ANZAHL-BESTIMMUNGEN FÜR LINEARE RÄUME

BELIEBIGER DIMENSION

VON

H. SCHUBERT
in HAMBURG.

In einer Abhandlung, [1] die im 26ten Bande der Mathematischen Annalen (S. 26—51) erschienen ist, habe ich als Funktionen von n alle diejenigen Anzahlen ausgedrückt, welche angeben, wieviel *Strahlen* in einem n-dimensionalen linearen Raume gegebene Grundbedingungen erfüllen, wo unter Grundbedingung jede Bedingung zu verstehen ist, welche verlangt, dass ein Strahl in einem gegebenen α-dimensionalen linearen Raume liegt ($\alpha \overline{\gtrless} n$) und dabei einen in diesem Raume liegenden a-dimensionalen linearen Raum ($a < \alpha$) schneidet, d. h. einpunktig trifft. Zugleich habe ich dort nicht allein für den Strahl sondern auch für die Ebene und überhaupt für jeden p-dimensionalen linearen Raum diejenigen Bedingungen aufgezählt und auch mit passenden Symbolen bezeichnet, welche man als *Grundbedingungen* zu betrachten hat. Ich wiederhole hier diese auch im Folgenden fortwährend angewandte Bezeichnungsweise:

Die Dimension des linearen Raums, in welchem alle vorkommenden Gebilde gedacht werden sollen, heisse stets n. Es bedeute ferner jedes Symbol

$$[a],$$

[1] *Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes.* Von dieser Abhandlung, die ich im Folgenden immer kurz *Fund. Anz.* nennen werde, benutze ich hier hauptsächlich nur die dort in § 2 angeführten, zum Theil auch schon von Herrn VERONESE (Mathematische Annalen, Bd. 19) zusammengestellten, sehr naheliegenden allgemeinen Sätze über lineare Räume und ihre Dimensionen.

wo a irgend eine ganze Zahl oder ein eine ganze Zahl darstellender Buchstaben-Ausdruck ist, einen a-dimensionalen linearen Raum, z. B. [0] einen Punkt, [1] einen Strahl, [2] eine Ebene, u. s. w., endlich $[n]$ den n-dimensionalen linearen Raum, der allen Betrachtungen zu Grunde gelegt wird. Man erhält dann die sämtlichen Grundbedingungen, welche einem $[p]$ auferlegbar sind, wenn man sich auf alle mögliche Weise $p + 1$ Räume $[a_0]$, $[a_1]$, $[a_2]$, ..., $[a_p]$ als gegeben denkt, von denen $[a_0]$ in $[a_1]$, $[a_1]$ in $[a_2]$, $[a_2]$ in $[a_3]$, u. s. w., liegt, und wenn man dann verlangt, dass der $[p]$ mit dem $[a_0]$ einen Punkt, mit dem $[a_1]$ einen Strahl, mit dem $[a_2]$ eine Ebene, und überhaupt mit dem $[a_k]$ einen $[k]$ gemeinsam haben soll. Die Bedingung, welche dadurch dem $[p]$ auferlegt ist, bezeichne ich stets mit

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{p-1}, a_p).$$

Es bedeutet hiernach z. B. das Grundbedingungs-Symbol:

(0, 2), dass ein Strahl einem gegebenen Strahlbüschel angehören soll,

(0, n), dass ein Strahl durch einen gegebenen Punkt gehen soll,

(4, 5), dass ein Strahl in einem gegebenen fünfdimensionalen linearen Raume liegen soll (dass er dabei auch einen in dem [5] liegenden [4] schneiden soll, kann bei der Übersetzung des Symbols fortgelassen werden, weil in einem [5] *jeder* Strahl mit einem [4] einen Punkt gemein hat),

$(n - 3, n - 1, n)$, dass eine Ebene mit einem $[n - 3]$ einen Punkt gemeinsam haben soll,

$(a - 2, a - 1, a)$, dass eine Ebene in einem $[a]$ liegen soll,

(0, 1, 2, 3), dass ein [3] gegeben sein soll,

(0, 1, 4, 5, n), dass ein [4] mit einem gegebenen [5] einen [3] gemeinsam haben soll, und dabei durch einen gegebenen, in dem [5] liegenden Strahl gehen soll.

Aus der Definition des Bedingungssymbols $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ geht hervor, dass $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_p \overline{\gtrless} n$ sein muss. Da a_0 nicht kleiner als 0 sein kann, so kann also auch a_k nicht kleiner als k sein. Indem man die $p + 1$ Buchstaben $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ allen hiernach zulässigen ganzen Zahlen gleichsetzt, erhält man leicht, dass sich einem $[p]$

im ganzen[1] $(n+1)_{p+1} = \frac{\underline{|n+1}}{\underline{|p+1}\,\underline{|n-p}}$ Grundbedingungen auferlegen lassen, wobei die nullfache Grundbedingung $(n-p, n-p+1, \ldots, n-1, n)$ und die Grundbedingung $(0, 1, 2, \ldots, p)$, welche ausspricht, dass der $[p]$ gegeben ist, mitgezählt sind. In den *Fund. Anz.* zeigte ich ferner, dass ein $[p]$ die *Konstanten-Zahl* $(p+1)(n-p)$ hat, und dass die *Dimension der Grundbedingung* $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ gleich

$$(p+1)n - \frac{1}{2}p(p+1) - (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p)$$

ist.

Fundamentale Anzahlen eines $[p]$ mögen nun alle diejenigen Anzahlen heissen, welche angeben, wieviel Gebilde $[p]$ irgend welche gegebene Grundbedingungen erfüllen, wobei die Dimensionssumme der gegebenen Grundbedingungen natürlich gleich der Konstantenzahl $(p+1)(n-p)$ des $[p]$ sein muss.

Was den *Punkt* anbetrifft, so sind für ihn alle fundamentalen Anzahlen selbstverständlich gleich 1. Algebraisch heisst ja dies nichts anderes, als dass, wenn beliebig viele Systeme vonzusammen n Gleichungen ersten Grades zwischen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ gegeben sind, eine einzige Wertgruppe der $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ existiert, die alle Gleichungssysteme zugleich befriedigt.

Was den *Strahl* anbetrifft, so habe ich für ihn die sämmtlichen fundamentalen Anzahlen in den *Fund. Anz.* bestimmt. Die Mittel hierzu lieferte eine Formel, welche jede aus zwei Grundbedingungen zusammengesetzte Bedingung als Summe von nicht-zusammengesetzten Grundbedingungen ausdrückte.[2] Hierbei ergab sich auch die Anzahl der Strahlen, welche in einem $[n]$ einen gegebenen $[a]$ schneiden, dabei in einem durch diesen $[a]$ gehenden $[\alpha]$ liegen, und ausserdem $\alpha + a - 1$ beliebig gegebene $[n-2]$ schneiden. Die Funktion von a und α, welche diese Anzahl ausdrückte,[3] kann folgendermaassen geschrieben werden:

$$\frac{\underline{|\alpha+a-1}\,(\alpha-a)}{\underline{|\alpha}\,\underline{|a}}.$$

---

[1] Hier wie im Folgenden bezeichnet $\underline{|a}$ das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis a, und b_c die Kombinationszahl, welche gleich $\frac{\underline{|b}}{\underline{|c}\,\underline{|b-c}}$ ist.

