ÜBER HYPERELLIPTISCHE INTEGRALE

ZWEITER UND DRITTER GATTUNG

VON

OTTO STAUDE

in BRESLAU.

Auf die Darstellung der hyperelliptischen Integrale 2. und 3. Gattung durch Thetafunctionen sind namentlich die von RIEMANN begründeten Methoden mehrfach [1] angewendet worden, während die unmittelbare Analogie des in JACOBI's späterer Theorie der elliptischen Integrale benutzten Verfahrens [2] bisher nicht verfolgt zu sein scheint. Indem die vorliegende Mittheilung auf die Ausdehnbarkeit der JACOBI'schen Methode auf die hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung hinweisen will, verbindet sie damit die Absicht eine von Herrn WEIERSTRASS mitgetheilte Formel,[3] welche die Bogenlänge der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid durch hyperelliptische Functionen ausdrückt, auf einfache Weise abzuleiten.

§ 1. Um die geometrische Bedeutung der bezeichneten Formel in ihrem vollen Umfange zu charakterisiren, bedarf es zuvörderst einiger

[1] Vgl. unter anderen: ROCH, *Über die 3. Gattung der Abel'schen Integrale 1. Ordnung,* CRELLE's Journal, Bd. 65, S. 42; *Über Abel'sche Integrale 3. Gattung,* ebd., Bd. 68, S. 170. WEBER, *Über die Transcendenten 2. und 3. Gattung bei den hyperelliptischen Functionen 1. Ordnung,* ebd., Bd. 82, S. 131. THOMAE, *Über Integrale 2. Gattung,* ebd., Bd. 93, S. 69 und Bd. 94, S. 241.

[2] Vgl. JACOBI, Gesammelte Werke, herausg. v. WEIERSTRASS, Bd. 1, SS. 526 ff; 533 ff.

[3] Vgl. WEIERSTRASS, *Über geodätische Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid,* Monatsberichte der Berliner Akademie vom J. 1861, S. 995.

Bemerkungen über die Darstellung der geodätischen Linien und der Krümmungscurven auf dem Ellipsoid durch hyperelliptische Functionen.

Es werden unter x, y, z die gewöhnlichen, unter λ, μ, ν die elliptischen Coordinaten eines Punctes im Raume verstanden. Die letzteren sind in bekannter Weise, unter Annahme dreier Constanten α, β, γ, definirt und entsprechen mit Bezug auf diese den Ungleichungen

$$\alpha > \nu > \beta > \mu > \gamma > \lambda > -\infty.$$

Auf dem Ellipsoid $\lambda = \lambda_0$ wird diejenige geodätische Linie betrachtet, welche dessen Schnittlinie mit dem einschaligen Hyperboloid $\mu = \mu_0$, eine Krümmungscurve auf dem Ellipsoid $\lambda = \lambda_0$, berührt; λ_0 bedeutet einen bestimmten Werth von λ, μ_0 einen ebensolchen von μ. Die Differentialgleichung der geodätischen Linie in elliptischen Coordinaten μ und ν lautet:

$$(1) \qquad \frac{(\nu - \lambda_0)d\nu}{2N} - \frac{(\mu - \lambda_0)d\mu}{2M} = 0,$$

wobei N und M resp. die mit $z = \nu$ und $z = \mu$ gebildete Wurzelgrösse

$$Z = \sqrt{(\alpha - z)(\beta - z)(\mu_0 - z)(\gamma - z)(\lambda_0 - z)}$$

bedeuten. Während die Variablen μ und ν dieser Differentialgleichung genügen, stellen die Ausdrücke:

$$dS_1 = \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)d\nu}{2N} - \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0)d\mu}{2M}$$

und

$$dS_2 = \sqrt{\frac{(\alpha - \omega)(\beta - \omega)(\gamma - \omega)}{(\mu_0 - \omega)(\lambda_0 - \omega)}} \left\{ \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)d\nu}{(\nu - \omega)2N} - \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0)d\mu}{(\mu - \omega)2M} \right\}$$

das Bogenelement der geodätischen Linie dar,[1] und zwar resp. in gewöhnlicher und in projectivischer auf das Ellipsoid $\lambda = \omega$ als Fundamentalfläche bezogener Maassbestimmung. Dieselben Formeln gelten für das Bogenelement der Krümmungscurve $\mu = \mu_0$. Man mag $-\infty < \omega < \lambda_0$ annehmen, um für dS_2 einen reellen Werth zu erhalten.

[1] Vgl. Mathematische Annalen, Bd. 20, S. 158.

An Stelle der elliptischen Coordinaten μ, ν sollen nun die Integralsummen:

$$(1)\qquad u_1 = \int\limits_{\beta}^{\nu, N} \frac{(\nu - \mu_0)\,d\nu}{2N} - \int\limits_{\gamma}^{\mu, M} \frac{(\mu - \mu_0)\,d\mu}{2M}, \qquad u_2 = \int\limits_{\beta}^{\nu, N} \frac{(\nu - \lambda_0)\,d\nu}{2N} - \int\limits_{\gamma}^{\mu, M} \frac{(\mu - \lambda_0)\,d\mu}{2M}$$

als neue Coordinaten zur Bestimmung der Puncte des Ellipsoides $\lambda = \lambda_0$ eingeführt werden. Mit Rücksicht auf (1) lautet dann die Differentialgleichung der geodätischen Linie:

$$(2)\qquad du_2 = 0.$$

Die Variablen u_1, u_2 werden jetzt als Argumente hyperelliptischer Functionen genommen. Man gehe zu dem Ende von der bekannten Definition $\vartheta(v_1, v_2)$ zweier Variablen v_1, v_2 und dreier Parameter a_{11}, a_{12}, a_{22} aus und unterscheide die 16 coordinirten Formen der Function nach Weierstrass durch die Zweiindices-bezeichnung.[1] Die Variablen v_1, v_2 und die Parameter a_{11}, a_{12}, a_{22} sollen dann von u_1, u_2 und den auf reellem Wege mit den positiven Werthen der reellen Quadratwurzeln $\sqrt{Z^2}$ und $\sqrt{-Z^2}$ berechneten Constanten:

$$(3)\qquad \left|\begin{aligned}
&A_1 = \int\limits_{\gamma}^{\mu_0} \frac{(z-\mu_0)\,dz}{2\sqrt{Z^2}}, \qquad B_1 = -\int\limits_{\beta}^{\alpha} \frac{(z-\mu_0)\,dz}{2\sqrt{Z^2}}, \qquad C_1 = \int\limits_{\lambda_0}^{\gamma} \frac{(z-\mu_0)\,dz}{2\sqrt{-Z^2}},\\
&A_2 = \int\limits_{\gamma}^{\mu_0} \frac{(z-\lambda_0)\,dz}{2\sqrt{Z^2}}, \qquad B_2 = -\int\limits_{\beta}^{\alpha} \frac{(z-\lambda_0)\,dz}{2\sqrt{Z^2}}, \qquad C_2 = \int\limits_{\lambda_0}^{\gamma} \frac{(z-\lambda_0)\,dz}{2\sqrt{-Z^2}},\\
&\qquad D_1 = -\int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{(z-\mu_0)\,dz}{2\sqrt{-Z^2}}, \qquad D_2 = -\int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{(z-\lambda_0)\,dz}{2\sqrt{-Z^2}},
\end{aligned}\right.$$

in folgender Weise abhängen:

$$(4)\qquad v_1 = \frac{u_1 B_2 - u_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\,\frac{\pi i}{2}, \qquad v_2 = \frac{A_1 u_2 - A_2 u_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\,\frac{\pi i}{2};$$

$$(5)\qquad \left|\begin{aligned}
&a_{11} = -\frac{C_1 B_2 - C_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\pi, \qquad a_{22} = -\frac{A_1 D_2 - A_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\pi,\\
&a_{12} = a_{21} = -\frac{D_1 B_2 - D_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\pi = -\frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\pi.
\end{aligned}\right.$$

[1] Vgl. Mathematische Annalen, Bd. 24, S. 284.

Als Functionen von u_1, u_2 seien die Functionen $\vartheta(v_1, v_2)$ mit $\theta(u_1, u_2)$ bezeichnet. Es sei überdies mit ebenfalls positiven Werthen von $\sqrt{Z^2}$:

$$(6)\qquad E = \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{(z-\lambda_0)(z-\mu_0)\,dz}{2\sqrt{Z^2}}, \qquad F = -\int_{\beta}^{\alpha} \frac{(z-\lambda_0)(z-\mu_0)\,dz}{2\sqrt{Z^2}}.$$

Alsdann geben die Formeln:[1]

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = \sqrt[4]{\dfrac{(\alpha-\lambda_0)(\alpha-\mu_0)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}}\,\dfrac{\theta_{45}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)}, \\[2ex] \dfrac{y}{\sqrt{\beta-\lambda_0}} = \sqrt[4]{\dfrac{(\beta-\lambda_0)(\beta-\mu_0)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}}\,\dfrac{\theta_{35}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)}, \\[2ex] \dfrac{z}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}} = \sqrt[4]{\dfrac{(\gamma-\lambda_0)(\mu_0-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}}\,\dfrac{\theta_{51}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)} \end{cases}$$

bei *gleichzeitiger unabhängiger Veränderlichkeit der beiden Variablen* u_1, u_2 im reellen Grössengebiet die Coordinaten x, y, z der Puncte der zwischen den beiden Zweigen der Krümmungscurve $\mu = \mu_0$ gelegenen *Zone des Ellipsoides* $\lambda = \lambda_0$; und zwar erhält man, während u_1, u_2 ein vollständiges System modulis $(4A_1, 4A_2; 4B_1, 4B_2)$ incongruenter Werthepaare durchläuft, jeden Punct der Zone zweimal. Lässt man dagegen, von einem der beiden einem Puncte der Zone auf solche Weise zugehörigen reellen Werthepaare u_1, u_2 ausgehend, fernerhin u_2 *unverändert*, u_1 aber beständig wachsen oder beständig abnehmen, so beschreibt der Punct (x, y, z) eine der beiden durch seine Ausgangslage hindurchgehenden *geodätischen Linien* nach der einen oder anderen ihrer beiden Richtungen. Setzt man z. B. $u_2 = 0$ oder $u_2 = -2A_2$ und lässt beziehungsweise u_1 von $u_1 = 0$ oder $u_1 = -2A_1$ an beständig wachsen oder abnehmen, so erhält man die 2 geodätischen Curvenzüge, welche sich im Puncte $x = \sqrt{\alpha-\lambda_0}$, $y = 0$, $z = 0$

