* (2). *Denn es giebt stetige Funktionen $\psi(x)$, die nicht durchaus constant sind und dennoch für alle rationalen x den Differentialquotienten Null haben; die Gleichung* (1) *wird also auch in dem verlangten Umfange befriedigt, wenn man $F(x) = f(x) + \psi(x)$ setzt* (§ 3).

Ehe jedoch wir in die Untersuchungen über diesen Gegenstand eintreten, sei es gestattet, nachträglich noch mit einigen Worten die Einführung der Begriffe D^+, D_+, D^-, D_- zu rechtfertigen und die Zweckmässigkeit derselben zu beleuchten.

Es scheint uns, dass diese Begriffe für eine folgerechte Darstellung der allgemeinen Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen vor dem Begriffe des Differentialquotienten den Vorzug besitzen, dass die Existenz derselben *a priori* für alle stetigen Funktionen gesichert ist, wie wir bei anderer Gelegenheit gezeigt haben, (1) während die Existenz eines Differentialquotienten an specielle Bedingungen geknüpft ist. Eine Beschränkung auf das Gebiet der differentiirbaren Funktionen und gleichzeitig die Einführung des Begriffes Differentialquotient wird, wie jede Beschränkung in einer allgemeinen Theorie, so lange thunlichst vermieden werden müssen, bis es sich herausstellt, dass dieselbe entweder zur Erreichung gewisser Resultate unumgänglich ist oder doch wesentliche Vereinfachungen der Betrachtung nach sich zieht. Dies ist weder bei den früher von uns angestellten, noch bei den hier folgenden Untersuchungen der Fall, und daher erscheint es uns angemessen, in denselben die allgemeinen Begriffe D^+, D_+, D^-, D_- beizubehalten.

Dagegen kommt man bei der weiteren Entwickelung der Theorie sehr bald an eine Stelle, wo das Aufgeben der allgemeinen Begriffe und die Einführung der speciellen zur Notwendigkeit wird. Und gerade dadurch, dass man die Einführung des *Differentialquotienten* bis zu diesem Punkte verschiebt, erreicht man den Vorteil, dass sich dieser neue Begriff nun ohne jede Willkürlichkeit und gleichsam von selbst ergiebt. Der Fall tritt ein, wenn man mit den abgeleiteten Funktionen D^+, D_+, D^-, D_- ähnliche Untersuchungen, wie mit den ursprünglichen vornehmen und daher gewisse Forderungen in Betreff ihrer Stetigkeit stellen will. Es zeigt sich nämlich erstens, dass, wenn eine der 4 abgeleiteten Funktionen, etwa $D^+f(x)$, nur Unstetigkeiten *erster Art* aufweist, d. h. wenn an allen Stellen Grenzwerte

$$\lim_{\varepsilon=0} D^+f(x+\varepsilon) \text{ und } \lim_{\varepsilon=0} D^+f(x-\varepsilon)$$

existiren, notwendig überall die Gleichungen

$$D^+f(x) = D_+f(x) \text{ und } D^-f(x) = D_-f(x)$$

bestehn; und zweitens, dass, wenn eine der abgeleiteten Funktionen durchaus stetig ist, durchweg die Gleichungen

$$D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) = D_-f(x)$$

(1) Acta Mathematica, B. 5, p. 52.

gelten.(¹) Führt man nun im ersten Falle für die paarweise einander gleichen Funktionen die Bezeichnungen $f'_+(x)$ und $f'_-(x)$, im zweiten Falle, da auch diese beiden Funktionen einander gleich sind, die Bezeichnung $f'(x)$ ein, so hat man die Begriffe *vorderer Differentialquotient, hinterer Differentialquotient* und *Differentialquotient* gewonnen. *Man gelangt also zu der Beschränkung auf differentiirbare Funktionen und zum Begriffe »Differentialquotient» ganz von selbst dadurch, dass man nur die Stetigkeit einer der abgeleiteten Funktionen verlangt.* Eine ohne Zweifel äusserst merkwürdige Thatsache!

Soviel über die Zweckmässigkeit der Begriffe D^+, D_+, D^-, D_- für die folgerechte Entwickelung der Theorie der stetigen Funktionen. Was die Nützlichkeit derselben für andere Untersuchungen betrifft, so sei es gestattet, auf einige unserer Theoreme über Rectificirbarkeit der Curven, besonders auf das Theorem IV (Acta Mathematica, B. 5, p. 62) hinzuweisen, aus welchem hervorgeht, dass von dem Verhalten der Ableitungen $D^+f(x)$, ... die Existenz der Länge einer durch die Gleichung $y = f(x)$ definirten Curve abhängen kann in Fällen, wo der Differentialquotient der Funktion $f(x)$ und mit ihm das Integral $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ völlig unbestimmt ist.

Wir gehn nun zu den eingangs angekündigten Untersuchungen über.

§ 1.

Satz IV (*Erweiterung des Satzes IIa*). *Wenn man von zwei im Intervalle x_0x_1 überall stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ weiss, dass die Gesammtheit der Stellen x, an denen die vorderen oberen Ableitungen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ (oder die vorderen unteren etc.) entweder nicht beide endlich*

(¹) Beide Sätze sind unmittelbar aus unserem Hülfssatz III (Acta Mathematica, B. 5, p. 190) abzuleiten; der zweite findet sich auch bei Dini (*Fondamenti*, p. 196, 3°).

oder nicht einander gleich sind, höchstens eine abzählbar unendliche Menge P bildet, so ist im ganzen Intervall

$$F(x) = f(x) + \textit{const.}$$

Beweis.

