ÜBER GEWISSE TRINOMISCHE KOMPLEXE ZAHLEN

VON

K. SCHWERING
in COESFELD.

Seien p und λ irgend zwei reelle ungerade Primzahlen, x eine Wurzel der Gleichung

$$x^p = 1,$$

α eine solche der Gleichung

$$\alpha^\lambda = 1,$$

wo aber $x = 1$ und $\alpha = 1$ ausgeschlossen werden soll und

$$p = 2n\lambda + 1.$$

Ferner möge g eine primitive Wurzel $(\mathrm{mod}\, p)$ sein. Setzen wir dann

$$(\alpha, x) = x + \alpha . x^g + \alpha^2 . x^{g^2} + \alpha^3 . x^{g^3} + \ldots + \alpha^{p-2} . x^{g^{p-2}},$$

so ist die von C. G. J. JACOBI eingeführte ψ-Funktion durch die Gleichung gegeben:

$$\psi(\alpha) = \frac{(\alpha^h, x) . (\alpha^k, x)}{(\alpha^{h+k}, x)}.$$

Mit der Theorie dieser ψ-Funktion haben sich die hervorragendsten Mathematiker beschäftigt. Insbesondere hat schon JACOBI gezeigt, dass sich die Anzahl der wirklich verschiedenen ψ stets auf $\frac{\lambda}{6}$ (in runder Zahl) reduciren lasse, und Herr L. KRONECKER hat in einem sehr interessanten Aufsatze *Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 93, Seite 338 ff.) bewiesen, dass die Darstellung des Ausdruckes $(\alpha, x)^\lambda$ durch Produkte konjugirter ψ — mit gewissen Eigenschaften der trinomischen komplexen Zahl

$$1 - \zeta^l + \zeta^m; \; \zeta^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} + 1 = 0$$

zusammenhängt. Diese Untersuchungen KRONECKER's zwingen zur Darstellung der *Norm* jener komplexen Zahlen, und so trat mir in einem höchst interessanten Specialfalle jene in theoretischer und besonders in praktischer Beziehung so wichtige Aufgabe entgegen, *die Norm einer trinomischen komplexen Zahl anzugeben.* Das blosse mechanische Ausrechnen der Norm ist nicht allein zeitraubend, sondern auch von gar geringem allgemeineren Vorteil. *Ich stellte mir daher die Aufgabe, ein Verfahren zu ermitteln, welches die Norm einer trinomischen komplexen Zahl schnell und sicher zu finden gestattet.* Die Lösung ergab sich durch Darstellung der Norm als algebraische *Form.* Diese Formen scheinen eine genauere Beachtung zu verdienen, da ihre *Koefficienten* viele merkwürdige Eigenschaften zeigen und die *Zahl der wesentlich verschiedenen Formen* in genauem Zusammenhange mit der durch L. KRONECKER gegebenen Zurückführung der ψ-Funktionen sich befindet.

§ 1.

Sei λ eine Primzahl und α eine komplexe Wurzel der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$. Wir betrachten die Zahl $z + \alpha - \alpha^{\nu+1}$, wo ν eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \lambda - 2$ ist. Wir suchen die *Norm* dieser Zahl, also:

$$N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = (z + \alpha - \alpha^{\nu+1})(z + \alpha^2 - \alpha^{2\nu+2}) \ldots (z + \alpha^{\lambda-1} - \alpha^{(\lambda-1)(\nu+1)}),$$

oder

$$N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = \prod(z + \alpha^h - \alpha^{h\nu+h}). \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,\lambda-1)}$$

Zu diesem Zwecke gehen wir nach der NEWTON-WARING'schen Methode zu Werke. Wir bilden aus den Potenzsummen der $\lambda - 1$ Grössen $-\alpha^r + \alpha^{r(\nu+1)}$ die Koefficienten der Gleichung $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Wurzeln sie sind. Wenn man setzt:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}, \\ F(\alpha^r) &= a_0 + a_1\alpha^r + a_2\alpha^{2r} + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{r(\lambda-1)}, \end{aligned}$$

dann ist

$$F(\alpha) + F(\alpha^2) + \ldots + F(\alpha^{\lambda-1}) = \sum_1^{\lambda-1}{}_r F(\alpha^r)$$

und, weil $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0$,

$$\sum_1^{\lambda-1}{}_r F(\alpha^r) = (\lambda - 1)a_0 - a_1 - a_2 - \ldots - a_{\lambda-1} = \lambda a_0 - F(1).$$

Wir haben also:

$$(1) \qquad \sum_1^{\lambda-1}{}_r F(\alpha^r) = \lambda a_0 - F(1).$$

Wenden wir diese Schlüsse jetzt auf unsere Potenzsummen an. Die Summe der h^{ten} Potenzen ist:

$$(2) \qquad s_h = \sum_1^{\lambda-1}{}_r (-\alpha^r + \alpha^{r(\nu+1)})^h.$$

Entwickeln wir nach dem binomischen Lehrsatze, so wird das k^{te} Glied werden:

$$(-1)^{h+k} \cdot \frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} \cdot \alpha^{r(h+k\nu)} .$$

Wie Formel (1) zeigt, haben wir nun zunächst dasjenige k zu ermitteln, für welches $h + k\nu$ *teilbar durch* λ *wird,* denn dieses Glied verdient die Bezeichnung a_0. Da $h > k$ und $h < \lambda$, so hat die Kongruenz $h + k\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}$ nur *eine* Auflösung, es entsteht nur *ein* solches Glied. Zudem ist $F(1) = 0$, da $F(\alpha) = (-\alpha + \alpha^{\nu+1})^h$. Folglich liefert uns (1) folgenden Wert:

$$(3) \qquad s_h = \lambda.(-1)^{h+k} \cdot \frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k},$$

wo zu dem *gegebenen* h das zugeordnete k so zu bestimmen ist, dass wird:

$$(4) \qquad \left| \begin{array}{l} h + k\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}, \\ \qquad h > k. \end{array} \right.$$

Zur Auffindung der Zahlenpaare h, k geben wir nun folgende Vorschrift: *Man schreibe alle Zahlen von* 1 *bis* $\lambda - 1$ *nieder. Unter jede* *schreibe man den kleinsten positiven Rest der betreffenden mit ν multiplicirten Zahl. Dann addire man die übereinander stehenden Zahlenpaare. Ist die Summe grösser als λ, so verwerfe man das Paar. Ist die Summe kleiner als λ, so hat man ein Zahlenpaar gewonnen. Denn die betreffende Zahl der ersten Reihe ist k und die darunter stehende Zahl der zweiten Reihe gibt von λ subtrahirt h.*

Beweis. Ist die Zahl der ersten Reihe k, so ist die darunter stehende Zahl r_ν der zweiten Reihe so beschaffen, dass $r_\nu \equiv k\nu \pmod{\lambda}$ und zugleich $r_\nu + k < \lambda$. Dann ist also $\lambda - r_\nu + k\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}$ und zugleich $\lambda - r_\nu > k$. Folglich besitzt $\lambda - r_\nu$ beide in (4) angegebenen Eigenschaften der Zahlen h. Man erhält auch *sämtliche* h durch das obige Verfahren. Denn h muss gleich $\lambda - r_\nu$ sein, um der Kongruenz $h + k\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}$ zu genügen und $h > k$ zieht $\lambda > r_\nu + k$ nach sich.