[2] Vergl. Mathematische Annalen, Bd. 26, S. 40.

[3] Vergl. Mathematische Annalen, Bd. 26, S. 46 oben.

In der vorliegenden Abhandlung ist nun, als ziemlich allgemeines Beispiel für die Bestimmung der fundamentalen Anzahlen von linearen Räumen höherer Dimension, zunächst für die Ebene und dann auch allgemein für den $[p]$, das Analogon bezw. die Verallgemeinerung der eben angegebenen Formel entwickelt. Dem entsprechend zerfällt diese Abhandlung in drei Abschnitte.

Im *ersten* Abschnitt wird die Formel entwickelt, welche für jeden $[p]$ die aus einer beliebigen Grundbedingung $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ und der einfachen Grundbedingung $(n-p-1, n-p+1, n-p+2, \ldots, n)$ zusammengesetzte Bedingung als Summe von nicht zusammengesetzten Grundbedingungen darstellt.[1] Bei der Ableitung dieser Formel habe ich von keinen andern Hilfsmitteln, als von den folgenden beiden allgemeinen Sätzen Gebrauch gemacht. Erstens: Wenn ein $[a]$ und ein $[b]$ so liegen, dass sie einen $[c]$, aber nicht unendlich viele $[c]$, gemeinsam haben, so giebt es immer einen und nur einen $[a+b-c]$, welcher den $[a]$ und den $[b]$ zugleich enthält.[2] Zweitens: Wenn man den beiden Gebilden, welche durch zwei einem Gebilde Γ auferlegte algebraische Bedingungen als gegeben vorausgesetzt werden, eine speciellere Lage zu einander erteilt, so wird die *Anzahl* von Gebilden Γ, welche diese beiden Bedingungen und ausserdem noch irgend welche andere algebraische Bedingungen erfüllen, *erhalten* oder unendlich gross.[3]

---

[1] Man erinnere sich aus meinem Bedingungskalkül (§§ 2 und 3 meines *Kalküls der abzählenden Geometrie,* Leipzig 1879), dass erstens das *Produkt* mehrerer Bedingungen die Bedingung bezeichnet, welche ausspricht, dass jene Bedingungen *zugleich* erfüllt werden sollen, dass zweitens eine einem Gebilde von der Konstantenzahl c auferlegte c-fache Bedingung *gleich der Anzahl* der Gebilde gesetzt wird, die diese Bedingung erfüllen, und dass drittens eine lineare Gleichung zwischen d-fachen Bedingungen, die einem solchen Gebilde auferlegt sind, aussprechen soll, dass aus ihr eine richtige Zahlengleichung entsteht, wenn man jede dieser d-fachen Bedingungen mit einer und derselben $(c-d)$-fachen Bedingung multipliciert, und für die erhaltenen c-fachen Bedingungsprodukte die zugehörigen Anzahlen einsetzt.

[2] Dieser Satz, der für $a=1$, $b=1$, $c=0$ das geometrische Axiom giebt, dass zwei sich schneidende Strahlen zugleich in einer und derselben Ebene liegen, ist algebraisch leicht ersichtlich (Vergl. die *Fund. Anz.,* § 2, III).

[3] Dieser Satz ist nichts anderes als eine Form jenes fruchtbaren, der Algebra entlehnten Princips, das ich in meinem *Kalkül d. abzähl. Geom.* (§ 4) Princip der Erhaltung der Anzahl genannt habe. Bei den Anwendungen hier sind die beiden als gegeben vorausgesetzten Gebilde immer lineare Räume.

Im *zweiten* Abschnitt werde ich, von den kleinsten Werten von a_0 und a_1 ausgehend und allmählich zu den allgemeinen Werten aufsteigend, schliesslich finden, dass die Anzahl der Ebenen, welche die Bedingung (a_0, a_1, a_2) erfüllen und ausserdem jeden von $a_0 + a_1 + a_2 - 3$ gegebenen $(n - 3)$-dimensionalen linearen Räumen einpunktig treffen, durch den folgenden Ausdruck dargestellt wird:

$$\frac{\underline{|a_0 + a_1 + a_2 - 3}\,(a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)}{\underline{|a_0}\,\underline{|a_1}\,\underline{|a_2}}.$$

Im *dritten* Abschnitt wird der Beweis geführt, dass auch die allgemeine Formel, welche aus der Gestalt der eben angeführten Formel und der auf den Strahl bezüglichen analogen Formel für den $[p]$ vermutet werden kann, wirklich richtig ist. Das allgemeinste Resultat dieser Abhandlung ist also die Bestimmung der Anzahl aller derjenigen $[p]$, welche die beliebige Bedingung $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p)$ erfüllen, und mit $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p - \frac{1}{2}p(p+1)$ beliebig gegebenen $[n - p - 1]$ je einen Punkt gemeinsam haben. Die Funktion der Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ und p, welche sich für diese Anzahl ergeben wird, lautet:[1]

$$\frac{\underline{|a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p - \frac{1}{2}p(p+1)}\,.\,D}{\underline{|a_0}\,\underline{|a_1}\,\underline{|a_2}\ldots\underline{|a_p}},$$

wo D das Produkt aller möglichen $\frac{1}{2}p(p+1)$ positiven Differenzen je zweier der Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ ist.

---

[1] Den aus $a_0 = n - p$, $a_1 = n - p + 1$, $a_2 = n - p + 2, \ldots, a_p = n$ resultierenden speciellen Fall dieser Formel sprach ich schon in den Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft (vom April 1884) aus, ohne aber einen Beweis hinzuzufügen. Ist noch specieller auch $p = 1$, so ergiebt sich ein Resultat, zu dem auch Herr Franz Meyer in Tübingen (Mathematische Annalen, Bd. 21, S. 132) und Herr Stephanos (*Thèse* vom Juli 1884), von invariantentheoretischer Seite her, gelangt sind.

I.