Es sei an allen Stellen des Intervalles $x_0 x_1$ mit Ausnahme der Punkte P

$$D^+ F(x) = D^+ f(x).$$

Wir bilden die Funktion

$$\varphi_c(x) = cx + F(x) - f(x),$$

in welcher c eine willkürliche positive Constante ist. Dann wird, wenn x kein Punkt der Menge P ist, notwendig

$$D^+ \varphi_c(x) \geqq c.$$

Der Beweis ist von p. 184 des ersten Teiles dieser Arbeit unmittelbar zu übertragen.

Wir behaupten, dass die Differenz

$$[F(x) - f(x)] - [F(x_0) - f(x_0)]$$

im Intervall $x_0 x_1$ an keiner Stelle negativ werden kann. Nehmen wir nämlich an, dass für $x = x'$ die Gleichung

$$[F(x) - f(x)] - [F(x_0) - f(x_0)] = -H$$

erfüllt wäre, wo H eine positive Grösse ist, so gelangen wir auf folgende Art zu einem Widerspruche.

Es sei $0 < \eta < H$, $C = \frac{H - \eta}{x' - x_0}$. Dann wird der Wert der Funktion $\varphi_c(x) - \varphi_c(x_0)$ an der Stelle $x = x'$ kleiner als $-\eta$ sein, falls nur die positive Constante c kleiner als C ist. Es wird folglich, da die Differenz $\varphi_c(x) - \varphi_c(x_0)$ für $x = x_0$ den Wert 0 hat, im Intervall $x_0 x'$ eine Stelle

x_c existiren, welche die obere Grenze aller derjenigen Punkte ist, an denen $\varphi_c(x) - \varphi_c(x_0) \geqq -\eta$ ist. An dieser Stelle x_c ist erstens

$$\varphi_c(x_c) - \varphi_c(x_0) = -\eta$$

wegen der Stetigkeit der Funktion $\varphi_c(x)$, und zweitens

$$\varphi_c(x_c + h) - \varphi_c(x_c) < 0$$

für alle Werte h zwischen 0 und $x' - x_c$, folglich auch $D^+\varphi_c(x_c) \leqq 0$. Der Punkt x_c muss also zur Menge P gehören, denn für alle anderen Punkte ist, wie vorher gezeigt, $D^+\varphi_c(x) \geqq c$. Geben wir der Constanten c einen anderen Wert c_1 so wird sich auf dieselbe Weise eine Stelle $x = x_{c_1}$ bestimmen lassen, und es ist leicht einzusehn, dass x_{c_1} nicht gleich x_c sein kann. Denn die Grösse x_c muss der Gleichung

$$\varphi_c(x) - \varphi_c(x_0) = -\eta,$$

die Grösse x_{c_1} der Gleichung

$$\varphi_{c_1}(x) - \varphi_{c_1}(x_0) = -\eta$$

genügen; jede dieser Gleichungen für sich zeigt, dass x nicht gleich x_0 sein kann; die durch Subtraktion der Gleichungen sich ergebende Relation kann daher nur erfüllt sein, wenn $c = c_1$ ist. Wir sehn hieraus, dass nicht nur jedem Werte von c, der zwischen 0 und C liegt, ein bestimmter Wert x_c aus der Menge P entspricht, sondern dass auch verschiedenen Werten von c immer verschiedene Werte von x_c entsprechen. Dies ist aber mit der Voraussetzung, dass die Menge P höchstens abzählbar unendlich sein sollte, unvereinbar. Denn denken wir uns die sämmtlichen Werte von x, die zur Menge P gehören, in eine einzige Reihe geordnet und bilden aus dieser eine neue Reihe $\overline{P}$, indem wir ordnungsmässig alle diejenigen Elemente der ersten Reihe auswählen, welche irgend einem Werte von c als zugehöriges x_c entsprechen, so müsste jedem zwischen 0 und C gelegenen Werte von c ein Element der Reihe $\overline{P}$ und jedem Element der Reihe $\overline{P}$ ein Wert von c entsprechen, d. h. es würde eine gegenseitig eindeutige Correspondenz stattfinden zwischen den Elementen der abzählbaren Menge $\overline{P}$ einerseits und den Elementen der continuirlichen

Wertmenge c andererseit. Herr G. CANTOR hat aber (BORCHARDT's Journal, B. 77, p. 260) in aller Strenge bewiesen, dass eine derartige Zuordnung unmöglich ist.

Die Annahme

$$[F(x') - f(x')] - [F(x_0) - f(x_0)] = - H$$

enthält also einen Widerspruch gegen die Voraussetzung. Durch Vertauschung von F und f wird unmittelbar ersichtlich, dass auch die Annahme

$$[F(x') - f(x')] - [F(x_0) - f(x_0)] = H$$

unzulässig ist. Es muss daher für jeden Wert von x'

$$[F(x) - f(x)] - [F(x_0) - f(x_0)] = 0$$

sein, womit der Satz IV vollständig bewiesen ist.