[1] Meine Indicesbezeichnung der Function $\theta(u_1, u_2)$ geht in die Weierstrass'sche über, wenn man überall die Zahl 5 weglässt und θ_5 statt θ schreibt, also

$$\theta_5\ \theta_{24}\ \theta_{04}\ \theta_{02}\ \theta_3\ \theta_1\ \theta_{13}\ \theta_{01}\ \theta_{03}\ \theta_0\ \theta_{12}\ \theta_{23}\ \theta_2\ \theta_{14}\ \theta_{34}\ \theta_4$$

statt

$$\theta\ \theta_{24}\ \theta_{04}\ \theta_{02}\ \theta_{35}\ \theta_{51}\ \theta_{13}\ \theta_{01}\ \theta_{03}\ \theta_{05}\ \theta_{21}\ \theta_{23}\ \theta_{25}\ \theta_{41}\ \theta_{43}\ \theta_{45}.$$

kreuzen. Setzt man hinwiederum $u_2 = -A_2$ und lässt u_1 von $u_1 = -A_1$ wachsen und abnehmen, so beschreibt der Punct (x, y, z) den geodätischen Curvenzug, welcher in einem der Puncte $\mu = \mu_0$, $\nu = \beta$ die Krümmungscurve $\mu = \mu_0$ berührt.

Lässt man endlich u_1, u_2 *der Gleichung* $\theta_{25}(u_1, u_2) = 0$ *entsprechend* variiren, etwa von dem Werthepaare $-A_1$, $-A_2$ an, so beschreibt der Punct (x, y, z) die *Krümmungscurve* $\mu = \mu_0$ selbst.

Die Formeln (7) *geben also einerseits die Fläche der zwischen den beiden Zweigen der Krümmungscurve* $\mu = \mu_0$ *gelegenen Zone des Ellipsoides* $\lambda = \lambda_0$, *andererseits diese Krümmungscurve und ihre geodätischen Tangenten durch die Parameter* u_1, u_2 *dargestellt.*

§ 2. Um auch die *Bogenlängen* S_1 und S_2 der betrachteten Curven auf dem Ellipsoid durch die Parameter u_1, u_2 ausgedrückt zu erhalten, wird man zuerst die allgemeinere Aufgabe lösen:

Die Integralsummen 2. *und* 3. *Gattung:*

$$\text{(II)} \qquad S_1 = \int_{\beta}^{\nu, N} \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)\,d\nu}{2N} - \int_{\gamma}^{\mu, M} \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0)\,d\mu}{2M},$$

$$\text{(II')} \qquad S_2 = \sqrt{\frac{(\alpha - \omega)(\beta - \omega)(\gamma - \omega)}{(\mu_0 - \omega)(\lambda_0 - \omega)}} \left\{ \int_{\beta}^{\nu, N} \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)\,d\nu}{(\nu - \omega)2N} - \int_{\gamma}^{\mu, M} \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0)\,d\mu}{(\mu - \omega)2M} \right\}$$

durch die Integralsummen 1. *Gattung* u_1, u_2, *bei unbeschränkter Veränderlichkeit der gemeinsamen oberen Grenzen* ν, N *und* μ, M *innerhalb des hyperelliptischen Gebildes, darzustellen.*

Dabei wird man in S_2 zugleich an Stelle von ω zwei neue Parameter s_1, s_2 einführen, welche definirt sind durch die Gleichungen:

$$\text{(I')} \qquad s_1 = \int_{-\infty}^{\omega, \Omega} \frac{(\lambda - \mu_0)\,d\lambda}{2\Lambda}, \qquad s_2 = \int_{-\infty}^{\omega, \Omega} \frac{(\lambda - \lambda_0)\,d\lambda}{2\Lambda}, \qquad \theta_{13}(s_1, s_2) = 0;$$

unter Λ und Ω sind die mit $z = \lambda$ und $z = \omega$ gebildeten Werthe der Quadratwurzel Z zu verstehen.

Vermöge der in (I) und (I') angenommenen Beziehung zwischen den Variablen ν, μ und u_1, u_2 einerseits, ω und s_1, s_2 andererseits bestehen die folgenden Relationen, welche als unmittelbare Ausflüsse der Umkehrung der hyperelliptischen Integralsummen 1. Gattung zu betrachten sind:[1]

$$(8)\quad\begin{cases}
\sqrt{(\nu-\mu_0)(\mu_0-\mu)}=\sqrt[4]{(\alpha-\mu_0)(\beta-\mu_0)(\mu_0-\gamma)(\mu_0-\lambda_0)}\,\dfrac{\theta_{25}(u_1,u_2)}{\theta(u_1,u_2)},\\[2ex]
\sqrt{(\nu-\lambda_0)(\mu-\lambda_0)}=\sqrt[4]{(\alpha-\lambda_0)(\beta-\lambda_0)(\gamma-\lambda_0)(\mu_0-\lambda_0)}\,\dfrac{\theta_{50}(u_1,u_2)}{\theta(u_1,u_2)},\\[2ex]
\sqrt{\mu_0-\omega}=\sqrt[4]{\dfrac{(\alpha-\mu_0)(\beta-\mu_0)(\mu_0-\gamma)}{\mu_0-\lambda_0}}\,\dfrac{\theta_{45}(s_1,s_2)}{\theta_{24}(s_1,s_2)},\\[2ex]
\sqrt{\lambda_0-\omega}=\sqrt[4]{\dfrac{(\alpha-\lambda_0)(\beta-\lambda_0)(\gamma-\lambda_0)}{\mu_0-\lambda_0}}\,\dfrac{\theta_{45}(s_1,s_2)}{\theta_{40}(s_1,s_2)},\\[2ex]
\sqrt{\dfrac{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}{(\mu_0-\omega)(\lambda_0-\omega)}}=-\sqrt[4]{\dfrac{(\alpha-\lambda_0)(\beta-\lambda_0)(\gamma-\lambda_0)}{\mu_0-\lambda_0}}\,\dfrac{\theta_{45}\theta_{45}\theta_{21}(s_1,s_2)\theta_{43}(s_1,s_2)}{\theta_{21}\theta_{43}\theta_{40}(s_1,s_2)\theta_{45}(s_1,s_2)}.
\end{cases}$$