Die zusammengesetzte Bedingung $(a_0, a_1)(n - 2, n)$ setzt erstens einen $[a_1]$ und in demselben einen $[a_0]$, zweitens einen $[n - 2]$ als gegeben voraus, und verlangt dann die Strahlen, welche, in dem $[a_1]$ liegend, sowohl den $[a_0]$ als auch den $[n - 2]$ einpunktig treffen. Damit nun aber ein Strahl sowohl in dem $[a_1]$ ganz liege wie auch den $[n - 2]$ schneide, muss er den Raum schneiden, der dem $[a_1]$ und dem $[n - 2]$ gemeinsam ist. Dies ist aber, nach *Fund. Anz.*, § 2, II, ein Raum von der Dimension $a_1 + (n - 2) - n$, d. h. ein $[a_1 - 2]$. Jeder Strahl, der $(a_0, a_1)(n - 2, n)$ erfüllen soll, muss also in dem $[a_1]$ liegen, und dabei erstens einen in dem $[a_1]$ gelegenen $[a_0]$, zweitens auch einen gleichfalls in dem $[a_1]$ gelegenen $[a_1 - 2]$ schneiden. Im Hinblick auf den zweiten der in der Einleitung ausgesprochenen beiden Sätze denken wir uns nun die Lage des $[a_0]$ und des $[a_1 - 2]$ derartig specialisiert, dass sie nicht wie bei allgemeiner Lage einen $[a_0 - 2]$, sondern einen $[a_0 - 1]$ gemeinsam haben. Dann muss nach dem ersten jener beiden Einleitungssätze ein $[a_1 - 1]$ existieren, der beide, den $[a_0]$ und den $[a_1 - 2]$ zugleich enthält. Die gestellte zusammengesetzte Bedingung kann daher jetzt auf zweierlei Weise erfüllt werden, erstens von denjenigen Strahlen in $[a_1]$, welche einen auf dem $[a_0 - 1]$ liegenden Punkt besitzen, zweitens aber auch von denjenigen Strahlen, welche, in dem $[a_1 - 1]$ liegend, sowohl den $[a_0]$ als auch den $[a_1 - 2]$ schneiden. Den $[a_1 - 2]$ schneidet aber jeder in $[a_1 - 1]$ liegende Strahl, weil (*Fund. Anz.*, § 2, II) $(a_1 - 2) + 1 - (a_1 - 1) = 0$ ist. Wir erhalten also die beiden Bedingungen $(a_0 - 1, a_1)$ und $(a_0, a_1 - 1)$. Da diese Bedingungen von derselben Dimension sind, wie die zusammengesetzte Bedingung $(a_0, a_1)(n - 2, n)$, so ist durch die Lage-Specialisierung die Anzahl nicht unendlich gross geworden, und wir erhalten desshalb nach dem zweiten der beiden Einleitungssätze, dass die Anzahl der die Bedingung $(a_0, a_1)(n - 2, n)$ und eine sonstige algebraische Bedingung Z erfüllenden Strahlen gleich der Summe der beiden Anzahlen ist, von denen die erste angiebt, wieviel Strahlen $(a_0 - 1, a_1)$ und Z erfüllen, die zweite angiebt, wieviel Strahlen $(a_0, a_1 - 1)$ und Z erfüllen. In der Sprache der Bedingungs-Symbolik lautet dieses Resultat:

$$(1) \qquad (a_0, a_1)(n-2, n) = (a_0 - 1, a_1) + (a_0, a_1 - 1).$$

Der Gedankengang, welcher zu dieser Formel führte, ist in zwei Fällen zu modificieren, erstens, wenn $a_0 = 0$ ist, zweitens, wenn $a_1 = a_0 + 1$ ist. In diesen Fällen aber erkennt man ohne Weiteres die Richtigkeit der Formeln:

$$(0, a_1)(n-2, n) = (0, a_1 - 1)$$

und

$$(a_0, a_0 + 1)(n-2, n) = (a_0 - 1, a_0 + 1).$$

Daher kann die Formel (1) als allgemeingültig angesehen werden, wenn man die durch ihre Anwendung etwa auftretenden *sinnlosen Bedingungssymbole gleich Null* setzt. Die Sinnlosigkeit entsteht dabei auf zweierlei Weise, erstens dadurch, dass die Anwendung der Formel $(-1, a_1)$ ergeben würde, zweitens dadurch, dass (a_0, a_0) kommen würde.

Auf die soeben für den Strahl aufgestellte Formel lässt sich nun die entsprechende Formel für die *Ebene,* d. h. für $p = 2$, zurückführen, wie folgende Überlegung zeigt. Jede Ebene, welche die Bedingung (a_0, a_1, a_2) und die einfache Bedingung $(n-3, n-1, n)$ zugleich erfüllen soll, muss mit dem Raume, der dem $[a_2]$ und dem $[n-3]$ gemeinsam ist, also mit einem $[a_2 - 3]$, einen Punkt gemeinsam haben. Man lege nun diesen $[a_2 - 3]$ und den gegebenen $[a_1]$ derartig zusammen, dass sie einen $[a_1 - 2]$ gemeinsam haben. Dann muss es nach dem ersten der beiden Einleitungssätze einen $[a_2 - 1]$ geben, der beide, den $[a_2 - 3]$ und den $[a_1]$, zugleich enthält. Demnach wird die gestellte zusammengesetzte Bedingung jetzt in zwei Fällen erfüllt. Erstens erfüllt sie jede Ebene, welche einen Strahl besitzt, der, in dem $[a_1]$ liegend, sowohl den gegebenen $[a_0]$, wie auch den $[a_1 - 2]$ schneidet. Diese Strahlbedingung kann aber, wie aus Formel (1) hervorgeht, wenn man sich dort unter dem $[n]$ den $[a_1]$ vorstellt, gleich $(a_0 - 1, a_1) + (a_0, a_1 - 1)$ gesetzt werden. Zweitens wird die gestellte Bedingung aber auch von jeder Ebene erfüllt, die, in dem $[a_2 - 1]$ liegend, einen Strahl besitzt, der in dem $[a_1]$ gelegen ist, und dabei den $[a_0]$ schneidet, der also (a_0, a_1) erfüllt. Unnötig ist es, hinzuzufügen, dass eine solche Ebene auch den $[a_2 - 3]$ einpunktig treffen muss, weil dies, da $(a_2 - 3) + 2 - (a_2 - 1) = 0$ ist, jede Ebene des $[a_2 - 1]$ thut. Wir erhalten also:

$$(2)\quad (a_0, a_1, a_2)(n-3, n-1, n) = (a_0 - 1, a_1, a_2) + (a_0, a_1 - 1, a_2) + (a_0, a_1, a_2 - 1).$$