Der Satz IV ist weit allgemeiner, als die bisher bekannten Sätze dieser Art, speciell weit allgemeiner, als unser Satz II_a, der in jenem enthalten ist.

Soviel wir wissen, hat man sich bisher im Wesentlichen darauf beschränkt, sogenannte »Punktmengen erster Art» als Ausnahmestellen anzunehmen, indem man nachwies, dass die Gleichheit zweier stetigen Funktionen — abgesehn von einer additiven Constante — aus der Gleichheit der Ableitungen gefolgert werden darf, wenn die Stellen, wo diese Ableitungen unendlich gross sind, höchstens eine Menge »erster Art» bilden. Unter ein Menge »erster Art» wird jede Menge verstanden, deren successive abgeleitete Mengen von einer bestimmten endlichen Ordnung ab verschwinden.

Unser Satz II_a enthielt die Erweiterung von den Mengen »erster Art» auf alle »reduktibeln» Mengen. Unter »reduktibeln» Mengen verstehn wir — mit Herrn G. CANTOR — diejenigen, deren erste abgeleitete Menge abzählbar ist, oder, was dasselbe ist, diejenigen, deren successive abgeleitete Mengen von einer bestimmten Ordnung α ab verschwinden, wo α eine endliche oder eine überendliche Zahl der zweiten Zahlenklasse ist.([1])

Herr CANTOR hat gezeigt,([2]) dass alle Mengen erster Art und überhaupt alle reduktibeln Mengen abzählbar sind, während durchaus nicht alle abzählbaren Mengen reduktibel sind. Aus dem eben bewiesenen Satze IV geht nun hervor, dass nicht die Reduktibilität, sondern die Abzählbarkeit der Menge P in unserem Falle das Wesentliche ist. Und es ist bemerkenswert, dass der Satz IV, gerade weil er nur diese *wesentliche* Eigenschaft der Menge P enthält, sich einfacher hat beweisen lassen, als der Satz II_a, obwohl der letztere weniger umfassend und ganz und gar in jenem enthalten ist.

Als Anwendung des Satzes IV heben wir den Fall hervor, dass für die Menge P die Menge aller rationalen Zahlen genommen wird, die nach CANTOR (BORCHARDT's Journal, B. 77, p. 258) abzählbar ist. Man erhält dann den Satz:

Wenn man von zwei stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ weiss, dass die vorderen oberen Ableitungen (oder die vorderen unteren etc.) für alle irrationalen Werte von x endlich und einander gleich sind, so unterscheiden sich die Funktionen nur durch eine additive Konstante;

und weiter:

Eine stetige Funktion, die für alle irrationalen Werte von x den Differentialquotienten Null hat, ist eine Konstante.

Es folgt hieraus z. B. unmittelbar, dass für die RIEMANN'sche Funktion ([3])

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

nur eine einzige Funktion existiren kann, welche die charakteristischen Eigenschaften des Integrales

$$\int_0^x F(x)\,dx$$

([1]) Acta Mathematica, B. 2, p. 409, Theoreme B und C.

([2]) Mathematische Annalen, B. 21, p. 53, Theorem II.

([3]) *Ueber die Darstellbarkeit e. F. d. e. trigon. R.* Ges. Werke, p. 228.

hat, an der Stelle $x = 0$ zu verschwinden und an allen Stellen, wo $F(x)$ stetig ist, den Differentialquotienten $F(x)$ zu besitzen. Denn $F(x)$ ist jedenfalls für alle irrationalen Werte von x stetig, und damit ist bereits die Bedingung für die Anwendbarkeit der vorstehenden Sätze erfüllt. Ueberhaupt dürfte der Satz IV weitaus für die meisten Fälle hinreichen, wo man sonst auf den schwerfälligen Satz $\mathrm{II_a}$ (resp. die bereits früher bekannten Analoga desselben) angewiesen war.

§ 2.

Die Frage, deren Beantwortung wir eingangs als das Ziel unserer Untersuchungen hingestellt haben, lautete: In welchem Umfange muss die Gleichung $D^+F(x) - D^+f(x) = 0$ erfüllt sein, damit der Schluss $F(x) - f(x) = const.$ gezogen werden darf?

Diese Frage würde als vollständig beantwortet anzusehn sein, wenn sich im Anschluss an den Satz IV Folgendes nachweisen liesse: Bedeutet P eine im Intervall x_0x_1 beliebig gegebene Menge von Werten x, deren Mächtigkeit *höher, als diejenige der abzählbaren Mengen ist,* so existiren immer stetige Funktionen $\phi(x)$, welche nicht im ganzen Intervall x_0x_1 constant sind und dennoch an allen Stellen, die nicht zur Menge P gehören, den Differentialquotienten Null besitzen.