Die Anzahl der Zahlenpaare h, k ist genau gleich $\frac{\lambda - 1}{2}$.

Beweis. Zu jedem Zahlenpaare h, k gehört ein zweites $\lambda - h$, $\lambda - k$, welches auch der Kongruenz $\lambda - h + \nu(\lambda - k) \equiv 0 \pmod{\lambda}$ genügt. Aber der zweiten Bedingung (4) genügt es *nicht*. Denn, wenn $h > k$, so ist $\lambda - h < \lambda - k$. Zu jedem »passenden» Zahlenpaare h, k gehört ein »nicht passendes». Also ist die Zahl der »passenden» die Hälfte der sämtlichen, w. z. b. w.

Diese Zahlenpaare h, k treten im wesentlichen schon bei E. Kummer auf; sie erscheinen ihm bei Zerlegung der Funktion $\psi(\alpha)$ in ihre idealen Primfaktoren. Vergl. auch Bachmann, *die Lehre von der Kreisteilung*, (Leipzig, Teubner 1872) S. 274.

Gehört zu einem h kein passendes k, so ist $a_0 = 0$, also $s_h = 0$. Also:

Die Hälfte aller auftretenden Potenzsummen hat den Wert Null.

Zahlenbeispiel: $\lambda = 11$, $\nu = 2$.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \\
2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 1, & 3, & 5, & 7, & 9.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccccc}
k = & 1, & 2, & 3, & 6, & 7, \\
h = & 9, & 7, & 5, & 10, & 8.
\end{array}
$$

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_6 = 0; \qquad s_5 = 11 . 10, \qquad s_7 = -11 . 21,$$
$$s_8 = -11 . 8, \qquad s_9 = 11 . 9, \qquad s_{10} = 11 . 210.$$

Noch eine wichtige Bemerkung über die h, k müssen wir machen. Die Summe beliebig vieler h, welche kleiner als λ ist, wird immer wieder eine Zahl h und die Summe der zugehörigen k ist das zur Summe gehörige k. Denn aus

$$h_1 + k_1\nu \equiv 0, \qquad h_2 + k_2\nu \equiv 0, \quad \ldots, \quad h_r + k_r\nu \equiv 0 \pmod{\lambda},$$
$$h_1 > k_1 \quad, \qquad h_2 > k_2 \quad, \quad \ldots, \quad h_r > k_r$$

folgt:

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_r + \nu(k_1 + k_2 + \ldots + k_r) \equiv 0 \pmod{\lambda},$$
$$h_1 + h_2 + \ldots + h_r > k_1 + k_2 + \ldots + k_r.$$

Die Summen erfüllen beide Bedingungen (4), sind also Zahlenpaare aus der Reihe der h, k. Hieraus folgt, dass *die Summe von Zahlen h, so lange sie kleiner als λ bleibt, niemals zu einem »nicht passenden» Zahlenpaare führen kann, also nicht zu einem Zahlenpaare, dessen s_h verschwindet.* Und *eine Zahl h, deren zugehöriges k die Einheit ist, kann niemals als Summe anderer Zahlen h erscheinen.*

Beispiel: $\lambda = 29$, $\nu = 11$.

$$\left| \begin{array}{l} h = 7,\ 10,\ 13,\ 14,\ 17,\ 18,\ 20,\ 21,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28, \\ k = 2,\ \ 7,\ 12,\ \ 4,\ \ 9,\ \ 1,\ 14,\ \ 6,\ 19,\ 11,\ \ 3,\ 24,\ 16,\ \ 8. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} 7 + 7 + 7 = 21 \\ 2 + 2 + 2 = 6 \end{array}\right|, \qquad \left.\begin{array}{r} 10 + 13 = 23 \\ 7 + 12 = 19 \end{array}\right|, \qquad \left.\begin{array}{r} 7 + 7 + 10 = 24 \\ 2 + 2 + 7 = 11 \end{array}\right|.$$

§ 2.

Setzen wir jetzt:

$$(5) \qquad N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + p_1 z^{\lambda-2} + p_2 z^{\lambda-3} + \ldots + p_{\lambda-1}.$$

Dann lautet die WARING'sche Formel:

$$p_i = \sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i}}{1^{\lambda_1}.2^{\lambda_2}\ldots i^{\lambda_i}.\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\ldots\underline{|\lambda_i}}.s_1^{\lambda_1}.s_2^{\lambda_2}\ldots s_i^{\lambda_i}. \tag{6}$$

Dabei ist die Summation auf alle Wertsysteme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ zu erstrecken, welche der Gleichung genügen:

$$i = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + i\lambda_i. \tag{7}$$

Die WARING'sche Formel gehört zu den bekanntesten Gleichungen der Algebra. Man kann ihre Richtigkeit folgendermassen darthun. Sei

$$F(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n.$$

Dann ist:

$$\frac{F(z)}{z^n} = \left(1 - \frac{z_1}{z}\right)\left(1 - \frac{z_2}{z}\right)\ldots\left(1 - \frac{z_n}{z}\right).$$

Nun ist:

$$\log\left(1 - \frac{z_1}{z}\right) = -\frac{z_1}{z} - \frac{1}{2}\frac{z_1^2}{z^2} - \frac{1}{3}\frac{z_1^3}{z^3} - \ldots$$

Daher wird, wenn wir $s_h = z_1^h + z_2^h + \ldots + z_n^h$ einführen,

$$\log\frac{F(z)}{z^n} = -s_1.\frac{1}{z} - \frac{1}{2}s_2.\frac{1}{z^2} - \ldots - \frac{1}{h}.s_h.\frac{1}{z^h} - \ldots,$$

also:

$$\frac{F(z)}{z^n} = e^{-s_1.\frac{1}{z}}.e^{-\frac{1}{2}s_2.\frac{1}{z^2}}\ldots e^{-\frac{1}{h}.s_h.\frac{1}{z^h}}\ldots$$

