ZUR THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNCTIONEN

VON

C. RUNGE
in BERLIN.

In den Monatsberichten der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Sitzung vom 12. August 1880, hat Herr WEIERSTRASS gezeigt, dass eine Summe von Potenzreihen mit gemeinsamen Convergenzbereich, soweit sie gleichmässig convergent ist, eine monogene analytische Function darstellt. Es ist aber die Frage offen gelassen, ob diese gleichmässige Convergenz nothwendig ist, damit eine monogene analytische Function dargestellt werde. Im Folgenden soll an einem Beispiel einer Summe von ganzen rationalen Functionen gezeigt werden, dass die gleichmässige Convergenz eines Ausdrucks nicht nothwendig ist, sondern dass dieselbe auf irgend welchen Linien in der Ebene der complexen Zahlen aufhören kann, während der Ausdruck dennoch überall convergirt und eine monogene analytische Function darstellt.

Der Ausdruck

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n(nx-1)}$$

convergirt für alle Werthe von x und ist gleich Null. Denn ist x von Null verschieden, so wird für einen hinreichend grossen Werth von n $|nx-1|$ beliebig gross. Ist aber x gleich Null, so haben wir

$$\lim_{n=\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$$

und das ist ebenfalls gleich Null.

Um den Punkt $\frac{1}{n}$ beschreibe man nun einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{n^2}$ und schneide denjenigen Streifen aus der Ebene der complexen Zahlen heraus, welcher von diesem Kreise beschrieben wird, wenn man seinen Mittelpunkt parallel der imaginären Achse in der positiven Richtung in's Unendliche schiebt. Ferner schneide man Alles ab, was ausserhalb eines mit dem Radius n um den Mittelpunkt beschriebenen Kreises liegt. Was übrig bleibt möge mit A_n bezeichnet werden. Alsdann verhält sich

$$\frac{1}{n(nx-1)}$$

im Innern und auf der Grenze von A_n regulär. Nach dem in der vorstehenden Abhandlung pag. 238, Zeile 4—8 bewiesenen Satze lässt sich dann eine ganze Function $g_n(x)$ bilden, welche im Innern und auf der Grenze von A^n um weniger als $\frac{1}{n}$ von

$$\frac{1}{n(nx-1)}$$

verschieden ist. Folglich wird $\lim g_n(x)$ für alle endlichen Werthe von x convergiren und gleich Null sein. Denn greife ich irgend einen Werth von x heraus, so wird er für einen hinreichend grossen Werth von n im Innern von A_n liegen und von diesem Werthe von n ab wird

$$\left| g_n(x) - \frac{1}{n(nx-1)} \right| < \frac{1}{n}$$

sein. Diese Convergenz von $\lim g_n(x)$ oder, was dasselbe ist, von

$$g_1(x) + \sum_n [g_{n+1}(x) - g_n(x)] \qquad (n=1,2,\ldots)$$

für alle endlichen Werthe von x, ist nicht überall eine gleichmässige. Für eine beliebig kleine Umgebung des Nullpunktes z. B. ist es unmöglich, dass $|g_n(x)|$ für hinreichend grosse Werthe von n beliebig klein sei. Denn für $x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ ein Werth, welcher auf der Grenze von A_n liegt ist

$$\frac{1}{n(nx-1)} = 1 \quad \text{und mithin} \quad |g_n(x)| > 1 - \frac{1}{n}.$$

Daraus folgt zugleich, dass auf jeder geschlossenen Linie von endlicher Länge, welche den Nullpunkt einschliesst, mindestens eine Stelle liegt, wo die gleichmässige Convergenz aufhört. Es gilt nämlich der folgende allgemeine Satz: Wenn ein Ausdruck von der Form $\lim g_n(x)$ auf einer geschlossenen Curve von endlicher Länge gleichmässig convergirt, so ist er auch im Innern derselben gleichmässig convergent. Oder, was dasselbe ist, ein zusammenhängendes Gebiet der gleichmässigen Convergenz einer Summe von ganzen Functionen ist stets einfach zusammenhängend. Es sei ξ irgend ein Punkt im Innern der Curve C, so ist nach CAUCHY

$$g_{n+m}(\xi) - g_n(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C)} \frac{g_{n+m}(x) - g_n(x)}{x - \xi}\, dx:$$

Wird nun ξ auf ein Gebiet beschränkt dessen Entfernung von C grösser ist als r und wird n so gross gewählt, dass $|g_{n+m}(x) - g_n(x)|$ längs der Curve kleiner als eine beliebig klein angenommene Grösse ε ist, wie gross man auch m nehme, was nach der auf C vorausgesetzten gleichmässigen Convergenz möglich ist, so folgt

$$|g_{n+m}(\xi) - g_n(\xi)| < \frac{\varepsilon l}{2\pi r}$$

(wo l die Länge von C bedeutet). Mit andern Worten es findet in der Nähe jedes Punktes im Innern von C gleichmässige Convergenz statt.

Wendet man diesen Satz auf unsren Ausdruck an, so folgt, dass er nicht längs irgend einer den Nullpunkt einschliessenden Curve von endlicher Länge gleichmässig convergiren kann. Es muss auf derselben mindestens eine Stelle geben, wo der Ausdruck ungleichmässig convergirt. Diese kann nur auf dem positiven Theil der imaginären Achse liegen. Denn jeder andre Punkt fällt sammt einer hinreichend kleinen Umgebung für hinreichend grosse Werthe von n in das Innere von A_n wo

$$|g_n(x)| < \left|\frac{1}{n(nx-1)}\right| + \frac{1}{n}$$

also beliebig klein ist. Nur die Punkte des positiven Theils der imaginären Achse haben die Eigenschaft, dass jede noch so kleine Umgebung derselben für einen hinreichend grossen Werth von n über die Grenze von A_n hinausgreift. Längs des positiven Theils der imaginären Achse muss nun aber die Convergenz überall eine ungleichmässige sein, weil sich sonst eine den Nullpunkt umschliessende Curve ziehen liesse, längs deren die Convergenz gleichmässig ist.

Hätte man die Streifen, welche aus der complexen Ebene ausgeschnitten wurden, um A_n zu bilden, so gewählt, dass sie sich mit wachsendem n irgend einer andern von Null bis in's Unendliche laufenden Curve näherten, so würde auf dieser die Convergenz umgleichmässig sein. Auch lässt sich an Stelle des Nullpunktes irgend ein andrer Punkt einführen. Durch Addition solcher Ausdrücke kann man eine Summe von ganzen Functionen herstellen, welche für alle endlichen Werthe von x convergirt, deren gleichmässige Convergenz aber auf beliebig vielen von irgend welchen Punkten in's Unendliche laufenden Curven aufhört. Dennoch wird dadurch eine einzige monogene Function nämlich die Null, oder wenn man irgend eine durch eine beständig convergirende Reihe darstellbare Function hinzuaddirt, diese Function dargestellt.