Der Nachweis der Existenz solcher Funktionen $\phi(x)$ ist uns indes nicht in voller Allgemeinheit, sondern nur unter der Voraussetzung gelungen, dass die Menge P entweder selbst »*perfekt*» ist oder doch einen »*perfekten*» Bestandteil enthält. Die von uns aufgeworfene Frage wird also im Folgenden nicht vollständig erledigt; denn es bleibt der Fall übrig, dass die Menge P von höherer als der ersten Mächtigkeit ist, ohne einen perfekten Bestandteil zu enthalten. Freilich ist es zweifelhaft, ob solche Mengen überhaupt vorkommen können; Beispiele dieser Art dürften wenigstens bisher nicht bekannt sein. Sollte es sich daher in der weiteren Entwickelung der Mengenlehre herausstellen, dass wirklich jede Punktmenge, deren Mächtigkeit höher als diejenige der abzählbaren Mengen ist, einen perfekten Bestandteil enthält, so würde damit gleichzeitig der letzte Schritt zur Beantwortung unserer Frage gethan sein.

Bei dem gegenwärtigen Standpunkte der Theorie muss jedenfalls die Bedingung, dass die nicht abzählbare Menge P einen perfekten Bestandteil enthalten solle, ausdrücklich angegeben werden.

Eine »*perfekte*» Menge ist nach der Definition von Herrn CANTOR eine solche, welche ihrer ersten abgeleiteten Menge gleich ist. Sie wird allgemein gegeben vermittelst einer endlichen oder unendlichen Reihe von Intervallen $i_1, i_2, \ldots$, die so gewählt sein müssen, dass sie einander sämmtlich ausschliessen und auch nicht mit ihren Endpunkten an einander stossen. Es bilden nämlich bei beliebiger Annahme solcher Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ diejenigen Punkte, welche im Inneren keines einzigen Intervalles liegen, stets eine perfekte Menge, und umgekehrt lässt sich zu jeder anderswie definirten perfekten Menge eine Reihe von Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ bestimmen, von denen die Menge in der angegebenen Weise abhängt.

Eine perfekte Menge wird beispielsweise gebildet durch die Gesammtheit aller derjenigen Zahlen, die sich als endliche oder unendliche Decimalbrüche so schreiben lassen dass die Ziffer 5 nicht vorkommt. Die Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ sind in diesem Falle, wenn wir nur die Strecke von 0 bis 1 berücksichtigen, folgendermassen durch ihre Anfangspunkte $\xi_1, \xi_2, \ldots$ und ihre Endpunkte $\xi'_1, \xi'_2, \ldots$ gegeben. Erstere sind die sämmtlichen endlichen Decimalbrüche, die mit einer 5 abschliessen, ohne dass eine solche schon vorher auftritt; letztere entstehn aus den ersteren, indem man die 5 in eine 6 verwandelt. Die $\xi_1, \xi_2, \ldots$, welche als Anfangspunkte der Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ noch zu der perfekten Menge gehören, erfüllen die in der Definition gestellte Forderung, keine 5 zu enthalten, wenn man $499\ldots$ statt 5 schreibt.

Es sei nun zwischen x_0 und x_1 eine beliebige perfekte Menge P gegeben. Wir stellen uns die Aufgabe, eine durchaus stetige Funktion zu bilden, die, ohne im ganzen Intervall konstant zu sein, doch nur an Punkten der gegebenen Menge P einen von Null verschiedenen Differentialquotienten besitzt.

Ist die Menge P in irgend einem Intervall der Strecke x_0x_1 »überall dicht», so füllt sie dieselbe, da sie perfekt ist, stetig aus. In diesem Falle liegt die Lösung unserer Aufgabe auf der Hand. Wir nehmen also an, die Menge P sei in keinem Intervalle »überall dicht», eine Eigenschaft, welche unter anderen auch der vorher als Beispiel angeführten Menge zukommt.

Unter dieser Annahme ist die gestellte Aufgabe für einige specielle Mengen bereits in unseren Untersuchungen über Rectification, ganz allgemein aber von Herrn CANTOR (Acta Mathematica, T. 4, p. 385) gelöst. Wir geben im Folgenden ein Verfahren, welches vielleicht etwas anschaulicher als dasjenige von CANTOR ist und überdies für die im nächsten § folgenden Anwendungen einige Vorteile bietet.

Zu dem Zwecke bezeichnen wir die Anfangs- und Endpunkte der Intervalle $i_1, i_2, \ldots$, durch welche die perfekte Menge P bestimmt ist, resp. mit $\xi_1, \xi_2, \ldots$ und $\xi'_1, \xi'_2, \ldots$. Die i_ν, ξ_ν, ξ'_ν bilden *unendliche* Reihen, da sonst die Menge P ganze Intervalle stetig ausfüllen würde. Wir denken uns diese Reihen auf irgend eine Weise geordnet, z. B. nach der Länge der Intervalle i_ν und im Falle der Gleichheit mehrerer Längen nach der Grösse der entsprechenden ξ_ν. Jedem Intervalle i_ν ordnen wir zwei andere i'_ν und i''_ν zu, indem wir mit i'_ν dasjenige der $\nu - 1$ vorhergehenden Intervalle $i_1, i_2, \ldots, i_{\nu-1}$ bezeichnen, welches dem i_ν zunächst links liegt, mit i''_ν dasjenige, welches dem i_ν zunächst rechts liegt; resp. jedesmal, wenn i_ν das am weitesten links gelegene der ν Intervalle $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ ist, mit i'_ν den Punkt x_0, und wenn i_ν das am weitesten rechts gelegene Intervall ist, mit i'_ν den Punkt x_1.