Mithin erscheint $\frac{F(z)}{z^n}$ als Produkt folgender Faktoren:

$$1 - \frac{1}{h}.s_h.\frac{1}{z^h} + \frac{1}{\underline{|2}}\frac{1}{h^2}s_h^2\frac{1}{z^{2h}} - \frac{1}{\underline{|3}}\frac{1}{h^3}.s_h^3.\frac{1}{z^{3h}} + \ldots \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

Man erhält also für $\frac{F(z)}{z^n}$ eine nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ geordnete unendliche Reihe. Multipliciren wir mit z^n, so entsteht links eine *ganze* Funktion von z; also muss die unendliche Reihe die Eigenschaft haben, dass sie beim n^{ten} Gliede abbricht, dass also die Koefficienten der Potenzen mit negativen Exponenten verschwinden. Ordnen wir nach Vollzug der Multiplication, so erhalten wir Gleichung (6).

Diese Herleitung der WARING'schen Formel hat ausser ihrer Kürze und Einfachheit den Vorteil, dass sie eine Methode angibt, die Koefficienten p_i übersichtlich aufzuschreiben.

Da in unserm Falle die Hälfte aller s_h Null ist, so ist die Anzahl der Auflösungen der Gleichung (7) eine sehr beschränkte. Wir müssen nämlich, um p_i darzustellen, die Zahl i als Zahl h auffassen und aus Zahlen h durch Addition zusammensetzen. Es handelt sich hier um Zahlen, die kleiner als λ sind; und wir haben gesehen, dass die Addition solcher Zahlen h, deren Summe auch kleiner als λ ist, immer wieder Zahlen derselben Reihe h ergibt. Zur Bildung eines p_i, dessen zugehöriges s_i *verschwindet,* liefern also *nicht* verschwindende s_h keinen Beitrag. Solche p_i (i eine »nicht passende» Zahl) verschwinden also ebenfalls. Folglich:

In $N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1})$ *ist die eine Hälfte aller Koefficienten der Potenzen von* z *gleich Null.*

Wenn wir zur Bestimmung der einzelnen Koefficienten übergehen, so erscheint es zweckmässig, die Entwicklung nach steigenden Potenzen von z vorzunehmen. Man findet folgende Ergebnisse:

1. Das von z freie Glied ist λ. Denn setzen wir

$$\varphi(z) = \frac{z^\lambda - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{\lambda-1},$$

so ist

$$\prod_{1}^{\lambda-1}{}_r(\alpha^r - \alpha^{r(\nu+1)}) = \prod_{1}^{\lambda-1}{}_r(1 - \alpha^{r\nu}) = \varphi(1) = \lambda.$$

Für die folgenden Sätze geben wir den Beweis an späterer Stelle.

Man bilde den *numerus socius* von ν, nämlich μ mit der Eigenschaft:

$$\mu\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Dann wird

2. Der Koefficient von z in $N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1})$

$$\lambda\frac{\lambda - 2\mu - 1}{2}.$$

3. Der Koefficient von z^2 in $N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1})$ ist entweder

$$\lambda\frac{(\lambda - 3\mu - 1)(\lambda - 3\mu - 2)}{2 \cdot 3}; \quad \text{wenn nämlich } 2\mu < \lambda;$$

oder

$$\lambda\frac{(2\lambda - 3\mu - 1)(2\lambda - 3\mu - 2)}{2 \cdot 3}, \quad \text{wenn } 2\mu > \lambda.$$

4. Der Koefficient von z^3 in $N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1})$ ist

(a) $$\lambda\frac{(\lambda - 4\mu - 1)(\lambda - 4\mu - 2)(\lambda - 4\mu - 3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad \text{wenn} \quad 2\mu < \lambda, \qquad 3\mu < \lambda.$$

(b) $$\lambda\frac{(\lambda - 4\mu - 1)(\lambda - 4\mu - 2)(\lambda - 4\mu - 3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \lambda^2\frac{(\lambda - 3\mu - 1)(\lambda - 3\mu - 2)}{2 \cdot 3},$$
$$\text{wenn} \quad 2\mu < \lambda, \qquad 3\mu > \lambda.$$

(c) $$\lambda\frac{(2\lambda - 4\mu - 1)(2\lambda - 4\mu - 2)(2\lambda - 4\mu - 3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \lambda^2\frac{(\lambda - 2\mu - 1)^2}{8},$$
$$\text{wenn} \quad 2\mu > \lambda, \qquad 3\mu < 2\lambda.$$

(d) $$\lambda\frac{(3\lambda - 4\mu - 1)(3\lambda - 4\mu - 2)(3\lambda - 4\mu - 3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad \text{wenn } 2\mu > \lambda, \quad 3\mu > 2\lambda.$$

Aus diesen Werten erkennt man deutlich den Charakter der zu erwartenden Resultate.

§ 3.

Es ist

$$N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = N(z\alpha^{-\nu-1} + \alpha^{-\nu} - 1)$$
$$= N(z\alpha^{\nu+1} + \alpha^{\nu} - 1) = N(1 - \alpha^{\nu} - \alpha^{\nu+1} . z).$$

Ersetzen wir jetzt die Einheit durch x und bilden:

$$N(x - \alpha^{\nu} - \alpha^{\nu+1} . z).$$

Zu diesem Zwecke müssen wir wieder die Potenzsummen der Wurzeln bilden und dann nach Waring's Formel verfahren. Es ist hier

$$s_h = \sum_{1}^{\lambda-1}{}_r(\alpha^{\nu r} + \alpha^{(\nu+1)r}z)^h.$$

Entwickeln wir nach dem binomischen Lehrsatze

$$F(\alpha) = (\alpha^{\nu} + \alpha^{\nu+1} . z)^h,$$

so wird das allgemeine Glied:

$$\frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{1 . 2 \ldots k} . \alpha^{\nu h + k} . z^k .$$

Wie wir in Gleichung (1) gesehen haben, kommt es auf die Bestimmung desjenigen k an, welches bewirkt, dass $\nu h + k \equiv 0 \pmod{\lambda}$ wird. Wir haben schon oben μ durch die Kongruenz eingeführt:

$$(8) \qquad \mu\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Es wird also k so zu bestimmen sein, dass die Kongruenz stattfindet:

$$(9) \qquad h + \mu k \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Zugleich muss $h > k$ sein. Damit sind wir denn auf diejenige Norm geführt, in welcher ν durch μ ersetzt ist, nämlich auf $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$. Nun ist nach Gleichung (1)

$$s_h = \sum_1^{\lambda-1}{}_r (\alpha^{\nu r} + \alpha^{(\nu+1)r} . z)^h = \lambda \frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{1 . 2 \ldots k} z^k - (1 + z)^h.$$

