BEWEIS EINES SATZES

AUS DER

THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON

M. FALK

in UPSALA.

Wenn man von dem Gebiete der Grösse k^2 alle reelle Werthe von $-\infty$ bis 0 und von $+1$ bis $+\infty$ (0 und $+1$ inclus.) ausschliesst und jeder der Quadratwurzeln $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ und $\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}$, wo

$$k'^2 = 1 - k^2$$

ist, denjenigen Werth beilegt, dessen erste Coordinate (der reelle Bestandtheil) positiv ist, so sind die Grössen K und K' durch die Werthe der bestimmten Integrale:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}$$

in eindeutiger Weise definirt.

Es handelt sich alsdann darum zu beweisen, dass K, K' immer endlich und von Null verschieden bleiben und dass K, K' und $\frac{K'}{K}$ *positive* erste Coordinaten haben.

Führt man die Bezeichnungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} k^2 &= \alpha + \beta i \quad, & k'^2 &= \alpha' + \beta' i \\ P &= 1 - \alpha \sin^2\varphi, & P' &= 1 - \alpha' \sin^2\psi \\ Q &= \beta \sin^2\varphi \quad, & Q' &= \beta' \sin^2\psi \end{aligned}$$

ein, so hat man, da $k^2 + k'^2 = 1$ ist

$$(2)\qquad \alpha + \alpha' = 1, \qquad \beta + \beta' = 0.$$

Setzt man ausserdem:

$$(3)\qquad \begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\, d\varphi, & B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{-P + \sqrt{P^2 + Q^2}}}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\, d\varphi, \\ A' &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{P' + \sqrt{P'^2 + Q'^2}}}{\sqrt{P'^2 + Q'^2}}\, d\psi, & B' &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{-P' + \sqrt{P'^2 + Q'^2}}}{\sqrt{P'^2 + Q'^2}}\, d\psi, \end{aligned}$$

indem man allen hierin vorkommenden Quadratwurzeln ihre positiven Werthe beilegt, so ergeben sich für K und K' die Ausdrücke:

$$\sqrt{2}\,.\,K = A + \varepsilon B i, \qquad \sqrt{2}\,.\,K' = A' - \varepsilon B' i,$$

wo für ε $+1$ oder -1 zu setzen ist, je nachdem β positiv oder negativ ist.

Da unter den gemachten Voraussetzungen die Wurzeln: $\sqrt{P^2 + Q^2}$ und $\sqrt{P'^2 + Q'^2}$ nie verschwinden, so sind K und K' immer endlich. Aus den Gleichungen (3) ist unmittelbar ersichtlich, sowohl dass K und K' immer von Null verschieden bleiben, als auch dass sie positive erste Coordinaten (A und A') haben.

Ferner ist:

$$(4)\qquad \frac{K'}{K} = \frac{AA' - BB'}{A^2 + B^2} - \varepsilon \frac{AB' + A'B}{A^2 + B^2}\, i;$$

also wird bewiesen, dass die erste Coordinate von $\frac{K'}{K}$ positiv ist, indem man zeigt, dass $AA' - BB' > 0$ ist.

Aus den Gleichungen (3) ergibt sich:

$$AA' - BB' = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T}{\sqrt{P^2+Q^2}\sqrt{P'^2+Q'^2}}\,d\varphi\, d\psi,$$

wo

$$(5)\quad T = \sqrt{P+\sqrt{P^2+Q^2}}\cdot\sqrt{P'+\sqrt{P'^2+Q'^2}} - \sqrt{-P+\sqrt{P^2+Q^2}}\cdot\sqrt{-P'+\sqrt{P'^2+Q'^2}}$$

ist. Folglich hat man, um das Behauptete zu beweisen, nur zu zeigen, dass T für alle Werthepaare φ, ψ innerhalb des Gebietes dieser Grössen immer positiv bleibt.

Aus den Gleichungen (1) und (5) geht unmittelbar hervor, dass die immer reell bleibende Grösse T sich mit φ und ψ stetig ändert; und da für $\varphi = \psi = 0$

$$T_0 = 2$$

ist, so genügt es offenbar nachzuweisen, dass T für kein Werthepaar φ, ψ verschwinden kann, um daraus schliessen zu können, dass T immer positiv bleibt.

Aus der Gleichung (5) folgt, da QQ' nie positiv ist,

$$T^2 = 2(PP' + QQ' + \sqrt{P^2+Q^2}\cdot\sqrt{P'^2+Q'^2});$$

damit T verschwinde, ist also nothwendig, dass

$$(P^2+Q^2)(P'^2+Q'^2) = (PP'+QQ')^2$$

oder

$$PQ' - P'Q = 0$$

werde. Da aber, weil $\beta = -\beta'$ und $\alpha + \alpha' = 1$ ist,

$$PQ' - P'Q = \beta'(\sin^2\varphi + \sin^2\psi\cos^2\varphi)$$

ist, so könnte T also nur für $\varphi = \psi = 0$ verschwinden. Aber für

$\varphi = \psi = 0$ war $T_0 = 2$; also ist T und folglich auch die erste Coordinate von $\frac{K'}{K}$ immer positiv.

Dieser Beweis setzt voraus, dass β von Null verschieden ist; da aber für $\beta = 0$ die Grössen K und K' beide reell und positiv sind, so ist der Satz vollständig bewiesen.

Berlin, August 1885.