Die Funktion $\psi(x)$ definiren wir nun der Reihe nach für die einzelnen Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ folgendermassen. Die Werte $\psi(x_0)$ und $\psi(x_1)$ werden willkürlich, aber von einander verschieden angenommen. Für alle Punkte des Intervalles i_1 (einschliesslich ξ_1 und ξ'_1) sei

$$\psi(x) = \psi(i_1) = \frac{1}{2}[\psi(x_0) + \psi(x_1)],$$

und allgemein für die Punkte des intervalles i_ν (einschliesslich ξ_ν und ξ'_ν)

$$\psi(x) = \psi(i_\nu) = \frac{1}{2}[\psi(i'_\nu) + \psi(i''_\nu)].$$

Jeder Wert x, der in keinem der Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ liegt, hat die Eigenschaft, dass in jeder Nähe desselben unendlich viele jener Intervalle liegen; denn die gegebene perfekte Menge ist nach Voraussetzung in keiner Strecke »überall dicht». Wir ordnen jedem derartigen Werte von x eine unendliche Reihe von Intervallen $i^x_1, i^x_2, \ldots$ zu, indem wir $i^x_1 = i_1$ setzen und allgemein $i^x_{\nu+1}$ als das erste Intervall der Reihe $i_1, i_2, \ldots$ definiren, welches zwischen i_ν^x und x liegt. Dann ist offenbar $x = \lim_{\nu=\infty} \xi_\nu^x = \lim_{\nu=\infty} \xi_\nu'^x$, und wir definiren nun $\psi(x)$ durch die Gleichung $\psi(x) = \lim_{\nu=\infty} \psi(i_\nu^x)$. Dass nämlich der Grenzwert auf der rechten Seite existirt, folgt daraus, dass die Differenz $\psi(i_{\nu+1}^x) - \psi(i_\nu^x)$ für alle Werte von ν dasselbe Vorzeichen hat.

Die Funktion $\psi(x)$ ist jetzt für alle Punkte des Intervalles $x_0 x_1$ eindeutig definirt. Wir beweisen — was übrigens, wenn man die Curve $y = \psi(x)$ betrachtet, direkt aus der Anschauung folgt —, dass $\psi(x)$ durchaus stetig ist. Nach beliebiger Annahme der Zahl n kann nämlich eine Zahl m_n jederzeit so bestimmt werden, dass die Strecke $x_0 x_1$ durch die Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m_n}$ und $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_{m_n}'$ in Intervalle geteilt wird, in deren jedem die Differenz zwischen Anfangs- und Endwert von $\psi(x)$ höchstens gleich $\frac{\psi(x_1) - \psi(x_0)}{2^n}$ ist. Denn angenommen, es wäre zu der Zahl n eine solche Zahl m_n bestimmt, so brauchen wir m_{n+1} nur so gross anzunehmen, dass zwischen je zweien der Intervalle $x_0, i_1, i_2, \ldots, i_{m_n}, x_1$ mindestens eins der Intervalle $i_{m_n+1}, i_{m_n+2}, \ldots, i_{m_{n+1}}$ liegt. Dann wird nämlich für jede neu entstandene Teilstrecke die Differenz zwischen Anfangs- und Endwert nach der Definition der Funktion $\psi(x)$ höchstens halb so gross, als für die ursprünglichen Teilstrecken, d. h. höchstens gleich $\frac{\psi(x_1) - \psi(x_0)}{2^{n+1}}$ sein. Es wird also, da für $n = 1$ offenbar $m_n = 1$ gesetzt werden darf, in der That für jedes n die Zerlegung der Strecke $x_0 x_1$ in Teilstrecken möglich sein, in deren jeder die Differenz zwischen Anfangs- und Endwert der Funktion $\psi(x)$ höchstens gleich $\frac{\psi(x_1) - \psi(x_0)}{2^{n+1}}$ ist. Hieraus folgt unmittelbar die Stetigkeit von $\psi(x)$, wenn noch berücksichtigt wird, dass diese Funktion durchaus monoton ist und daher in jedem Intervall nur solche Werte annehmen kann, die zwischen dem Anfangs- und Endwerte liegen.

Die Funktion $\psi(x)$ erfüllt, wie wir jetzt erkennen, alle gestellten Forderungen: *sie ist stetig, ist nicht im ganzen Intervall $x_0 x_1$ constant und besitzt an allen Stellen, die nicht zu der gegebenen perfekten Menge P gehören, den Differentialquotienten Null. Hiermit ist allgemein nachgewiesen, dass der Schluss $F(x) - f(x) = const.$ unstatthaft wird, sobald die Gesammtheit der Stellen, für welche die Gültigkeit der Gleichung $DF(x) - Df(x) = 0$*

(oder auch der Gleichung $F'(x) - f'(x) = 0$) nicht nachweisbar ist, als Bestandteil eine perfekte Menge P enthält; denn legen wir bei der Bildung der Funktion $\psi(x)$ eben diese Menge P zu Grunde, so ist auch unter der Annahme $F(x) - f(x) = \psi(x)$ die Gleichungen $DF(x) - Df(x) = 0$ (resp. $F'(x) - f'(x) = 0$) in dem geforderten Umfang erfüllt.