Hier bedeuten h, k die zur Norm $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ gehörigen Zahlenpaare. Wenn man nun z durch $-z$ ersetzt und beiderseits mit $(-1)^h$ multiplicirt, so erhält man:

$$\sum_1^{\lambda-1}{}_r (-\alpha^{\nu r} + \alpha^{(\nu+1)r} . z)^h = (-1)^{h+k} . \lambda \frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{1 . 2 \ldots k} z^k - (-1 + z)^h,$$

oder mit Erinnerung an Formel (3)

$$\sum_1^{\lambda-1}{}_r (-\alpha^{\nu r} + \alpha^{(\nu+1)r} . z)^h + (-1 + z)^h = z^k \sum_1^{\lambda-1}{}_r (-\alpha^r + \alpha^{r(\mu+1)})^h.$$

Wenn nun nach der WARING'schen Formel aus den Potenzsummen

$$\sum_1^{\lambda-1}{}_r (-\alpha^r + \alpha^{r(\mu+1)})^h$$

die Gleichung gebildet wird, so erhält man $N(x + \alpha - \alpha^{\mu+1})$, welches etwa die Form haben möge:

$$N(x + \alpha - \alpha^{\mu+1}) = x^{\lambda-1} + q_1 x^{\lambda-2} + q_2 x^{\lambda-3} + \ldots + q_{\lambda-1},\cdot$$

oder wie wir von jetzt ab immer schreiben werden:

$$(10) \qquad N(x + \alpha - \alpha^{\mu+1}) = x^{\lambda-1} + \sum q_h x^{\lambda-h-1};$$

wenn aber aus den Potenzsummen $z^k \sum(-\alpha^r + \alpha^{r(\mu+1)})^h$ die Gleichung gebildet wird, so kommt zu jedem q_h noch der Multiplikator z^k hinzu. Dies ist zweifellos, wenn q_h *nur* von s_h einen Beitrag erhält. Ist dagegen h auch aus kleineren h durch Addition zusammengesetzt, so muss man sich erinnern, dass dann die Summe der zusammensetzenden h die Summe der entsprechenden k als k besitzt. Wir haben nun:

$$(11) \qquad \sum_1^{\lambda-1}{}_r(-\alpha^{\nu r} + \alpha^{(\nu+1)r}.z)^h + (-1 + z)^h = 0^h + z^k \sum_1^{\lambda-1}(-\alpha^r + \alpha^{r(\mu+1)})^h.$$

Links und rechts befinden sich λ Summanden und deren 1^{te}, 2^{te}, ..., $\lambda - 1^{\text{te}}$ Potenzsummen stimmen überein. Bilden wir also nach WARING's Formel die zu beiden gehörenden Gleichungen, wobei wir auf der rechten Seite jedem q_h den Faktor z^k beifügen müssen, so entsteht eine Identität. Selbstverständlich muss dafür gesorgt werden, dass eine Wurzel der links entstehenden Gleichung Null sei. Wir erhalten dann links die Grösse:

$$(x - z + 1)N(x + \alpha^\nu - \alpha^{\nu+1}.z) - (1 - z)N(\alpha^\nu - \alpha^{\nu+1}.z)$$

oder mit Erinnerung an die Funktion $\varphi(z)$, Seite 63:

$$(x + 1 - z)N(x + \alpha^\nu - \alpha^{\nu+1}.z) + z^\lambda - 1.$$

Daher die Identität:

$$(12) \qquad (x + 1 - z)N(x + \alpha^\nu - \alpha^{\nu+1}.z) + z^\lambda - 1 = x^\lambda + \sum q_h x^{\lambda-h} z^k,$$

$$[\mu\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}, \quad h + \mu k \equiv 0 \pmod{\lambda}, \quad h > k].$$

Zu $h = \lambda - 1$ gehört $k = \nu$; denn $\lambda - 1 + \mu\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}$ und $\lambda - 1 > \nu$. Ersetzen wir noch z und x durch $\frac{z}{y}$ und $\frac{x}{y}$, so wird:

$$(13) \quad (x + y - z)N(x + \alpha^\nu y - \alpha^{\nu+1}.z) + z^\lambda - y^\lambda - x^\lambda = \sum q_h x^{\lambda-h}.y^{h-k}.z^k.$$

Die Summation erstreckt sich auf alle Wertepaare h, k, welche den Bedingungen genügen:

$$(14) \quad \mu\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}, \qquad h + \mu k \equiv 0 \pmod{\lambda}, \qquad h > k, \qquad h < \lambda.$$

Die Gleichung (13) *enthält ein Hauptresultat unserer Untersuchungen.*

Ersetzen wir noch α durch α^{μ}, so wird

$$(15) \quad (x + y - z)N(x + \alpha y - \alpha^{\mu+1}.z) + z^{\lambda} - y^{\lambda} - x^{\lambda} = \Sigma q_h x^{\lambda-h}.y^{h-k}.z^{k}.$$

Die q_h sind durch die Gleichung definirt:

$$N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1}) = z^{\lambda-1} + \Sigma q_h z^{\lambda-1-h}.$$

Ist bei den Summen nichts anderes ausdrücklich bemerkt, so gelten immer die Bedingungen (14). Da sämtliche q_h den Faktor λ enthalten, so kann man ihn abtrennen und die arithmetische Form $F(x, y, z)$ λ^{ter} Ordnung mit drei Variablen durch die Gleichung definiren:

$$(16) \qquad \lambda.F(x, y, z) = \Sigma q_h x^{\lambda-h}.y^{h-k}.z^{k}.$$

§ 4.