Ebenso kann man nun wieder auf diese Formel für die Ebene die analoge, auf den dreidimensionalen, linearen Raum bezügliche Formel stützen, indem man, wenn $(a_0, a_1, a_2, a_3)(n-4, n-2, n-1, n)$ gegeben ist, den $[a_2]$ und den $[a_3 - 4]$, in dem sich der $[a_3]$ und der $[n-4]$ schneiden, so legt, dass sie einen $[a_2 - 3]$ gemeinsam haben, wodurch dann ein $[a_3 - 1]$ entsteht, der sowohl den $[a_2]$ wie auch den $[a_3 - 4]$ enthält. So erhält man, dass die gestellte Bedingung erstens von jedem $[3]$ erfüllt wird, der eine Ebene besitzt, welche den Bedingungen (a_0, a_1, a_2) und $(a_2 - 3, a_2 - 1, a_2)$ zugleich genügt, zweitens aber auch von jedem $[3]$ erfüllt wird, der, in dem $[a_3 - 1]$ liegend, eine Ebene besitzt, die der Bedingung (a_0, a_1, a_2) genügt. Also kommt:

$$(3)\quad (a_0, a_1, a_2, a_3)(n-4, n-2, n-1, n) = (a_0 - 1, a_1, a_2, a_3) + (a_0, a_1 - 1, a_2, a_3) + (a_0, a_1, a_2 - 1, a_3) + (a_0, a_1, a_2, a_3 - 1).$$

Da die Rekursion von p auf $p-1$ unbehindert bleibt, so erhält man schliesslich die allgemeine Formel:

$$(4)\quad (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p)(n-p-1, n-p+1, n-p+2, \ldots, n-1, n)$$
$$= (a_0 - 1, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p) + (a_0, a_1 - 1, a_2, a_3, \ldots, a_p)$$
$$+ (a_0, a_1, a_2 - 1, a_3, \ldots, a_p) + \ldots + (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p - 1).$$

Was oben beim Strahl über Modificationen der Formel (1) gesagt ist, gilt entsprechend auch für die Ebene, für den $[3]$ und für den allgemeinen $[p]$. Danach ist die Anwendung der Formel (4) ganz unbeschränkt, wenn man die durch die Anwendung etwa auftretenden sinnlosen Bedingungssymbole gleich Null setzt. Sinnlos aber wird ein Bedingungssymbol bei der Anwendung der Formel (4) erstens dadurch, dass $a_0 - 1$

gleich -1 wird, weil a_0 Null war, zweitens dadurch, dass zwei durch ein Komma getrennte Zahlen gleich werden, weil vorher a_{i+1} nur um 1 grösser war als a_i.

Wir fügen noch zwei Beispiele hinzu, welche einerseits die Anwendung der entwickelten Formel zeigen sollen, andererseits auch erkennen lassen, wie man mittels derselben fundamentale Anzahlen bestimmen kann. Jede Reihe geht bei diesen Beispielen aus der vorhergehenden durch Multiplication mit der Bedingung erster Dimension und durch Anwendungen unserer Formel hervor.

Für $n = 4$, $p = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_3 = 4$ ergiebt sich zuerst:

$$(1, 2, 4)(1, 3, 4) = (0, 2, 4) + (1, 2, 3)$$

und hieraus nach und nach:

$$(1, 2, 4)(1, 3, 4)^2 = (0, 1, 4) + 2.(0, 2, 3),$$
$$(1, 2, 4)(1, 3, 4)^3 = 3.(0, 1, 3),$$
$$(1, 2, 4)(1, 3, 4)^4 = 3.(0, 1, 2).$$

Da $(0, 1, 2)$ bedeutet, dass die Ebene eine gegebene Lage haben soll, also gleich 1 zu setzen ist, so heisst dieses Resultat in Worten: In einem vierdimensionalen linearen Raume giebt es immer 3 Ebenen, von denen jede eine gegebene Ebene in einer geraden Linie schneidet, und ausserdem vier gegebene Strahlen je einpunktig trifft.

Für $n = 6$, $p = 3$, $a_0 = 2$, $a_1 = 4$, $a_2 = 5$, $a_3 = 6$ ergiebt sich zuerst:

$$(2, 4, 5, 6)^2 = (1, 4, 5, 6) + (2, 3, 5, 6)$$

und dann nach und nach:

$$(2, 4, 5, 6)^3 = (0, 4, 5, 6) + 2.(1, 3, 5, 6) + (2, 3, 4, 6),$$
$$(2, 4, 5, 6)^4 = 3.(0, 3, 5, 6) + 2.(1, 2, 5, 6) + 3.(1, 3, 4, 6) + (2, 3, 4, 5),$$
$$(2, 4, 5, 6)^5 = 5.(0, 2, 5, 6) + 6.(0, 3, 4, 6) + 5.(1, 2, 4, 6) + 4.(1, 3, 4, 5),$$

$$(2, 4, 5, 6)^6 = 5.(0, 1, 5, 6) + 16.(0, 2, 4, 6) + 10.(0, 3, 4, 5) + 5.(1, 2, 3, 6) + 9.(1, 2, 4, 5),$$

$$(2, 4, 5, 6)^7 = 21.(0, 1, 4, 6) + 21.(0, 2, 3, 6) + 35.(0, 2, 4, 5) + 14.(1, 2, 3, 5),$$

$$(2, 4, 5, 6)^8 = 42.(0, 1, 3, 6) + 56.(0, 1, 4, 5) + 70.(0, 2, 3, 5) + 14.(1, 2, 3, 4),$$

$$(2, 4, 5, 6)^9 = 42.(0, 1, 2, 6) + 168.(0, 1, 3, 5) + 84.(0, 2, 3, 4),$$

$$(2, 4, 5, 6)^{10} = 210.(0, 1, 2, 5) + 252.(0, 1, 3, 4),$$

$$(2, 4, 5, 6)^{11} = 462.(0, 1, 2, 4),$$

$$(2, 4, 5, 6)^{12} = 462.(0, 1, 2, 3).$$

Dieses Resultat ergiebt den Satz: In jedem sechsdimensionalen linearen Raume giebt es 462 dreidimensionale lineare Räume, von denen jeder 12 gegebene Ebenen in je einem Punkte trifft.

II.