Bezeichnen ferner θ, $\theta'^{(1)}$, $\theta'^{(2)}$ die Werthe der Function $\theta(u_1, u_2)$ und ihrer partiellen Ableitungen nach u_1 und u_2 für $u_1=0$, $u_2=0$, so ist:[2]

$$(9)\quad\begin{cases}
\dfrac{\theta_{24}'^{(1)}}{\theta_{45}}=0, & \dfrac{\theta_{40}'^{(1)}}{\theta_{45}}=-\sqrt[4]{\dfrac{(\alpha-\lambda_0)(\beta-\lambda_0)(\gamma-\lambda_0)}{\mu_0-\lambda_0}},\\[2ex]
\dfrac{\theta_{24}'^{(2)}}{\theta_{45}}=-\sqrt[4]{\dfrac{(\alpha-\mu_0)(\beta-\mu_0)(\mu_0-\gamma)}{\mu_0-\lambda_0}}, & \dfrac{\theta_{40}'^{(2)}}{\theta_{45}}=0,\\[2ex]
\dfrac{\theta_{24}'^{(2)}}{\theta_{40}'^{(1)}}=\dfrac{\theta_{01}\theta_{03}\theta_{25}}{\theta_{21}\theta_{23}\theta_{05}}, & \dfrac{\theta_{13}'^{(1)}+\theta_{13}'^{(2)}}{\theta_{45}}=0.
\end{cases}$$

Mit Benutzung dieser Formeln drücken sich die Differentiale dS_1 und dS_2 der Integralsummen 2. und 3. Gattung S_1 und S_2 in folgender Weise aus:

$$(10)\qquad dS_1=\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2N}-\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2M}$$
$$=\frac{\theta_{40}'^{(1)2}\theta_{50}^2(u_1,u_2)}{\theta_{45}^2\theta^2(u_1,u_2)}\,du_1+\frac{\theta_{24}'^{(2)2}\theta_{25}^2(u_1,u_2)}{\theta_{45}^2\theta^2(u_1,u_2)}\,du_2,$$

$$(10')\qquad dS_2=\sqrt{\frac{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}{(\mu_0-\omega)(\lambda_0-\omega)}}\left\{\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{(\nu-\omega)\,2N}-\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{(\mu-\omega)\,2M}\right\}$$
$$=\frac{\theta_{40}'^{(1)}\theta_{45}\theta_{21}(s_1,s_2)\theta_{43}(s_1,s_2)}{\theta_{21}\theta_{43}\theta_{40}(s_1,s_2)\theta_{45}(s_1,s_2)}\cdot\frac{\dfrac{\theta_{40}^2(s_1,s_2)\theta_{50}^2(u_1,u_2)}{\theta_{45}^2(s_1,s_2)\theta^2(u_1,u_2)}\,du_1+\dfrac{\theta_{24}^2(s_1,s_2)\theta_{25}^2(u_1,u_2)}{\theta_{45}^2(s_1,s_2)\theta^2(u_1,u_2)}\,du_2}{1+\dfrac{\theta_{40}^2(s_1,s_2)\theta_{50}^2(u_1,u_2)}{\theta_{45}^2(s_1,s_2)\theta^2(u_1,u_2)}+\dfrac{\theta_{24}^2(s_1,s_2)\theta_{25}^2(u_1,u_2)}{\theta_{45}^2(s_1,s_2)\theta^2(u_1,u_2)}}.$$

---

[1] Vgl. Mathematische Annalen, Bd. 25, S. 416.

[2] Vgl. Mathematische Annalen, Bd. 24, S. 290.

§ 3. Diese Ausdrücke in den u_1, u_2 und s_1, s_2 können aber als vollständige Differentiale dargestellt werden vermittels des für die Thetafunctionen geltenden Additionstheorems:

$$\begin{gathered}\theta_{45}\,\theta(u+v)\theta(u+w)\theta_{45}(v+w) = \theta(u)\theta_{45}(v)\theta_{45}(w)\theta(u+v+w) \\ -\theta_{25}(u)\theta_{24}(v)\theta_{24}(w)\theta_{25}(u+v+w) - \theta_{50}(u)\theta_{40}(v)\theta_{40}(w)\theta_{50}(u+v+w) \\ -\theta_{02}(u)\theta_{13}(v)\theta_{13}(w)\theta_{02}(u+v+w),\end{gathered}$$

in welchem allgemein die einfachen Symbole u; v; u. s. w. die Argumentepaare u_1, u_2; v_1, v_2; u. s. w. vertreten und unter u_1, u_2; v_1, v_2; w_1, w_2 3 Paare unabhängiger Veränderlicher verstanden werden. Wenn man dieses Additionstheorem partiell nach w_h $(h = 1, 2)$ differentiirt, hiernach $w_1 = 0$, $w_2 = 0$ setzt und schliesslich durch $\theta_{45}\,\theta(u)\theta_{45}(v)\theta(u+v)$ dividirt, so folgt:

$$(11) \qquad \frac{\theta'^{(h)}(u+v)}{\theta(u+v)} - \frac{\theta'^{(h)}(u)}{\theta(u)} - \frac{\theta'^{(h)}_{45}(v)}{\theta_{45}(v)}$$

$$= \frac{\theta'^{(h)}_{24}\,\theta_{25}(u)\theta_{24}(v)\theta_{25}(u+v)}{\theta_{45}\,\theta(u)\theta_{45}(v)\theta(u+v)} + \frac{\theta'^{(h)}_{40}\,\theta_{50}(u)\theta_{40}(v)\theta_{50}(u+v)}{\theta_{45}\,\theta(u)\theta_{45}(v)\theta(u+v)} + \frac{\theta'^{(h)}_{13}\,\theta_{02}(u)\theta_{13}(v)\theta_{02}(u+v)}{\theta_{45}\,\theta(u)\theta_{45}(v)\theta(u+v)},$$

wo mit $\theta'^{(h)}(u)$, u. s. w., der 1. partielle Differentialquotient von $\theta(u_1, u_2)$ nach u_h, u. s. w., bezeichnet ist. Durch partielle Ableitung dieser Formel nach v_i $(i = 1, 2)$ und nachfolgende Nullsetzung von v_1 und v_2 erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\theta'^{(h)}(u)}{\theta(u)}\right) - \frac{\theta''^{(hi)}_{45}}{\theta_{45}} = \frac{\theta'^{(h)}_{24}\,\theta'^{(i)}_{24}\,\theta^2_{25}(u)}{\theta^2_{45}\,\theta^2(u)} + \frac{\theta'^{(h)}_{40}\,\theta'^{(i)}_{40}\,\theta^2_{50}(u)}{\theta^2_{45}\,\theta^2(u)} + \frac{\theta'^{(h)}_{13}\,\theta'^{(i)}_{13}\,\theta^2_{02}(u)}{\theta^2_{45}\,\theta^2(u)},$$

wo $\theta''^{(hi)}_{45}$ der Werth des 2. partiellen Differentialquotienten von $\theta_{45}(u_1, u_2)$ nach u_h und u_i für $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ ist.

Multiplicirt man die 4 mit $h, i = 1, 1;\ 1, 2;\ 2, 1;\ 2, 2$ hieraus entstehenden Formeln der Reihe nach mit du_1, du_2, du_1, du_2 und addirt unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Gleichungen (9), so ergiebt sich:

$$d\left(\frac{\theta'^{(1)}(u)}{\theta(u)}\right) + d\left(\frac{\theta'^{(2)}(u)}{\theta(u)}\right) - \frac{\theta''^{(11)}_{45} + \theta''^{(21)}_{45}}{\theta_{45}}\,du_1 - \frac{\theta''^{(12)}_{45} + \theta''^{(22)}_{45}}{\theta_{45}}\,du_2$$

$$= \frac{\theta'^{(1)2}_{40}\,\theta^2_{50}(u)}{\theta^2_{45}\,\theta^2(u)}\,du_1 + \frac{\theta'^{(2)2}_{24}\,\theta^2_{25}(u)}{\theta^2_{45}\,\theta^2(u)}\,du_2$$

und damit nach (10):

$$(12)\qquad dS_1 = d\left(\frac{\theta'^{(1)}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)}\right) + d\left(\frac{\theta'^{(2)}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)}\right)$$
$$- \frac{\theta_{45}''^{(11)} + \theta_{45}''^{(21)}}{\theta_{45}} du_1 - \frac{\theta_{45}''^{(12)} + \theta_{45}''^{(22)}}{\theta_{45}} du_2.$$

Lässt man endlich u_1, u_2, von dem Werthepaare 0, 0 an, eine continuirliche Reihe von Werthepaaren durchlaufen, so ist durch die Gleichungen (I) im Allgemeinen eine entsprechende Reihe von Stellenpaaren ν, N; μ, M im hyperelliptischen Gebilde gegeben; und die längs dieser zusammengehörigen Werthreihen u_1, u_2 und ν, N; μ, M vollzogene Integration der Differentialgleichung (12) giebt:

$$(13)\qquad S_1 = \int_\beta^{\nu, N} \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)\,d\nu}{2N} - \int_\gamma^{\mu, M} \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0)\,d\mu}{2M}$$
$$= \frac{\partial \log \theta(u_1, u_2)}{\partial u_1} + \frac{\partial \log \theta(u_1, u_2)}{\partial u_2} - \frac{\theta_{45}''^{(11)} + \theta_{45}''^{(21)}}{\theta_{45}} u_1 - \frac{\theta_{45}''^{(12)} + \theta_{45}''^{(22)}}{\theta_{45}} u_2.$$

Statt der Nullwerthe der 2. Ableitungen der Function $\theta_{45}(u_1, u_2)$ können hier die Constanten (6) eingeführt werden. Es entsprechen nämlich den Werthepaaren A_1, A_2 und B_1, B_2 von u_1, u_2 die Werthepaare E und F von S_1; die Substitution dieser zusammengehörigen Werthepaare in die Gleichung (13) giebt die Relationen:

$$(14)\qquad \left|\begin{array}{l} -E = \dfrac{\theta_{45}''^{(11)} + \theta_{45}''^{(21)}}{\theta_{45}} A_1 + \dfrac{\theta_{45}''^{(12)} + \theta_{45}''^{(22)}}{\theta_{45}} A_2 \\[2ex] -F = \dfrac{\theta_{45}''^{(11)} + \theta_{45}''^{(21)}}{\theta_{45}} B_1 + \dfrac{\theta_{45}''^{(12)} + \theta_{45}''^{(22)}}{\theta_{45}} B_2. \end{array}\right.$$