Nehmen wir in Gleichung (12) $x = -1$, so wird, wenn man zugleich z durch $-z$ ersetzt,

$$(17) \qquad N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + \Sigma(-1)^{h+k+1}.q_h.z^{k-1}.$$

Anderseits ist:

$$N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + \Sigma p_h z^{\lambda-h-1},$$

$$h + k\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}, \qquad h > k.$$

Die vorige Summe erstreckte sich auf die h, k, welche den Bedingungen genügen $h + k\mu \equiv 0 \pmod{\lambda}$, $h > k$. Nun ist aber

$$\lambda - k + \nu(\lambda - h) \equiv 0 \pmod{\lambda}, \qquad \lambda - k > \lambda - h,$$

sobald $h + k\mu \equiv 0$, $h > k$ ist. Daher kann man die letzte Summe auch so schreiben:

$$N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + \sum p_{\lambda-k} \,.\, z^{k-1}, \tag{18}$$

$$(h + k\mu \equiv 0, \quad h > k).$$

Demnach erhält man:

$$p_{\lambda-k} = (-1)^{h+k+1} \,.\, q_h. \tag{19}$$

Dies ist ein zweites Hauptresultat. Es wird später *für die praktische Berechnung der q* von hervorragender Bedeutung sein.

Nehmen wir in (12) $x = z$, so wird

$$N(z + \alpha^{\nu} - \alpha^{\nu+1}.z) = 1 + \sum q_h z^{\lambda-h+k}.$$

Also

$$N\left(1 + \alpha^{\nu}.\frac{1}{z} - \alpha^{\nu+1}\right) = N\left(\frac{1}{z} + \alpha - \alpha^{\lambda-\mu}\right) = z^{-\lambda+1} + \sum q_h z^{-h+k+1},$$

oder:

$$N(z + \alpha - \alpha^{\lambda-\mu}) = z^{\lambda-1} + \sum q_h z^{h-k-1}. \tag{20}$$

Auch hieraus kann man eine der Gleichung (19) analoge ableiten. Die dabei auftretende ist aber praktisch von geringerem Nutzen als (19). Sei nun

$$(\mu + 1)\xi \equiv 1 \pmod{\lambda}. \tag{21}$$

Dann ist $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1}) = N(z + \alpha^{\xi} - \alpha)$. Also nach leichten Umformungen:

$$N(z + \alpha - \alpha^{\xi}) = z^{\lambda-1} + \sum(-1)^h . q_h . z^{\lambda-1-h}. \tag{22}$$

Durch ähnliche Schlüsse finden wir, da

$$(\lambda - \mu)(\lambda - \nu) \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

$$(\nu + 1)(\lambda - \xi + 1) \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

$$N(z + \alpha - \alpha^{\lambda-\nu}) = z^{\lambda-1} + \sum(-1)^{h-k+1} q_h . z^{h-k-1} \tag{23}$$

$$N(z + \alpha - \alpha^{\lambda-\xi+1}) = z^{\lambda-1} + \sum(-1)^h q_h . z^{k-1}. \tag{24}$$

Die 6 Normen $N(z+\alpha-\alpha^{\mu+1})$, $N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1})$, $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\mu})$, $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\nu})$, $N(z+\alpha-\alpha^{\xi})$, $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\xi+1})$ *sind auf einander zurückführbar* und können in *einer* Berechnung gefunden werden. Wollte man jede selbständig durch Zahlenpaare h, k und WARING's Formel bilden, so würde man finden:

1. $N(z+\alpha-\alpha^{\mu+1})$ gehört an das Paar h, k; d. h.

$$h+\mu k\equiv 0 \pmod{\lambda},\qquad h>k.$$

2. $N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1})$ gehört an $\lambda-k$, $\lambda-h$,

weil $\lambda-k+\nu(\lambda-h)\equiv 0 \pmod{\lambda}$

und $\lambda-k>\lambda-h$.

3. $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\mu})$ gehört an $\lambda-h+k$, k,

weil $\lambda-h+k+(\lambda-\mu-1)k\equiv 0 \pmod{\lambda}$

und $\lambda-h+k>k$.

4. $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\nu})$ gehört an $\lambda-h+k$, $\lambda-h$,

weil $\lambda-h+k+(\lambda-\nu-1)(\lambda-h)\equiv 0 \pmod{\lambda}$

und $\lambda-h+k>\lambda-h$.

5. $N(z+\alpha-\alpha^{\xi})$ gehört an h, $h-k$,

weil $h+(\xi-1)(h-k)\equiv 0 \pmod{\lambda}$

und $h>h-k$.

6. $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\xi+1})$ gehört an $\lambda-k$, $h-k$,

weil $\lambda-k+(\lambda-\xi)(h-k)\equiv 0 \pmod{\lambda}$

und $\lambda-k>h-k$.

Stellen wir ferner die Gleichungen zusammen, welche die Beziehungen der 6 Funktionen ausdrücken.

$$(25)\quad \left|\begin{array}{lll}
1. & N(z+\alpha-\alpha^{\mu+1}) & = z^{\lambda-1}+\sum q_h z^{\lambda-1-h}, \\
2. & N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1}) & = z^{\lambda-1}+\sum(-1)^{h+k+1} q_h \,.\, z^{k-1}, \\
3. & N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\mu}) & = z^{\lambda-1}+\sum q_h z^{h-k-1}, \\
4. & N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\nu}) & = z^{\lambda-1}+\sum(-1)^{h+k+1} \,.\, q_h \,.\, z^{h-k-1}, \\
5. & N(z+\alpha-\alpha^{\xi}) & = z^{\lambda-1}+\sum(-1)^{h} q_h \,.\, z^{\lambda-h-1}, \\
6. & N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\xi+1}) & = z^{\lambda-1}+\sum(-1)^{h} q_h \,.\, z^{k-1}.
\end{array}\right.$$

Dabei ist

$$(26)\qquad \mu\nu \equiv 1, \qquad (\mu+1)\xi \equiv 1, \qquad (\lambda-\mu)(\lambda-\nu) \equiv 1,$$
$$(\nu+1)(\lambda-\xi+1) \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Zahlenbeispiel. $\lambda = 11$, $\mu = 2$, $\nu = 6$, $\xi = 4$.