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist die Auffindung der Funktion, welche für die Ebene die Anzahl

$$(a_0, a_1, a_2)(n-3, n-1, n)^{a_0+a_1+a_2-3}$$

durch a_0, a_1, a_2 ausdrückt. Dabei wollen wir von der folgenden Abkürzung Gebrauch machen. Es bezeichne

$$f(a_0, a_1, a_2)$$

stets die Zahl der Ebenen, welche die Bedingung:

$$(a_0, a_1, a_2)(n-3, n-1, n)^{a_0+a_1+a_2-3}$$

erfüllen, wie klein oder wie gross auch die Zahlen a_0, a_1, a_2 sein mögen. Dann ist nach der in I entwickelten Formel:

$$(5)\quad f(a_0, a_1, a_2) = f(a_0 - 1, a_1, a_2) + f(a_0, a_1 - 1, a_2) + f(a_0, a_1, a_2 - 1),$$

wobei jedoch immer die Symbole $f(-1, b, c)$, $f(a, a, c)$ und $f(a, b, b)$ zu unterdrücken sind. Bei der Ableitung der gesuchten Funktion werden wir beständig von der folgenden, bekannten, auf Kombinationszahlen bezüglichen Formel Gebrauch machen:

$$(6)\quad b_c + (b+1)_c + (b+2)_c + \ldots + (b+d)_c = (b+d+1)_{c+1} - b_{c+1}.$$

Wir wenden zuerst die Formel (5) an, um $f(0, 1, a_2)$ zu bestimmen. Dann erhalten wir:

$$(7)\quad f(0, 1, a_2) = f(0, 1, a_2 - 1) = f(0, 1, a_2 - 2) = \ldots = f(0, 1, 2) = 1.$$

Um weitergehend $f(0, 2, a_2)$ zu bestimmen, addieren wir die $a_2 - 2$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
f(0, 2, a_2) &= f(0, 1, a_2) + f(0, 2, a_2 - 1)\\
f(0, 2, a_2 - 1) &= f(0, 1, a_2 - 1) + f(0, 2, a_2 - 2)\\
f(0, 2, a_2 - 2) &= f(0, 1, a_2 - 2) + f(0, 2, a_2 - 3)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(0, 2, 3) &= f(0, 1, 3) + 0.
\end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir bei Benutzung von (7):

$$f(0, 2, a_2) = a_2 - 2,$$

wofür wir lieber schreiben:

$$(8)\quad f(0, 2, a_2) = (a_2 - 1)_1 - (a_2 - 1)_0.$$

Um $f(0, 3, a_2)$ zu bestimmen, addieren wir die $a_2 - 3$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
f(0, 3, a_2) &= f(0, 2, a_2) + f(0, 3, a_2 - 1)\\
f(0, 3, a_2 - 1) &= f(0, 2, a_2 - 1) + f(0, 3, a_2 - 2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(0, 3, 4) &= f(0, 2, 4) + 0,
\end{aligned}$$

und erhalten:

$$f(0,\ 3,\ a_2) = f(0,\ 2,\ 4) + f(0,\ 2,\ 5) + \ldots + f(0,\ 2,\ a_2),$$

woraus sich bei Benutzung von (8) ergiebt:

$$f(0,\ 3,\ a_2) = (3_1 - 3_0) + (4_1 - 4_0) + \ldots + [(a_2 - 1)_1 - (a_2 - 1)_0],$$

wofür wegen der unter (6) angeführten Kombinationszahl-Formel gesetzt werden kann:

$$(9) \qquad f(0,\ 3,\ a_2) = (a_2)_2 - (a_2)_1 - (3_2 - 3_1)$$
$$= (a_2)_2 - (a_2)_1.$$

Gerade so erhält man mit Benutzung von (9):

$$f(0,\ 4,\ a_2) = (5_2 - 5_1) + (6_2 - 6_1) + \ldots + [(a_2)_2 - (a_2)_1]$$

oder wegen (6):

$$(10) \qquad f(0,\ 4,\ a_2) = (a_2 + 1)_3 - (a_2 + 1)_2,$$

weil $5_3 - 5_2$ Null ist.

So fortfahrend, gelangt man zu:

$$f(0,\ a_1,\ a_2) = [(2a_1 - 3)_{a_1-2} - (2a_1 - 3)_{a_1-3}] + [(2a_1 - 2)_{a_1-2} - (2a_1 - 2)_{a_1-3}] + \ldots$$
$$\ldots + [(a_2 + a_1 - 4)_{a_1-2} - (a_2 + a_1 - 4)_{a_1-3}],$$

woraus man erhält:

$$f(0,\ a_1,\ a_2) = [(a_1 + a_2 - 3)_{a_1-1} - (a_1 + a_2 - 3)_{a_1-2}] - [(2a_1 - 3)_{a_1-1} - (2a_1 - 3)_{a_1-2}].$$

Da die in der letzten Klammer stehenden beiden Kombinationszahlen $(2a_1 - 3)_{a_1-1}$ und $(2a_1 - 3)_{a_1-2}$ einander gleich sind, weil

$$(a_1 - 1) + (a_1 - 2) = 2a_1 - 3$$

ist, so kommt:

$$(11) \qquad f(0,\ a_1,\ a_2) = (a_1 + a_2 - 3)_{a_1-1} - (a_1 + a_2 - 3)_{a_1-2}.$$

Drückt man die Kombinationszahlen durch Fakultäten aus, so erhält diese Formel die Form:

$$(12)\qquad f(0,\ a_1,\ a_2) = \frac{\underline{|a_1 + a_2 - 3} \,.\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, (a_2 - a_1)}{\underline{|a_1}\,\underline{|a_2}}.$$

In derselben Weise bestimmen wir nun auch $f(1,\ a_1,\ a_2)$, indem wir von $f(1,\ 2,\ a_2)$ ausgehen. Wir erhalten:

$$f(1,\ 2,\ a_2) = f(0,\ 2,\ 3) + f(0,\ 2,\ 4) + \ldots + f(0,\ 2,\ a_2),$$

woraus sich bei Benutzung von (8) ergiebt:

$$f(1,\ 2,\ a_2) = (2_1 - 2_0) + (3_1 - 3_0) + \ldots + [(a_2 - 1)_1 - (a_2 - 1)_0],$$

also:

$$(13)\qquad f(1,\ 2,\ a_2) = (a_2)_2 - (a_2)_1 + 1.$$

Bei der Bestimmung von $f(1,\ 3,\ a_2)$ sind die folgenden $a_2 - 3$ Gleichungen zu addieren:

$$\begin{array}{llll}
f(1,\ 3,\ a_2) & = f(0,\ 3,\ a_2) & + f(1,\ 2,\ a_2) & + f(1,\ 3,\ a_2 - 1) \\
f(1,\ 3,\ a_2 - 1) & = f(0,\ 3,\ a_2 - 1) & + f(1,\ 2,\ a_2 - 1) & + f(1,\ 3,\ a_2 - 2) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
f(1,\ 3,\ 4) & = f(0,\ 3,\ 4) & + f(1,\ 2,\ 4) & + 0,
\end{array}$$

sodass man erhält:

$$\begin{aligned} f(1,\ 3,\ a_2) = {} & f(0,\ 3,\ 4) + f(0,\ 3,\ 5) + \ldots + f(0,\ 3,\ a_2) \\ & + f(1,\ 2,\ 4) + f(1,\ 2,\ 5) + \ldots + f(1,\ 2,\ a_2). \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich dann bei Benutzung von (9) und (13):

$$f(1,\ 3,\ a_2) = 2[(a_2 + 1)_3 - (a_2 + 1)_2] + (a_2 + 1)_1,$$

wofür wir lieber schreiben:

$$(14)\quad f(1,\ 3,\ a_2) = [3_1 - 3_0][(a_2 + 1)_3 - (a_2 + 1)_2] + 1_0 \cdot (a_2 + 1)_1.$$