Mit Benutzung dieser Formeln kann man die Gleichung (13) auch schreiben:

$$(\mathrm{III})\qquad S_1 = \int_\beta^{\nu, N} \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)\,d\nu}{2N} - \int_\gamma^{\mu, M} \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0)\,d\mu}{2M}$$
$$= \frac{EB_2 - A_2F}{A_1B_2 - A_2B_1} u_1 + \frac{A_1F - EB_1}{A_1B_2 - A_2B_1} u_2 + \frac{\partial \log \theta(u_1, u_2)}{\partial u_1} + \frac{\partial \log \theta(u_1, u_2)}{\partial u_2}.$$

In den Variablen v_1, v_2 geschrieben, wird,

$$S_1 = 2E\frac{v_1}{\pi i} + 2F\frac{v_2}{\pi i} + \frac{\partial \log \vartheta(v_1, v_2)}{\partial u_1} + \frac{\partial \log \vartheta(v_1, v_2)}{\partial u_2}.$$

Um diese Gleichung in die von Herrn Weierstrass a. a. O. erhaltene Form zu setzen, hat man λ_0 in 0, u_1 in $u' - \mu_0 u$, u_2 in u', v_1 in πiv, v_2 in $\pi iv'$ umzuwandeln; man erhält dann:

$$S_1 = 2Ev + 2Fv' + \frac{\partial \log \vartheta(v, v')}{\partial u'}. \tag{15}$$

§ 4. Um in entsprechender Weise die Formel (10′) zu behandeln, geht man wieder von der Gleichung (11) aus, setzt darin einmal $v = s$ und einmal $v = -s$ und subtrahirt die entstehenden Gleichungen; man findet mit Rücksicht auf die Relation $\theta_{13}(s) = 0$:

$$\begin{aligned}(16)\quad &\frac{1}{2}\frac{\theta'^{(h)}(u+s)}{\theta(u+s)} - \frac{1}{2}\frac{\theta'^{(h)}(u-s)}{\theta(u-s)} - \frac{\theta_{45}'^{(h)}(s)}{\theta_{45}(s)} = \frac{1}{2}\frac{\theta_{24}'^{(h)}\theta_{25}(u)\theta_{24}(s)}{\theta_{45}\theta(u)\theta_{45}(s)}\left(\frac{\theta_{25}(u+s)}{\theta(u+s)} + \frac{\theta_{25}(u-s)}{\theta(u-s)}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\frac{\theta_{40}'^{(h)}\theta_{50}(u)\theta_{40}(s)}{\theta_{45}\theta(u)\theta_{45}(s)}\left(\frac{\theta_{50}(u+s)}{\theta(u+s)} + \frac{\theta_{50}(u-s)}{\theta(u-s)}\right).\end{aligned}$$

Es ist aber bei beliebigem u_1, u_2 und s_1, s_2:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_{25}(u+s)}{\theta(u+s)} + \frac{\theta_{25}(u-s)}{\theta(u-s)}\right) = \frac{\dfrac{\theta_{45}\theta_{45}\theta_{01}(s)\theta_{43}(s)\theta_{25}(u)}{\theta_{01}\theta_{43}\theta_{45}(s)\theta_{45}(s)\theta(u)} - \dfrac{\theta_{45}\theta_{45}\theta_{13}(s)\theta_{24}(s)\theta_{03}(u)\theta_{41}(u)}{\theta_{01}\theta_{43}\theta_{45}(s)\theta_{45}(s)\theta(u)\theta(u)}}{1 + \dfrac{\theta_{40}^2(s)}{\theta_{45}^2(s)}\dfrac{\theta_{50}^2(u)}{\theta^2(u)} + \dfrac{\theta_{24}^2(s)}{\theta_{45}^2(s)}\dfrac{\theta_{25}^2(u)}{\theta^2(u)} + \dfrac{\theta_{13}^2(s)\theta_{02}^2(u)}{\theta_{45}^2(s)\theta^2(u)}},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_{50}(u+s)}{\theta(u+s)} + \frac{\theta_{50}(u-s)}{\theta(u-s)}\right) = \frac{\dfrac{\theta_{45}\theta_{45}\theta_{21}(s)\theta_{43}(s)\theta_{50}(u)}{\theta_{21}\theta_{43}\theta_{45}(s)\theta_{45}(s)\theta(u)} + \dfrac{\theta_{45}\theta_{45}\theta_{13}(s)\theta_{24}(s)\theta_{23}(u)\theta_{41}(u)}{\theta_{21}\theta_{43}\theta_{45}(s)\theta_{45}(s)\theta(u)\theta(u)}}{1 + \dfrac{\theta_{40}^2(s)}{\theta_{45}^2(s)}\dfrac{\theta_{50}^2(u)}{\theta^2(u)} + \dfrac{\theta_{24}^2(s)}{\theta_{45}^2(s)}\dfrac{\theta_{25}^2(u)}{\theta^2(u)} + \dfrac{\theta_{13}^2(s)}{\theta_{45}^2(s)}\dfrac{\theta_{02}^2(u)}{\theta^2(u)}};$$