Hat die perfekte Menge P einen von 0 verschiedenen Inhalt $\mathfrak{J}$, d. h. ist die Summe der Längen der Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ kleiner als $x_1 - x_0$, so kann man mit Cantor einfacher

$$\psi(x) = \mathfrak{J}(x) = (x - x_0) - \sum_{(x_0)}^{(x)} i_\nu$$

setzen, wo die Summe sich auf alle diejenigen Intervalle i_ν resp. Bestandteile solcher Intervalle erstreckt, welche sich zwischen x_0 und x befinden. Diese Funktion hat die Eigentümlichkeit, dass der Wert des Quotienten $\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h}$ für alle Werte von x und h zwischen 0 und 1 liegt, dass also keine der 4 Ableitungen D^+, D_+, D^-, D_- jemals kleiner als 0 oder grösser als 1 wird. *Hieraus folgt, dass wenn die Gesammtheit der Stellen, für welche die Gültigkeit der Gleichung $DF(x) - Df(x) = 0$ (resp. $F'(x) - f'(x) = 0$) nicht nachweisbar ist, als Bestandteil eine perfekte Menge mit von Null verschiedenem Inhalt besitzt, der Schluss $F(x) - f(x) = 0$ selbst dann unzulässig bleibt, wenn man von den Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ ausserdem noch weiss, dass ihre Ableitungen durchweg unter einer bestimmten endlichen Grenze liegen sollen.*

§ 3.

Wir wollen aus den im vorigen § angestellten Betrachtungen einige weitere Schlüsse ziehn. Zu dem Zwecke brauchen wir folgenden

Hülfssatz aus der Mengenlehre. Es sei P eine beliebige perfekte Menge, welche in keinem Intervall überall dicht ist, R eine beliebige abzählbare Menge. Subtrahirt man von allen Elementen der Menge P eine Konstante a, so entsteht eine aus den Werten $x - a$ gebildete neue Menge P_a. Es lässt sich dann die Konstante a zwischen beliebig gegebenen Grenzen immer so bestimmen, dass die Menge P_a keinen einzigen Wert der Menge R enthält.

Beweis.

Wir bezeichnen wieder die Reihe der für die perfekte Menge P charakteristischen Intervalle in bestimmter Ordnung mit $i_1, i_2, \ldots$, die Anfangspunkte mit $\xi_1, \xi_2, \ldots$, die Endpunkte mit $\xi'_1, \xi'_2, \ldots$; die Elemente der abzählbaren Menge R seien, ebenfalls in bestimmter Ordnung, $x_1, x_2, x_3, \ldots$; c_1 und c'_1 ($c'_1 > c_1$) seien die willkürlich gegebenen Grenzen, zwischen denen die Konstante a liegen soll. Wir betrachten nun das Intervall von $x = x_1 + c_1$ bis $x = x_1 + c'_1$. Entweder ist dieses Intervall gänzlich in einem der Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ enthalten resp. fällt mit einem solchen zusammen, in diesem Falle setzen wir $c_2 = c_1$, $c'_2 = c'_1$; oder es giebt unter den Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ solche, die sammt ihren Grenzen ganz und gar im Innern der Strecke $(x_1 + c_1,\ x_1 + c'_1)$ liegen, in diesem Falle setzen wir, wenn i_{k_1} das erste derartige Intervall der Reihe $i_1, i_2, \ldots$ ist, $c_2 = \xi_{k_1} - x_1$, $c'_2 = \xi'_{k_1} - x_1$. (¹) Wir betrachten nun zweitens das Intervall von $x = x_2 + c_2$ bis $x = x_2 + c'_2$. Auch dieses Intervall ist entweder gänzlich in einem der Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ enthalten resp. fällt mit einem solchen zusammen, in diesem Falle setzen wir $c_3 = c_2$, $c'_3 = c'_2$; oder es giebt unter den Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ solche, die sammt ihren Grenzen ganz und gar im Inneren der Strecke $(x_2 + c_2,\ x_2 + c'_2)$ liegen, in diesem Falle setzen wir, wenn i_{k_2} das erste derartige Intervall der Reihe $i_1, i_2, \ldots$ ist, $c_3 = \xi_{k_2} - x_2$, $c'_3 = \xi'_{k_2} - x_2$. Durch Fortsetzung dieses Processes erhalten wir zwei unendliche Reihen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ und $c'_1, c'_2, c'_3, \ldots$ von der Art, dass für jedes ν $c'_\nu > c_\nu$ und ausserdem entweder gleichzeitig $c_{\nu+1} > c_\nu$ und $c'_{\nu+1} < c'_\nu$ oder gleichzeitig $c_{\nu+1} = c_\nu$ und $c'_{\nu+1} = c'_\nu$ ist. Die Elemente beider Reihen haben daher für $\nu = \infty$ bestimmte Grenzwerte c und c', und zwar wird in dem Falle, dass $c = c'$ ist, diese Grösse *grösser* als *alle* c_ν und *kleiner* als *alle* c'_ν sein. Nehmen wir jetzt die Konstante a zwischen c und c' an, resp. gleich c und c', falls diese beiden Grössen einander gleich sind, so ist diese Konstante unter allen Umständen grösser als *alle* c_ν und kleiner als *alle* c'_ν, d. h. es werden alle

(¹) Ein dritter Fall kann nicht eintreten; denn wenn unter den Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ sich ein solches befindet, dessen einer Endpunkt mit einem der Punkte $x_1 + c_1$ oder $x_1 + c'_1$ zusammenfällt, während der andere Endpunkt zwischen diesen beiden Stellen liegt, so giebt es immer auch solche Intervalle i_ν, die mit ihren beiden Endpunkten ganz und gar im Inneren der Strecke $(x_1 + c_1,\ x_1 + c'_1)$ liegen.