Bei $f(1, 4, a_2)$ erhalten wir zunächst:

$$f(1, 4, a_2) = f(0, 4, 5) + f(0, 4, 6) + \dots + f(0, 4, a_2)$$
$$+ f(1, 3, 5) + f(1, 3, 6) + \dots + f(1, 3, a_2),$$

und hieraus vermittelst (10) und (14):

$$f(1, 4, a_2) = [4_1 - 4_0][(a_2 + 2)_4 - (a_2 + 2)_3] + 2_0 . (a_2 + 2)_2,$$

also schliesslich:

$$(15) \qquad f(1, a_1, a_2) = [(a_1)_1 - (a_1)_0][(a_1 + a_2 - 2)_{a_1} - (a_1 + a_2 - 2)_{a_1 - 1}]$$
$$+ (a_1 - 2)_0 (a_1 + a_2 - 2)_{a_1 - 2}.$$

Auf demselben Wege gelangt man zu:

$$(16) \qquad f(2, a_1, a_2) = [(a_1 + 1)_2 - (a_1 + 1)_1][(a_1 + a_2 - 1)_{a_1 + 1} - (a_1 + a_2 - 1)_{a_1}]$$
$$+ [(a_1 - 1)_1 - (a_1 - 1)_0][(a_1 + a_2 - 1)_{a_1 - 1}].$$

Entwickelt man nun auch noch die Formel für $f(3, a_1, a_2)$, so erkennt man, dass sich dieselbe von der für $f(2, a_1, a_2)$ nur dadurch unterscheidet, dass sowohl die Basen wie die Indices der Kombinationszahlen um 1 gewachsen sind, und man sieht auch leicht aus dem Bildungsgesetze jener Funktionen, dass diese Eigenschaft erhalten bleibt. Daher ist:

$$f(a_0, a_1, a_2) = [(a_0 + a_1 - 1)_{a_0} - (a_0 + a_1 - 1)_{a_0 - 1}]$$
$$\times [(a_0 + a_1 + a_2 - 3)_{a_0 + a_1 - 1} - (a_0 + a_1 + a_2 - 3)_{a_0 + a_1 - 2}]$$
$$+ [(a_0 + a_1 - 3)_{a_0 - 1} - (a_0 + a_1 - 3)_{a_0 - 2}][(a_0 + a_1 + a_2 - 3)_{a_0 + a_1 - 3}].$$

Führt man nun noch statt der Kombinationszahlen Fakultäten ein, so gelangt man nach einiger Umformung zu dem Resultate:

$$(17) \qquad f(a_0, a_1, a_2) = \frac{\underline{|a_0 + a_1 + a_2 - 3} . (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)}{\underline{|a_0} \, \underline{|a_1} \, \underline{|a_2}}.$$

Dies ist also in einem $[n]$ die Zahl der Ebenen, welche in einem $[a_2]$ liegen, einen in dem $[a_2]$ gelegenen $[a_1]$ in einer geraden Linie schneiden, dabei mit einem in dem $[a_1]$ gelegenen $[a_0]$ einen Punkt gemeinsam haben und endlich $a_0 + a_1 + a_2 - 3$ gegebene $[n - 3]$ in je einem Punkte treffen.

III.

Entsprechend der schon in II eingeführten Bezeichnung $f(a_0, a_1, a_2)$ bezeichne allgemein für einen $[p]$

$$f(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p)$$

stets die Anzahl derjenigen $[p]$, welche die Bedingung $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p)$ erfüllen, und welche ausserdem $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p - \frac{1}{2}p(p+1)$ gegebene $[n-p-1]$ einpunktig zu treffen vermögen, d. h. die Anzahl, welche in unserer Symbolik durch die $[(p+1)(n-p)]$-fache zusammengesetzte Bedingung

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)(n-p-1, n-p+1, \ldots, n)^{a_0+a_1+\ldots+a_p-\frac{1}{2}p(p+1)}$$

ausgedrückt wird. Wegen der in I bewiesenen Formel (4) kann man dann setzen:

$$(18) \qquad f(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$$
$$= f(a_0-1, a_1, a_2, \ldots, a_p) + f(a_0, a_1-1, a_2, \ldots, a_p)$$
$$+ f(a_0, a_1, a_2-1, \ldots, a_p) + \ldots + f(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p-1).$$

Es handelt sich nun darum, die Zahl $f(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ wirklich als Funktion der Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ darzustellen. Man kann sich dies, wie auch das zweite Beispiel am Schluss von I zeigt, dadurch bewerkstelligt denken, dass man auf jeden Addenden der rechten Seite von (18) wiederum die Formel (18) anwendet, und so fortfährt, bis schliesslich alle Addenden gleich $f(0, 1, 2, 3, \ldots, p)$ geworden sind, d. h. bis man zu

$$x \cdot f(0, 1, 2, 3, \ldots, p)$$

gekommen ist. Dann muss x die gesuchte Funktion sein, da $f(0, 1, 2, 3, \ldots, p)$ bedeutet, dass der $[p]$ eine gegebene Lage haben soll, d. h. gleich 1 zu setzen ist. Die wirkliche Anwendung der eben erwähnten Reduktionsmethode bietet aber, so lange $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ allgemein bleiben, desswegen bedeutende Schwierigkeiten, weil man, wie in I ausführlich bemerkt ist, bei der Anwendung der Formel (18) darauf achten muss, dass man Symbole, in denen a_0 gleich -1 geworden ist, oder in denen zwei aufeinander folgende Zahlen, wie a_i und a_{i+1}, gleich geworden sind, vollständig zu unterdrücken hat, und an derartigen Symbolen also nicht von neuem die Reduktion anwenden darf. Da man aber, wenn man nur alle diese Bedingungen genau beachtet, auf dem besprochenen Wege zu der gesuchten Funktion gelangen müsste, so konnte der Verfasser schliessen, dass eine Funktion wirklich die Anzahl $f(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ darstellen muss, wenn sie nur die folgenden vier Bedingungen erfüllt:

1. Sie muss der Formel (18) gehorchen;
2. Sie muss für $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ..., $a_p = p$ gleich 1 werden;
3. Sie muss für $a_0 = -1$ Null werden;
4. Sie muss auch Null werden, wenn zwei aufeinander folgende Zahlen gleich sind, also für $a_0 = a_1$, ferner für $a_1 = a_2$, u. s. w. bis für $a_{p-1} = a_p$.