mit $\theta_{13}(s) = 0$ fällt in Zähler und Nenner der rechten Seiten je ein Glied fort. Die entstehenden Ausdrücke substituire man in (16). Nimmt man dann $h = 1, 2$, multiplicirt mit du_1, du_2 und addirt, so findet man:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}d\log\frac{\theta(u+s)}{\theta(u-s)} - \frac{\partial\log\theta_{45}(s)}{\partial s_1}du_1 - \frac{\partial\log\theta_{45}(s)}{\partial s_2}du_2\\ &= \frac{\theta_{45}\theta_{43}(s)}{\theta_{43}\theta_{45}(s)}\,\frac{\dfrac{\theta_{01}\theta_{40}'^{(1)}\theta_{21}(s)\theta_{24}(s)}{\theta_{01}\theta_{21}\theta_{40}(s)\theta_{24}(s)}\cdot\dfrac{\theta_{40}^2(s)\theta_{50}^2(u)}{\theta_{45}^2(s)\theta^2(u)}du_1 + \dfrac{\theta_{21}\theta_{24}'^{(2)}\theta_{01}(s)\theta_{40}(s)}{\theta_{01}\theta_{21}\theta_{40}(s)\theta_{24}(s)}\cdot\dfrac{\theta_{24}^2(s)\theta_{25}^2(u)}{\theta_{45}^2(s)\theta^2(u)}du_2}{1 + \dfrac{\theta_{40}^2(s)\theta_{50}^2(u)}{\theta_{45}^2(s)\theta^2(u)} + \dfrac{\theta_{24}^2(s)\theta_{25}^2(u)}{\theta_{45}^2(s)\theta^2(u)}}.\end{aligned}$$

Bei beliebigem s_1, s_2 besteht nun die Relation:

$$\theta\theta_{41}\theta_{43}(s)\theta_{13}(s)+\theta_{05}\theta_{23}\theta_{21}(s)\theta_{24}(s)=\theta_{03}\theta_{25}\theta_{01}(s)\theta_{40}(s),$$

die sich mit $\theta_{13}(s)=0$ um ein Glied reducirt und mit Rücksicht auf die vorletzte Formel (9) geschrieben werden kann:

$$\theta_{01}\theta_{40}'^{(1)}\theta_{21}(s)\theta_{24}(s)=\theta_{21}\theta_{24}'^{(2)}\theta_{01}(s)\theta_{40}(s).$$

Hiernach wird:

$$\frac{1}{2}d\log\frac{\theta(u+s)}{\theta(u-s)}-\frac{\partial\log\theta_{45}(s)}{\partial s_1}du_1-\frac{\partial\log\theta_{45}(s)}{\partial s_2}du_2$$

$$=\frac{\theta_{41}'^{(1)}\theta_{45}\theta_{21}(s)\theta_{43}(s)}{\theta_{21}\theta_{43}\theta_{40}(s)\theta_{45}(s)}\frac{\dfrac{\theta_{40}^2(s)\theta_{50}^2(u)}{\theta_{45}^2(s)\theta^2(u)}du_1+\dfrac{\theta_{24}^2(s)\theta_{25}^2(u)}{\theta_{45}^2(s)\theta^2(u)}du_2}{1+\dfrac{\theta_{40}^2(s)\theta_{50}^2(u)}{\theta_{45}^2(s)\theta^2(u)}+\dfrac{\theta_{24}^2(s)\theta_{25}^2(u)}{\theta_{45}^2(s)\theta^2(u)}}$$

und nach (10'):

$$(12')\quad dS_2=\frac{1}{2}d\log\frac{\theta(u_1+s_1,\ u_2+s_2)}{\theta(u_1-s_1,\ u_2-s_2)}-\frac{\partial\log\theta_{45}(s_1,\ s_2)}{\partial s_1}du_1-\frac{\partial\log\theta_{45}(s_1,\ s_2)}{\partial s_2}du_2.$$

Die Integration giebt wie oben:

$$(\mathrm{III}')\quad S_2=\sqrt{\frac{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}{(\mu_0-\omega)(\lambda_0-\omega)}}\left|\int_\beta^{\nu,N}\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)d\nu}{(\nu-\omega)2N}-\int_\gamma^{\mu,M}\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)d\mu}{(\mu-\omega)2M}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\theta(u_1+s_1,\ u_2+s_2)}{\theta(u_1-s_1,\ u_2-s_2)}-\frac{\partial\log\theta_{45}(s_1,\ s_2)}{\partial s_1}u_1-\frac{\partial\log\theta_{45}(s_1,\ s_2)}{\partial s_2}u_2.$$

§ 5. Die in §§ 2—4 angewandte Methode zur Darstellung der Integralsummen 2. und 3. Gattung (II) und (II') durch die Integralsummen 1. Gattung (I) und (I') in der Form (III) und (III') ist nicht an die specielle Beschaffenheit der Formeln (9) gebunden, welche bedingt ist theils[1] (1. und 4. Formel (9)) durch die besondere Wahl der linearen Functionen im Zähler unter den Integralen (I), theils (5. und 6. Formel (9)) durch die Verlegung eines Verzweigungspunctes des hyperelliptischen Gebildes in's Unendliche. *Dieselbe Methode kann vielmehr überhaupt zur Darstellung der Integralsummen 2. und 3. Gattung benutzt werden und giebt vermöge ihres Ausgangspunctes zugleich eine an die Theorie der Thetacharak-*

[1] Vgl. das Fehlen der einen Variablen im linearen Gliede der auf den Fall $\rho=2$ angewandten Entwicklungen (3) bei WEIERSTRASS, CRELLE's Journal, Bd. 47, S. 291.

teristiken anschliessende Gruppirung der Integralsummen 2. und 3. Gattung mit Bezug auf die 6 Verzweigungspuncte des hyperelliptischen Gebildes.