$$1.\quad \left.\begin{array}{r} h = 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \\ k = 3,\ 2,\ 7,\ 1,\ 6 \end{array}\right\} \text{ zu } N(z+\alpha-\alpha^{3});$$

$$2.\quad \left.\begin{array}{r} \lambda-k = 8,\ 9,\ 4,\ 10,\ 5 \\ \lambda-h = 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1 \end{array}\right\} \text{ zu } N(z+\alpha-\alpha^{7});$$

$$3.\quad \left.\begin{array}{r} \lambda-h+k = 9,\ 6,\ 10,\ 3,\ 7 \\ k = 3,\ 2,\ 7,\ 1,\ 6 \end{array}\right\} \text{ zu } N(z+\alpha-\alpha^{9});$$

$$4.\quad \left.\begin{array}{r} \lambda-h+k = 9,\ 6,\ 10,\ 3,\ 7 \\ \lambda-h = 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1 \end{array}\right\} \text{ zu } N(z+\alpha-\alpha^{5});$$

$$5.\quad \left.\begin{array}{r} h = 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \\ h-k = 2,\ 5,\ 1,\ 8,\ 4 \end{array}\right\} \text{ zu } N(z+\alpha-\alpha^{4});$$

$$6.\quad \left.\begin{array}{r} \lambda-k = 8,\ 9,\ 4,\ 10,\ 5 \\ h-k = 2,\ 5,\ 1,\ 8,\ 4 \end{array}\right\} \text{ zu } N(z+\alpha-\alpha^{8}).$$

$$q_5 = -2 \,.\, 11, \qquad q_7 = 3 \,.\, 11, \qquad q_8 = 1 \,.\, 11, \qquad q_9 = -1 \,.\, 11,$$
$$q_{10} = 1 \,.\, 11.$$

Daher hat man die Normen: ($\alpha^{11} = 1$)

$$N(z + \alpha - \alpha^3) = z^{10} + 11(-2z^5 + 3z^3 + z^2 - z + 1),$$
$$N(z + \alpha - \alpha^7) = z^{10} + 11(2z^2 + 3z + z^6 + 1 - z^5),$$
$$N(z + \alpha - \alpha^9) = z^{10} + 11(-2z + 3z^4 + 1 - z^7 + z^3),$$
$$N(z + \alpha - \alpha^5) = z^{10} + 11(2z + 3z^4 + 1 + z^7 - z^3),$$
$$N(z + \alpha - \alpha^4) = z^{10} + 11(2z^5 - 3z^3 + z^2 + z + 1),$$
$$N(z + \alpha - \alpha^8) = z^{10} + 11(2z^2 - 3z + z^6 + 1 + z^5).$$

§ 5.

Wir wollen jetzt über die *Anzahl* der *verschiedenen*, nicht auf einander zurückführbaren *komplexen Zahlen von der Form* $z + \alpha - \alpha^{\mu+1}$ einige Untersuchungen durchführen.

Für $\mu = 1$ wird $\nu = 1$; ferner $\lambda - \nu = \lambda - \mu = \lambda - 1$ und

$$\xi = \lambda - \xi + 1 = \frac{\lambda + 1}{2}.$$

Die drei Zahlen $z + \alpha - \alpha^2$, $z + \alpha - \alpha^{\lambda-1}$, $z + \alpha - \alpha^{\frac{1}{2}(\lambda+1)}$ bilden eine *drei*gliedrige Gruppe mit Normen, die in *einer* Berechnung gefunden werden. Dabei ist bemerkenswert, dass $1 - \alpha - \alpha^{-1}$ immer eine komplexe Einheit ist. Denn (vergl. KRONECKER, *de unitatibus complexis*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 93, S. 23) es ist

$$1 - \alpha + \alpha^2 = \frac{1 + \alpha^3}{1 + \alpha}.$$

Es ist also $N(z + \alpha - \alpha^2) = 1$ für $z = -1$, oder $\sum(-1)^h q_h = 0$, wenn $h + k \equiv 0 \pmod{\lambda}$, $h > k$. Daraus ergibt sich die interessante Gleichung:

$$1 + \sum(-1)^{k+1}\frac{(\lambda-k-1)(\lambda-k-2)\ldots(\lambda-2k+1)}{2.3\ldots k} = 0. \qquad \left(k=2,3,4,\ldots,\frac{\lambda-1}{2}\right) \tag{27}$$

So ist für $\lambda = 11$ und $\lambda = 13$ bezüglich

$$1 - 4 + 7 - 5 + 1 = 0; \qquad 1 - 5 + 12 - 14 + 7 - 1 = 0.$$

Scheiden wir die dreigliedrige Gruppe aus, so bleiben für λ von der Form $\lambda = 6k + 5$ in der Reihe $2, 3, \ldots, \lambda - 1$ noch $6k$ Zahlen übrig. Wir erhalten also $N(z + \alpha - \alpha^2)$, welches 3 Normen vertritt und ausserdem $6k$ Normen, die in k Gruppen zerfallen. Im ganzen finden wir also $\frac{\lambda + 1}{6}$ Gruppen. Die eine enthält 3, jede der übrigen 6 verschiedene Normen. Für $\lambda = 6k + 1$ dagegen ist eine Zahl δ angebbar, so dass $\delta^2 + \delta + 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}$. Dann wird für $\mu = \delta$, $\nu = \delta^2$, $\lambda - \mu = \delta^2 + 1$, $\lambda - \nu = \delta + 1$, $\xi = \lambda - \delta$, $\lambda - \xi + 1 = \delta + 1$. Folglich erhalten wir nur *zwei* verschiedene Normen in dieser Gruppe, nämlich $N(z + \alpha - \alpha^{\delta+1})$ und $N(z + \alpha - \alpha^{\delta^2+1})$. Hier erhalten wir also im ganzen $\frac{\lambda + 5}{6}$ Normengruppen. Die eine enthält 3, eine zweite 2, die übrigen je 6 Normen.

Mit dieser Gruppirung der Normen trinomischer komplexer Zahlen befindet sich die Gruppirung der JACOBI*'schen $\psi(\alpha)$ in vollkommenster Übereinstimmung.* Man vergleiche meinen kleinen Aufsatz im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 93, S. 337.

An dieser Stelle wollen wir noch einige Bemerkungen über die q_h beifügen.

1. Sie haben sämtlich den Faktor λ, weil alle s_h den Faktor λ haben.

2. Die Kongruenz $h + k\mu \equiv 0 \pmod{\lambda}$ liefert für $k = 1$ den Wert $h = \lambda - \mu$. Daraus folgt $s_{\lambda-\mu} = (-1)^{\lambda-\mu+1} \cdot \lambda(\lambda - \mu)$. Und da h nicht aus kleineren h zusammengesetzt ist, weil $k = 1$, so folgt

$$q_{\lambda-\mu} = (-1)^{\mu+1} \cdot \lambda; \tag{28}$$

Gleichung (19) liefert daher $p_{\lambda-1} = \lambda$. In allen diesen Normen ist also, wie wir schon oben feststellen konnten, das von z freie Glied λ. Wie Gleichung (25 n° 5) zeigt, ist in $N(z + \alpha - \alpha^\xi)$ der Koefficient von $z^{\mu-1}$ ebenfalls $(-1)^h q_{\lambda-\mu}$ also gleich λ. Und nun ist in $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ der Koefficient von $z^{\xi-2}$ ebenfalls λ, da wir nur ξ mit $\mu + 1$ zu vertauschen haben, um $N(z + \alpha - \alpha^\xi)$ in $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ überzuführen. Also:

In $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ erscheint unter den Koefficienten q_h dreimal der Wert λ. Der Koefficient von $z^{\mu-1}$ ist $(-1)^{\mu-1}\lambda$; der Koefficient von $z^{\xi-2}$ und das von z freie Glied sind λ. In $N(z + \alpha - \alpha^2)$ tritt λ nur *zweimal* auf.