Nun konnte aber der Verfasser aus der Gestalt der in der Einleitung erwähnten Formel für den Strahl, aus der Gestalt der Formel (17) für die Ebene, und aus der Gestalt der auch noch von ihm, analog wie für die Ebene in II, entwickelten Formel für $f(a_0, a_1, a_2, a_3)$, mit Recht vermuten, dass die gesuchte allgemeine Funktion folgendermaassen aussehen muss:

$$\frac{\underline{|a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p - \tfrac{1}{2}p(p+1)}\,.\,D}{\underline{|a_0}\,\underline{|a_1}\,\underline{|a_2}\cdots\underline{|a_p}}, \tag{19}$$

wo D das Produkt aller möglichen $\frac{1}{2}p(p+1)$ positiven Differenzen der Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$, oder, was dasselbe ist, die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_p \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_p^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^p & a_1^p & a_2^p & \ldots & a_p^p \end{vmatrix} \tag{20}$$

bedeutet. Man erkennt sofort, dass die Funktion (19) in der That den drei letzten der vier oben genannten Bedingungen genügt. Es handelt sich also nur noch darum, zu beweisen, dass die Funktion auch der in (18) aufgestellten Funktionalgleichung genügt. Um dieses zu beweisen, betrachten wir den Ausdruck:

$$
(21) \quad \begin{aligned}
&a_0\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2 - a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_3 - a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_p - a_0}\right) \\
&+ a_1\left(1 + \frac{1}{a_0 - a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2 - a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_3 - a_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_p - a_1}\right) \\
&+ a_2\left(1 + \frac{1}{a_0 - a_2}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_2}\right)\left(1 + \frac{1}{a_3 - a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_p - a_2}\right) \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ a_p\left(1 + \frac{1}{a_0 - a_p}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_p}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2 - a_p}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_{p-1} - a_p}\right).
\end{aligned}
$$

Dieser Ausdruck ist eine Summe von $p + 1$ Addenden, und jeder Addend ist ein Produkt von a_i mit einem Produkte von p Summen, deren erster Addend immer 1, und deren zweiter Addend ein Bruch ist. Denkt man sich nun die angedeuteten Multiplicationen sämtlich ausgeführt, so erhält man, da jeder der $p + 1$ Addenden 2^p Addenden liefert, eine Summe von im ganzen $2^p(p + 1)$ Addenden. In dieser Summe denken wir uns dann alle diejenigen Addenden zusammengefasst, welche gar keinen Bruch enthalten, dann auch alle diejenigen, welche einen Bruch enthalten, dann alle die, welche zwei Brüche als Faktoren enthalten, u. s. w. bis zu denjenigen Addenden, welche p Brüche als Faktoren enthalten. Indem wir dann die Summe aller solcher Addenden, die k Brüche enthalten, mit y_k bezeichnen, erhalten wir, dass der Ausdruck in (21) gleich

$$y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{p-1} + y_p$$

ist, wo jedes y_k eine Summe von $p_k.(p + 1) = \frac{|p+1}{|k\,|p-k}$ Addenden umfasst. Man erkennt dann unmittelbar, dass

$$(22) \qquad y_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_p$$

ist. Von den $p(p+1)$ Addenden, aus denen sich y_1 zusammensetzt, fassen wir immer je zwei, welche dieselben beiden Indices enthalten, zusammen, so dass wir erhalten:

$$\begin{aligned} y_1 = z_{01} + z_{02} + z_{03} + \ldots &+ z_{0p} \\ + z_{12} + z_{13} + \ldots &+ z_{1p} \\ + \ldots\ldots\ldots & \\ &+ z_{p-1,p}, \end{aligned}$$

wo z_{ik} gleich $\frac{a_i}{a_k - a_i} + \frac{a_k}{a_i - a_k}$, d. h. aber gleich -1 ist. Es ergiebt sich also für y_1 eine Summe von $\frac{1}{2}p(p+1)$ Addenden, deren jeder gleich -1 ist. Daher ist:

$$y_1 = -\frac{1}{2}p(p+1). \tag{23}$$

Um y_2 zu bestimmen, fassen wir von den $\frac{1}{2}(p+1)p(p-1)$ Addenden, aus denen sich y_2 zusammensetzt, immer je drei, welche dieselben drei Indices enthalten, zusammen, so dass

$$y_2 = \Sigma(z_{ikl})$$

wird, wo das Summenzeichen $\frac{1}{6}(p+1)p(p-1)$ Addenden umfasst, und

$$z_{ikl} = \frac{a_i}{(a_k - a_i)(a_l - a_i)} + \frac{a_k}{(a_i - a_k)(a_l - a_k)} + \frac{a_l}{(a_i - a_l)(a_k - a_l)}$$

gesetzt ist. Addiert man die drei Brüche, aus denen sich z_{ikl} zusammensetzt, so erhält man:

$$z_{ikl} = -\frac{a_i(a_k - a_l) - a_k(a_i - a_l) + a_l(a_i - a_k)}{(a_i - a_k)(a_k - a_l)(a_l - a_i)}.$$

Zähler und Nenner dieses Bruches lassen sich leicht in Determinantenform schreiben und ergeben:

$$z_{ikl} = -\begin{vmatrix} a_i & a_k & a_l \\ a_i & a_k & a_l \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_i & a_k & a_l \\ a_i^2 & a_k^2 & a_l^2 \end{vmatrix},$$

woraus hervorgeht, dass z_{ikl} gleich Null ist, weil in der den Dividendus bildenden Determinante zwei Horizontalreihen gleich sind. Demnach ist y_2 als eine Summe von $\frac{1}{6}(p+1)p(p-1)$ Addenden, deren jeder gleich Null ist, *selbst gleich Null.* Gerade so lässt sich erkennen, dass

$$y_3 = \sum(z_{iklm})$$

ist, wo das Summenzeichen $\frac{1}{24}(p+1)p(p-1)(p-2)$ Addenden umfasst, und

$$z_{iklm} = \frac{a_i}{(a_k-a_i)(a_l-a_i)(a_m-a_i)} + \frac{a_k}{(a_i-a_k)(a_l-a_k)(a_m-a_k)}$$

$$+ \frac{a_l}{(a_i-a_l)(a_k-a_l)(a_m-a_l)} + \frac{a_m}{(a_i-a_m)(a_k-a_m)(a_l-a_m)}$$

ist. Hieraus ergiebt sich aber:

$$z_{iklm} = -\begin{vmatrix} a_i & a_k & a_l & a_m \\ a_i^2 & a_k^2 & a_l^2 & a_m^2 \\ a_i & a_k & a_l & a_m \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_i & a_k & a_l & a_m \\ a_i^2 & a_k^2 & a_l^2 & a_m^2 \\ a_i^3 & a_k^3 & a_l^3 & a_m^3 \end{vmatrix},$$

also ein Quotient, der gleich Null ist, weil sein Dividendus eine Determinante mit zwei gleichen Horizontalreihen ist. Daraus folgt, dass auch $y_3 = 0$ ist.