Grössen $c_\nu - a$ negativ und alle Grössen $c'_\nu - a$ positiv. Nun sind für jeden Wert von ν alle inneren Punkte der Strecke von $x = x_\nu + c_{\nu+1}$ bis $x = x_\nu + c'_{\nu+1}$ zugleich innere Punkte eines der für die Menge P charakteristischen Intervalle $i_1, i_2, \ldots$; alle inneren Punkte der Strecke von $x = x_\nu + c_{\nu+1} - a$ bis $x = x_\nu + c'_{\nu+1} - a$ sind folglich zugleich innere Punkte eines der für die Menge P_a charakteristischen Intervalle; es wird also auch der Punkt x_ν selbst im Inneren eines der für die Menge P_a charakteristischen Intervalle liegen, d. h. nicht zur Menge P_a gehören. W. z. b. w.

Aus dem eben bewiesenen Satze geht z. B. hervor, dass es perfekte Mengen giebt, die nur aus irrationalen Werten bestehn; denn die rationalen Zahlen bilden eine abzählbare Menge R, und wir erhalten daher eine Menge von der gewünschten Art durch Verminderung aller Elemente einer beliebig gegebenen perfekten Menge P (die nur in keinem Intervall überall dicht sein darf) um eine geeignete Konstante a.

Verbinden wir diese Resultate mit denjenigen des vorhergehenden §, so ergiebt sich Folgendes:

Ist $\phi(x)$ irgend eine stetige Funktion von der im vorigen § angegebenen Art, d. h. eine solche, die, ohne durchaus konstant zu sein, doch an allen Stellen mit Ausnahme der perfekten Menge P den Differentialquotienten Null hat, so lässt sich eine Konstante a zwischen zwei beliebigen Grenzen c_1 und c'_1 so bestimmen, dass die Funktion $\phi(x + a)$ jedenfalls an allen Stellen, die zu der willkürlich gegebenen abzählbaren Menge R gehören, den Differentialquotienten Null besitzt.

Insbesondere gilt der Satz wenn man für R die Menge aller rationalen Zahlen nimmt.

Legt man eine perfekte Menge P mit von Null verschiedenem Inhalt $\mathfrak{J}$ zu Grunde und setzt $\phi(x) = \mathfrak{J}(x)$, so hat die Funktion $\phi(x + a)$ überdies die Eigenschaft, an allen Stellen durchaus endliche Ableitungen zu besitzen, da allgemein $0 \leqq \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \leqq 1$ ist.

Ist daher zwischen zwei stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ die Relationen $DF(x) - Df(x) = 0$ resp. $F'(x) - f'(x) = 0$ nur für eine abzählbare Menge von Punkten, etwa für alle rationalen Werte von x, nachgewiesen, so darf man nicht schliessen, dass $F(x) - f(x) =$ const. sei, selbst dann nicht, wenn man von den Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ ausserdem noch weiss, dass ihre Ableitungen überall unterhalb einer bestimmten endlichen Grenze *liegen; denn alle diese Bedingungen werden auch für $F(x)-f(x)=\psi(x+a)$ erfüllt.*

Wir wollen den Fall, dass R die Menge aller rationalen Zahlen bedeutet, noch etwas näher ins Auge fassen. Nimmt man bei der im vorigen § angegebenen Konstruktion der Funktion $\psi(x)$ für $\psi(x_0)$ und $\psi(x_1)$ rationale Werte an, so wird die Funktion überhaupt an allen nicht zur Menge P gehörigen Stellen rationale Werte besitzen. Die Funktion $\psi(x+a)$ wird also für alle rationalen x selbst rational sein. Man erhält für jedes gegebene rationale $x=x_\nu$ den Wert von $\psi(x_\nu+a)$ durch eine *endliche* Anzahl von Operationen, was wir ausdrücklich hervorheben. Denn nachdem die Lage und Reihenfolge der Intervalle $i_1, i_2, \ldots$, die Reihenfolge aller rationalen Zahlen $x_1, x_2, \ldots$, und die Werte der beiden Konstanten c_1 und c_1' einmal festgesetzt sind (übrigens willkürlich), braucht man nur die ν Intervalle $i_{k_1}, i_{k_2}, \ldots, i_{k_\nu}$ nach einander zu bestimmen und $\psi(i_{k_\nu})$ zu berechnen; dann ist offenbar $\psi(x_\nu+a)=\psi(i_{k_\nu})$.

Es ist hiernach möglich, der Menge aller rationalen Werte $x_1, x_2, \ldots$ rationale Werte $y_1, y_2, \ldots$ so zuzuordnen, dass zu jedem x_ν das entsprechende y_ν durch eine endliche Anzahl von Operationen gefunden wird, und dass zugleich die Gesammtheit der Werte y eine stetige Funktion von x darstellt, deren Differentialquotient an allen rationalen Stellen gleich Null ist.