3. Ähnliche Schlüsse gelten für $k = 2$. Die Kongruenz $h + k\mu \equiv 0 \pmod{\lambda}$

liefert $h = \lambda - 2\mu$, wenn $2\mu < \lambda$ oder $h = 2\lambda - 2\mu$, wenn $2\mu > \lambda$. Ist $\lambda - 2\mu < 2$, also $\lambda = 2\mu + 1$, so fehlt das betreffende Glied, also ist $q_h = 0$. Im Falle $h = \lambda - 2\mu$ ist für Gleichung (7) nur *eine* Auflösung vorhanden, also h nicht zusammensetzbar aus kleineren h. Demnach ergibt sich unmittelbar q_h aus s_h. Im Falle $h = 2\lambda - 2\mu$, $2\mu > \lambda$ ist für (7) eine zweite Auflösung vorhanden, nämlich $\lambda - \mu + \lambda - \mu = 2\lambda - 2\mu$. Die WARING'sche Formel ist also in diesem Falle zweigliedrig, aber die Ausrechnung ergibt dasselbe Resultat wie im ersten Falle. Wir haben das Resultat schon zu Ende des § 2 mitgeteilt. Die übrigen dort gegebenen Werte findet man durch Betrachtung der Fälle $k = 3, 4$.

§ 6.

Wir wollen jetzt in einigen einfachen Fällen $\mu = 1, 2, 3$ *die Normen als Reihen darstellen* und eine allgemein gültige Entwicklung geben.

Nach unsern Bezeichnungen ist $\mu\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}$, und wir dürfen $\nu > \mu$ voraussetzen. Denn die Fälle $\mu = 1$, $\nu = 1$; $\mu = \lambda - 1$, $\nu = \lambda - 1$ oder $\mu = \nu$ werden in besonderer Betrachtung erledigt. Die Kongruenz $h + \mu k \equiv 0 \pmod{\lambda}$ kann durch folgende Gleichungen ersetzt werden:

$$\left.\begin{array}{l} h + \mu k = 1\lambda \\ h + \mu k = 2\lambda \\ \dots\dots\dots\dots \\ h + \mu k = \mu\lambda \end{array}\right| . \qquad (h > k)$$

Man hat also für die r^{te} Reihe $h = r\lambda - \mu k$, und da $h > k$, so folgt $(\mu + 1)k < r\lambda$. Anderseits ist $h < \lambda$, also $\mu k > (r - 1)\lambda$. Wir erhalten also für die k der r^{ten} Gruppe die Grenzen

$$\frac{r\lambda}{\mu + 1} > k > \frac{(r - 1)\lambda}{\mu}. \tag{29}$$

Betrachten wir nun die erste Gruppe genauer. Seien h_1, k_1 und h_2, k_2 zwei derselben angehörende Paare, so ist $h_1 + h_2 + \mu(k_1 + k_2) = 2\lambda$. Also gehört $h_1 + h_2$ entweder der *zweiten* Gruppe an oder es ist *nicht vorhanden*. Letzteres würde für $h_1 + h_2 > \lambda$ stattfinden. Hieraus folgt, dass die h der ersten Gruppe nicht aus kleineren h als Summanden zusammengesetzt sein können. Mithin gelingt für die erste Gruppe unmittelbar die Bildung von q_h aus s_h. Durch Anwendung von (3) schliessen wir daher sofort: In $N(z+\alpha-\alpha^{\mu+1})$ kommt eine Reihe von Gliedern F_1 vor, welche gegeben sind durch die Gleichung:

$$F_1 = \lambda(-1)^{\mu+1} z^{\mu-1} + \lambda \sum\nolimits_k (-1)^{(\mu+1)k} \frac{(\lambda-\mu k-1)(\lambda-\mu k-2)\ldots(\mu k-k+1)}{2.3\ldots k} z^{\mu k-1}.$$

$$k = 2,\ 3,\ \ldots,\ E\left(\frac{\lambda}{\mu+1}\right).$$

Für die zweite Gruppe könnten wir zwar einen ähnlichen Ausdruck bilden; aber sie wird von Gliedern der ersten Gruppe beeinflusst und zwar nicht in einfach angebbarer Weise. Dieses Ziel erreichen wir durch eine andere Gruppirung folgendermassen. Wir beweisen leicht aus (29)

$$(30)\qquad \frac{(\mu-r+1)\lambda}{\mu} > \lambda - k > \frac{(\mu-r+1)\lambda}{\mu+1}.$$

Daraus entstehen folgende Gruppen:

$$(31)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\lambda}{\mu} > \lambda - k > \dfrac{\lambda}{\mu+1}, \\ \dfrac{2\lambda}{\mu} > \lambda - k > \dfrac{2\lambda}{\mu+1}, \\ \dfrac{3\lambda}{\mu} > \lambda - k > \dfrac{3\lambda}{\mu+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\mu\lambda}{\mu} > \lambda - k > \dfrac{\mu\lambda}{\mu+1}. \end{array}\right.$$

Diese Gruppen haben nun die Eigenschaft, dass immer zwei Zahlen $\lambda - k$ der s^{ten} und t^{ten} Reihe in ihrer Summe eine Zahl der $(s+t)^{\text{ten}}$ Reihe ergeben. Man addire nur die s^{te} und t^{te} Ungleichung. Die $\lambda - k$ als Zahlen h liefern aber, wie wir in § 4 gesehen haben, $N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1})$. Bilden wir also:

$$\varphi_r = \lambda \sum (-1)^{h+k+1} . \frac{1}{\lambda-k} \frac{(\lambda-k)(\lambda-k-1)\ldots(h-k+1)}{1.2\ldots(\lambda-h)} . z^{-\lambda+k},$$

$$\frac{r\lambda}{\mu} > \lambda - k > \frac{r\lambda}{\mu+1}; \qquad h + \mu k = (\mu - r + 1)\lambda;$$

so wird

$$\frac{N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1})}{z^{\lambda-1}} = e^{\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_\mu+\frac{1}{z^\lambda}\cdot R},$$

wo R aus dem zu Anfang des § 2 Gesagten als eine unendliche für unser Resultat unwesentliche Reihe klar ist. Daher ist

$$N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + z^{\lambda-1}.\varphi_1 + z^{\lambda-1}\left(\varphi_2+\frac{1}{2}\varphi_1^2\right)$$

$$+ z^{\lambda-1}\left(\varphi_3+\varphi_1\varphi_2+\frac{1}{6}\varphi_1^3\right) + \dots.$$

Die Klammern umschliessen Glieder, deren Zahlen $\lambda-k$ von 2-, 3-, ...-facher Zusammensetzung sind aus kleineren Zahlen $\lambda-k$. Die umständlichste Rechnung würden die Glieder μ-facher Zusammensetzung erfordern. Aber für diese Glieder wenden wir Formel (19) an und erhalten sie so unmittelbar. Daher gelangen wir zu folgendem Schlussergebniss.