So erkennt man auch allgemein, dass y_q, wenn nur $q > 1$ ist, gleich Null ist, weil y_q als Summe von $(p+1)_{q+1}$ Addenden aufgefasst werden kann, deren jeder ein verschwindender Determinantenquotient ist. Wir erhalten daher mit Benutzung von (22) und (23), dass der Ausdruck in (21) mit

$$(24) \qquad a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p - \frac{1}{2}p(p+1)$$

identisch ist. Wenn wir daher (24) und (21) mit dem oben bei (19) D genannten Produkte multiplizieren, so erhalten wir die Identität:

$$(25) \qquad \left[a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p - \frac{1}{2}p(p+1)\right].D$$

$$\begin{aligned}
= \quad & a_0(a_1 - a_0 + 1)(a_2 - a_0 + 1)(a_3 - a_0 + 1)\ldots(a_p - a_0 + 1).D_0 \\
& + a_1(a_1 - a_0 - 1)(a_2 - a_1 + 1)(a_3 - a_1 + 1)\ldots(a_p - a_1 + 1).D_1 \\
& + a_2(a_2 - a_0 - 1)(a_2 - a_1 - 1)(a_3 - a_2 + 1)\ldots(a_p - a_2 + 1).D_2 \\
& + a_3(a_3 - a_2 - 1)(a_3 - a_1 - 1)(a_3 - a_2 - 1)\ldots(a_p - a_3 + 1).D_3 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + a_p(a_p - a_0 - 1)(a_p - a_1 - 1)(a_p - a_2 - 1)\ldots(a_p - a_{p-1} - 1).D_p,
\end{aligned}$$

wo jedes D_k das Produkt aller möglichen $\frac{1}{2}(p-1)p$ positiven Differenzen je zweier der Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_p$ ist. Multiplizieren wir die Identität (25) nun noch mit

$$\frac{\underline{|a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p - \frac{1}{2}p(p+1) - 1}}{\underline{|a_0}\,\underline{|a_1}\,\underline{|a_2}\ldots\underline{|a_p}},$$

so erhalten wir links die Funktion (19) und rechts eine Summe von $p + 1$ Addenden, von denen der erste aus (19) hervorgeht, wenn man in (19) überall a_0 durch $a_0 - 1$ ersetzt, und von denen überhaupt der $(k+1)^{\text{te}}$ aus (19) hervorgeht, wenn man dort überall a_k durch $a_k - 1$ ersetzt. Damit ist bewiesen, dass die in (19) aufgestellte Funktion in der That die in (18) angegebene Funktionalgleichung erfüllt, und also die gesuchte Anzahl $f(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ darstellt. Wir können daher den Satz aussprechen:

Es sei gegeben in einem $[n]$ *ein* $[a_p]$, *in ihm liegend ein* $[a_{p-1}]$, *in diesem liegend ein* $[a_{p-2}]$ *u. s. w. bis zu einem* $[a_0]$, *der in einem* $[a_1]$ *liegt; ferner seien gegeben* $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots - \frac{1}{2}p(p+1)$ *lineare Räume, sämtlich von der Dimension* $n - p - 1$. *Dann giebt es eine endliche Anzahl von p-dimensionalen linearen Räumen, von denen jeder mit dem* $[a_0]$

einen Punkt, mit dem $[a_1]$ *einen Strahl, überhaupt mit dem* $[a_k]$ *einen* $[k]$ *gemeinsam hat, und ausserdem jeden der gegebenen* $[n-p-1]$ *einpunktig trifft. Diese endliche Anzahl ist gleich*

$$(26) \qquad \frac{|\underline{a_0+a_1+a_2+\ldots+a_p-\tfrac{1}{2}p(p+1)}\,.\,D}{|\underline{a_0}\;|\underline{a_1}\;|\underline{a_2}\cdots|\underline{a_p}},$$

wo D *das Produkt aller möglichen positiven Differenzen je zweier der Zahlen* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ *bedeutet. (Jede eckige Klammer bedeutet einen linearen Raum, dessen Dimension gleich der in der eckigen Klammer befindlichen Zahl ist.)*

Von diesem allgemeinen Resultate aus kann man zu der von mir in den Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft vom Jahre 1884 mitgeteilten Anzahl durch Specialisierung auf zwei Wegen gelangen, erstens, indem man

$$a_0 = n-p, \qquad a_1 = n-p+1, \qquad a_2 = n-p+2, \ldots, a_p = n$$

setzt, zweitens auch, indem man

$$a_0 = n-p-1, \qquad a_1 = n-p+1, \qquad a_2 = n-p+2, \ldots, a_p = n$$

setzt. In beiden Fällen ergiebt sich übereinstimmend:

$$(27) \qquad \frac{|\underline{(p+1)(n-p)}\;|\underline{1}\;|\underline{2}\;|\underline{3}\cdots|\underline{p}}{|\underline{n}\;|\underline{n-1}\;|\underline{n-2}\cdots|\underline{n-p}}.$$

Setzt man hier $p = 1$, so erhält man die Anzahl, zu der auch die Herren Franz Meyer und Stephanos (vgl. die Anmerkung am Schluss der Einleitung) gelangt sind. Setzt man ferner in (26):

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = n-p+1, \qquad a_2 = n-p+2, \ldots, a_p = n,$$

so erhält man:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p = np + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}p^2$$

und

$$D = [(n-p+1)(n-p+2)\ldots n]\,.\,|\underline{p-1}\;|\underline{p-2}\cdots|\underline{1},$$

also

$$\frac{\underline{|p(n-p)}\;\underline{|1}\;\underline{|2}\;\underline{|3}\ldots\underline{|p-1}}{\underline{|n-1}\;\underline{|n-2}\ldots\underline{|n-p}} \tag{28}$$

für die Anzahl aller derjenigen p-dimensionalen linearen Räume, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und $p(n-p)$ gegebene $(n-p-1)$-dimensionale lineare Räume einpunktig treffen. Für $p=1$ wird diese Anzahl stets gleich 1, wie gross auch n sein mag, was auch unmittelbar erkennt werden kann.

Setzt man endlich voraus, dass $p=n-1$ ist, so ergiebt sich aus (26) stets die Zahl 1, welche zulässigen Werte man auch für $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ setzen mag. Auch dieses Resultat kann man voraussehen, wenn man beachtet, dass im $[n]$ ein $[n-1]$ einem Punkte dual entspricht, und dass alle fundamentale Anzahlen des Punktes 1 sein müssen.

Hamburg, im August 1885.