§ 6. Über die geometrische Anwendung der Formel (III) sei noch eine kurze Bemerkung angeschlossen. Um die Bogenlänge der oben erwähnten Curven auf dem Ellipsoid $\lambda = \lambda_0$ zu bestimmen, mag man die Formel vorerst, durch Verbindung mit der Definitionsgleichung (6) der Grösse E, in die Gestalt bringen:

$$\text{(IV)} \qquad \int_{\beta}^{\nu,\,N} \frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2N} - \int_{\mu_0}^{\mu,\,M} \frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2M}$$

$$= \frac{EB_2 - A_2F}{A_1B_2 - A_2B_1}(u_1 + A_1) + \frac{A_1F - EB_1}{A_1B_2 - A_2B_1}(u_2 + A_2) + \frac{\partial \log \theta(u_1, u_2)}{\partial u_1} + \frac{\partial \log \theta(u_1, u_2)}{\partial u_2}.$$

Diese Formel giebt nun, wenn $u_2 = -A_2$ bleibt, u_1 aber von $-A_1$ an wächst, die Bogenlänge derjenigen *geodätischen Linie*, welche der in (7) definirte Punct (x, y, z) bei der gleichen Annahme über u_2 und u_1 beschreibt. Der *Anfangspunct* des gemessenen Bogenstückes befindet sich in einem der 4 Schnittpuncte der zx-Ebene des Coordinatensystems mit der Krümmungscurve $\mu = \mu_0$ und ist ein *Berührungspunct der geodätischen Linie mit der Krümmungscurve.* Die Formel giebt aber zugleich die Bogenlänge der *Krümmungscurve* $\mu = \mu_0$ von demselben Anfangspuncte aus gerechnet, wenn u_1, u_2 von $-A_1$, $-A_2$ an beide zusammen sich bewegen, dabei aber immer der Bedingung $\theta_{25}(u_1, u_2) = 0$ genügen.

In demselben Sinne also, wie die Formeln (7), *jenachdem sich* u_1, u_2 *nach dem Gesetze*

$$(17) \qquad u_2 = \textit{const.} \qquad \textit{oder} \qquad \theta_{25}(u_1, u_2) = 0$$

bewegen, die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z *der Puncte der geodätischen Linie oder der Krümmungslinie darstellen, giebt die Formel* (IV) *die Bogenlänge entweder der einen oder anderen Curve.*

Sie stellt also auch die Bogenlänge eines aus Stücken der Krümmungscurve und geodätischen Linie *zusammengesetzten* Curvenzuges dar, der bei einer continuirlichen Bewegung des Werthepaares u_1, u_2 durch die Formeln (7) in der Weise construirt wird, dass etwa vom Puncte $-A_1$, $-A_2$ aus zuerst das 1. Gesetz (17) befolgt wird bis zu einem Werthe $u_1 = c_1$, der die Bedingung $\theta_{25}(c_1, -A_2) = 0$ erfüllt, von hier ab das 2. Gesetz

(17) eintritt und gilt bis etwa zu einem Werthepaare c_1', c_2' $[\theta_{25}(c_1', c_2') = 0]$, alsdann mit $u_2 = c_2'$ wieder das 1. Gesetz befolgt wird, u. s. w. Der so construirte Curvenzug auf dem Ellipsoid $\lambda = \lambda_0$ ist allenthalben stetig gekrümmt, indem überall, wo geodätische Linie und Krümmungscurve ineinander übergehen, zwischen beiden Berührung stattfindet.

Eine besondere Gruppe solcher Curvenzüge verdient hervorgehoben zu werden. Lässt man nämlich in (7) zuerst bei constantem $u_2 = -A_2$ die Variable u_1 von $-A_1$ an wachsen bis zu dem übernächsten Werthe, der mit $u_2 = -A_2$ zusammen der Gleichung $\theta_{25}(u_1, u_2) = 0$ genügt, und der, wie sich zeigen lässt, $< (-A_1 - 4A_1 - 4B_1)$ ist, lässt von hier ab aber u_1, u_2 beide dieser Gleichung entsprechend sich weiter bewegen bis zu dem Werthepaare: $-A_1 - 4A_1 - 4B_1$, $-A_2 - 4A_2 - 4B_2$: so beschreibt der Punct (x, y, z) einen *geschlossenen Curvenzug*, der zuerst als geodätische Linie von einem Berührungspuncte mit dem einen der beiden Zweige der Krümmungscurve $\mu = \mu_0$ ausgehend, bis zum nächsten Berührungspunct mit dem nämlichen Zweige sich fortsetzt, von hier aus aber längs dieses Zweiges selbst fortlaufend sich schliesst. Für die *Bogenlänge dieses geschlossenen Curvenzuges* giebt die Formel (IV) mit

$$u_1 = -A_1 - 4A_1 - 4B_1, \qquad u_2 = -A_2 - 4A_2 - 4B_2$$

den (positiven) Werth: $L = -4E - 4F$. Hierbei kommt es übrigens auf den Anfangspunct der Construction des geschlossenen Zuges nicht an.

Diese Bemerkung giebt *die geometrische Bedeutung der doppelten Summe der beiden reellen Periodicitätsmoduln* $-2E$, $-2F$ *des hyperelliptischen Integrals* 2. *Gattung,* welche analog ist der Bedeutung des vierfachen ganzen elliptischen Integrals 2. Gattung als Ausdruckes für den Umfang der Ellipse.

Breslau, im October 1885.