SUR UN THÉORÈME DE M. HERMITE

RELATIF À LA FONCTION $E(x)$

PAR

M. A. STERN

À BERNE.

Une considération très élémentaire conduit à la formule

$$E(x) + E\left(x + \frac{1}{m}\right) + E\left(x + \frac{2}{m}\right) + \ldots + E\left(x + \frac{m-1}{m}\right) = E(mx)$$

que M. Hermite a démontrée dans le T. 5 de ce journal (p. 315).

Soient k et m deux nombres entiers, $k < m$, et

$$x \geqq E(x) + \frac{k}{m}, \qquad x < E(x) + \frac{k+1}{m}.$$

On a donc

$$mx \geqq mE(x) + k, \qquad mx < mE(x) + k + 1$$

et

$$E(mx) = mE(x) + k.$$

D'ailleurs on a

$$x + \frac{m-k-1}{m} < E(x) + \frac{k+1}{m} + \frac{m-k-1}{m}$$

$$x + \frac{m-k}{m} \geqq E(x) + \frac{k}{m} + \frac{m-k}{m}$$

c'est à dire

$$x + \frac{m-k-1}{m} < E(x) + 1$$

$$x + \frac{m-k}{m} \geqq E(x) + 1.$$

Ainsi on voit que chaque terme de la série

$$E(x),\ E\left(x + \frac{1}{m}\right),\ \ldots,\ E\left(x + \frac{m-k-1}{m}\right)$$

a la valeur $E(x)$, pendant que chaque terme de la série

$$E\left(x + \frac{m-k}{m}\right),\ \ldots,\ E\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

est $= E(x) + 1$. La somme de ces deux séries aura donc la valeur

$$(m-k)E(x) + k[E(x) + 1] = mE(x) + k = E(mx).$$

Cette démonstration conduit aussi au théorème suivant:

La valeur de la série

$$S = E\left(x + \frac{1}{m}\right) - E\left(x + \frac{2}{m}\right) + E\left(x + \frac{3}{m}\right) - \ldots \pm E\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

est $= E(x)$, -1, $E(x) + 1$, zéro, selon que les nombres m et k sont tous deux pairs ou tous deux impairs ou m pair et k impair ou m impair et k pair.

1°. Si m et k sont pairs, $m-k-1$ est impair, alors les $m-k-1$ premiers termes de la série se réduisent à un seul qui a la valeur $E(x)$ tandis que les k termes suivants se détruisent mutuellement.

2°. Si m et k sont impairs, $m-k-1$ est aussi impair, la somme des $m-k-1$ premiers termes a la valeur $E(x)$, tandis que les k termes suivants se réduisent à un seul doué du signe négatif, ainsi on a $S = E(x) - [E(x) + 1] = -1$. On voit de même que

3°. Si m est pair et k impair la somme des $m-k-1$ premiers termes sera $= 0$ et la somme des k suivants se réduira à $E(x) + 1$. Et

4°. Si m est impair et k pair, tant la somme des $m-k-1$ premiers termes que la somme des k suivants se réduira à zéro.

En combinant les deux théorèmes par addition et soustraction on trouve les formules suivantes:

Si m est un nombre pair on aura, selon que k est pair ou impair

$$E\left(x + \frac{1}{m}\right) + E\left(x + \frac{3}{m}\right) + E\left(x + \frac{5}{m}\right) + \ldots + E\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

$$= \frac{E(mx)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{E(mx)+1}{2}$$

$$E\left(x + \frac{2}{m}\right) + E\left(x + \frac{4}{m}\right) + \ldots + E\left(x + \frac{m-2}{m}\right)$$

$$= \frac{E(mx)}{2} - E(x) \quad \text{ou} \quad = \frac{E(mx)-1}{2} - E(x).$$

Si m est un nombre impair on aura, selon que k est pair ou impair,

$$E\left(x + \frac{1}{m}\right) + E\left(x + \frac{3}{m}\right) + \ldots + E\left(x + \frac{m-2}{m}\right)$$

$$= \frac{E(mx) - E(x)}{2} \quad \text{ou} \quad = \frac{E(mx) - E(x) - 1}{2}$$

$$E\left(x + \frac{2}{m}\right) + E\left(x + \frac{4}{m}\right) + \ldots + E\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

$$= \frac{E(mx) - E(x)}{2} \quad \text{ou} \quad = \frac{E(mx) - E(x) + 1}{2}.$$

Il est évident que, m étant pair, $E(mx)$ sera pair si k est pair et impair si k est impair, tandis que, m étant impair, $E(mx) - E(x)$ sera pair si k est pair et impair si k est impair.

Les considérations précédentes montrent aussi qu'on peut exprimer la valeur S de la série

$$E\left(x + \frac{1}{m}\right) + 2E\left(x + \frac{2}{m}\right) + \ldots + (m-k-1)E\left(x + \frac{m-k-1}{m}\right)$$

$$+ (m-k)E\left(x + \frac{m-k}{m}\right) + \ldots + (m-1)E\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

au moyen de $E(x)$ et de $E(mx)$.

Car on a

$$S = \frac{(m-k)(m-k-1)}{2} E(x) + \left[\frac{m(m-1)}{2} - \frac{(m-k)(m-k-1)}{2}\right](E(x)+1)$$

$$= \frac{m(m-1)}{2} E(x) + \frac{m(m-1)}{2} - \frac{(m-k)(m-k-1)}{2}.$$

Si, dans cette équation, on substitue $E(mx) - mE(x)$ au lieu de k, on trouve

$$S = \frac{(2m-1)E(mx) - m^2 E(x) - [E(mx) - mE(x)]^2}{2}.$$

Soit p. e. $x = \frac{19}{8}$, $m = 6$, alors on a $E(x) = 2$, $E(mx) = 14$, et

$$S = 39 = \frac{11 \cdot 14 - 2 \cdot 36 - 4}{2}.$$

Il est évident qu'on trouve par la même méthode la valeur de la série beaucoup plus générale

$$f(1)E\left(x + \frac{1}{m}\right) + f(2)E\left(x + \frac{2}{m}\right) + \ldots + f(k-1)E\left(x + \frac{m-k-1}{m}\right) + \cdots$$
$$+ f(m-1)E\left(x + \frac{m-1}{m}\right),$$

$f(k)$ désignant une fonction de k, si l'on suppose connue la valeur d'une série de la forme

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(m).$$

Berne le 7 Janvier 1886.