§ 4.

Die irrationalen Zahlen werden von einigen Mathematikern aus dem Gebiete der Analysis ausgeschlossen. Da indes die gewöhnlichen Methoden, welche bei Begründung der Principien der Integralrechnung angewendet zu werden pflegen, wesentlich auf Heranziehung irrationaler Zahlen beruhen, wird durch die Ausschliessung derselben eine neue Prüfung jener Principien notwendig. Für diesen Zweck sind die in dem vorhergehenden Paragraphen angestellten Untersuchungen von Wichtigkeit.

In einer Theorie, welche sich auf Betrachtung rationaler Werte des Arguments beschränkt, ist zunächst dem gewöhnlichen Stetigkeitsbegriff vorweg die Bedeutung der *gleichmässigen Stetigkeit in jedem beliebigen Intervall* beizulegen. Denn sonst würde man z. B. eine Funktion, die für

$x < \sqrt{3}$ gleich o, für $x > \sqrt{3}$ gleich 1 ist, *stetig* nennen müssen, da dieselbe in der That für alle rationalen x stetig ist, ohne freilich in jedem Intervall *gleichmässig* stetig zu sein.

Die in dem vorigen Paragraph angestellten Untersuchungen zeigen nun aber weiter, dass auch der gewöhnliche Begriff der *Differentiirbarkeit* einer Funktion für viele Zwecke unzureichend ist und einer weiteren Bestimmung bedarf, sobald man das Argument beschränkt.

Für die Lösung aller Probleme, welche von der Integration von Differentialgleichungen abhängen, ist nämlich der Satz wesentlich, dass aus der allgemeinen Gültigkeit der Gleichung $f'(x) = 0$ der Schluss $f(x) =$ const. gezogen werden darf, wenn $f(x)$ stetig angenommen wird. Dieser Satz wird aber nach § 3 bei Beschränkung auf rationale Argumente hinfällig. Die Hinzufügung der Forderung, dass der Quotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ sich für alle Werte von x und h unterhalb einer bestimmten endlichen Grenze halten solle (d. h. im Wesentlichen, dass der Differentialquotient auch für alle irrationalen x endlich bleibe), würde nichts ändern; denn wir haben gesehn, dass es auch solche Funktionen giebt, welche, ohne durchaus konstant zu sein, für alle rationalen x den Differentialquotienten Null besitzen und überdies ganz allgemein die Relation $0 \leqq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < 1$ erfüllen.

Man könnte, um über diese Schwierigkeit hinwegzukommen, für die Funktion $f(x)$ vorweg eine bestimmte Form, etwa die Form einer Potenzreihe, annehmen. Eine solche Annahme würde jedoch in vielen Fällen, besonders bei Problemen der angewandten Mathematik, willkürlich und darum unzulässig erscheinen müssen.

Ein besseres Auskunftsmittel gewinnt man durch Einführung eines neuen Begriffes anstatt des gewöhnlichen Begriffes der *Differentiirbarkeit* einer Funktion.

Eine Funktion $f(x)$ heisse »*in einem Intervalle i gleichmässig differentiirbar*», wenn nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse δ immer eine Grösse h so bestimmt werden kann, dass die Relation

$$\left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - \frac{f(x'') - f(x)}{x'' - x} \right| < \delta$$

für alle dem Intervall i angehörigen Werte von x, x', x'' erfüllt ist, welche den Bedingungen $|x'-x| < h$ und $|x''-x| < h$ genügen. (1)

Man erkennt leicht, dass, wenn man die Funktion $f(x)$ nicht nur gleichmässig stetig, sondern auch gleichmässig differentiirbar annimmt, der Schluss von der Gleichung $f'(x) = 0$ auf die Gleichung $f(x) = const.$ auch bei Beschränkung auf rationale Werte des Arguments noch zulässig ist. Ja er bleibt selbst dann noch gültig, wenn von dem Gebiete der gleichmässigen Differentiirbarkeit gewisse Stellen ausgeschlossen sind, die in ihrer Gesammtheit eine reduktible Menge (2) bilden, in der Art, dass die Funktion nur in denjenigen Intervallen gleichmässig differentiirbar angenommen wird, welche keinen solchen Punkt enthalten und auch nicht an einen solchen grenzen. Man kann in diesem Falle kurz sagen, die Funktion sei *nach Ausschluss einer reduktibeln Punktmenge gleichmässig differentiirbar.*

Wir gewinnen also folgendes Resultat: *Bei Beschränkung auf rationale Argumente ist das durch die gewöhnlichen Schlüsse gewonnene Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung, welches eine willkürliche Konstante enthält, nur dann als das vollständige anzusehn, wenn man von der unbekannten Funktion ausser der Erfüllung der Differentialgleichung noch verlangt, dass sie gleichmässig stetig und nach Ausschluss höchstens einer reduktibeln Punktmenge gleichmässig differentiirbar sei. Lässt man eine dieser Forderungen fallen, so giebt es noch andere Integrale der gegebenen Differentialgleichung.*

Meran, April 1884.

---

(1) Auf den Begriff der »*gleichmässigen Differentiirbarkeit*» ist Verf. gesprächsweise von Herrn Prof. KRONECKER hingewiesen worden.

(2) Cf. § 1.