»Man bilde:

$$\varphi_r = \lambda\sum(-1)^{h+k+1}.\frac{1}{h}\,\frac{h(h-1)\dots(h-k+1)}{1.2\dots k}.z^{-h}, \qquad {\scriptstyle r=1,2,\dots,\mu-1)}$$

$$\frac{r\lambda}{\mu} > h > \frac{r\lambda}{\mu+1}; \qquad k = \lambda r - \mu h;$$

$$f_1 = \lambda\sum\frac{1}{h}\,\frac{h(h-1)\dots(h-k+1)}{1.2\dots k}z^{k-1},$$

$$k = 1,\ 2,\ \dots,\ E\left(\frac{\lambda}{\mu+1}\right); \qquad h = \lambda-\mu k.$$

Dann ist:

$$N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + f_1 + z^{\lambda-1}.\varphi_1 + z^{\lambda-1}\left(\varphi_2+\frac{1}{2}\varphi_1^2\right) \tag{32}$$

$$+ z^{\lambda-1}\left(\varphi_3+\varphi_2\varphi_1+\frac{1}{6}\varphi_1^3\right) + z^{\lambda-1}\left(\varphi_4+\varphi_3\varphi_1+\frac{1}{2}\varphi_2^2+\frac{1}{2}\varphi_2\varphi_1^2+\frac{1}{24}\varphi_1^4\right) + \dots«$$

Als Beispiele teilen wir die Gleichungen mit:

$$N(z+\alpha-\alpha^2) = z^{\lambda-1} + \lambda + \lambda\sum \frac{(\lambda-k-1)\ldots(\lambda-2k+1)}{2\ldots k} z^{k-1},$$

$$k = 2,\ 3,\ \ldots,\ \frac{\lambda-1}{2}.$$

$$N(z+\alpha-\alpha^3) = z^{\lambda-1} - \lambda z + \lambda\sum_2^{2n}{}_k \frac{(\lambda-2k-1)\ldots(\lambda-3k+1)}{2\ldots k}\cdot(-1)^k\cdot z^{2k-1}$$

$$+\lambda z^{2n-2} + \lambda\sum_2^{n}{}_k \frac{(2n+k-1)\ldots(3k)}{2\ldots(2n+1-2k)} z^{2n-2k},$$

wenn $\lambda = 6n+1$.

$$N(z+\alpha-\alpha^3) = z^{\lambda-1} - \lambda z + \sum_2^{2n+1}{}_k \frac{(\lambda-2k-1)\ldots(\lambda-3k+1)}{2\ldots k}(-1)^k\cdot z^{2k-1}$$

$$+\lambda z^{2n} + \lambda\sum_2^{n}{}_k \frac{(2n+k)\ldots(3k-1)}{2\ldots(2n-2k+3)}\cdot z^{2n-2k+2},$$

wenn $\lambda = 6n+5$.

Für $\mu = 3$, $\lambda = 12n+1$ erhalten wir:

$$N(z+\alpha-\alpha^4) = z^{\lambda-1} + \lambda(f_1 + \varphi_1 + \Psi).$$

Hier ist:

$$f_1 = z^2 + \frac{\lambda-7}{2}\cdot z^5 + \frac{(\lambda-10)(\lambda-11)}{2\cdot 3} z^8 + \frac{(\lambda-13)(\lambda-14)(\lambda-15)}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot z^{11} + \ldots$$

$$\varphi_1 = \lambda + \frac{(4n-2)(4n-3)(4n-4)}{2\cdot 3\cdot 4} z^3 + \frac{(4n-3)\ldots(4n-8)}{2\ldots 7} z^6$$

$$+\frac{(4n-4)\ldots(4n-12)}{2\ldots 10} z^9 + \ldots$$

$$\Psi = -(2n+1)z + \frac{(2n-1)(16n^3+80n^2-21n-30)}{15} z^4 + \ldots$$

Die Reihe Ψ enthält die *zweifach* zusammengesetzten q_h. Das Bildungsgesetz ist nicht erkennbar, und darum thut man wohl, an der Reihe (32) festzuhalten.

§ 7.

Eine andere Methode zur Berechnung der q_h ergibt sich folgendermassen.

Wenn man in Gleichung (15) $z = x + y$ setzt, so wird:

$$(x + y)^\lambda = x^\lambda + y^\lambda + \Sigma q_h x^{\lambda-h} . y^{h-k} . (x + y)^k .$$

Nehmen wir also $y = 1$, so erhalten wir die einfache Gleichung:

$$(x + 1)^\lambda = x^\lambda + 1 + \Sigma q_h x^{\lambda-h} (x + 1)^k . \tag{33}$$

Entwickeln wir nun rechts und links nach Potenzen von x, so erhalten wir Rekursionsformeln von der Gestalt:

$$q_{\lambda-1} = \lambda,$$

$$q_{\lambda-2} + k_1 . q_{\lambda-1} = \lambda \frac{\lambda - 1}{2},$$

$$q_{\lambda-3} + k_2 . q_{\lambda-2} + \frac{k_1(k_1 - 1)}{1 . 2} q_{\lambda-1} = \lambda \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{2 . 3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hier bedeutet k_r das zu $h = \lambda - r$ gehörige k, so dass

$$r \equiv \mu k_r, \qquad k_r \equiv \nu r \pmod{\lambda}.$$

So wird also $k_1 = \nu$; $k_2 = 2\nu$ oder $= 2\nu - \lambda$; $k_3 = 3\nu$ oder $= 3\nu - \lambda$ oder $= 3\nu - 2\lambda$; u. s. w.

Hiernach lassen sich die Resultate des § 2 wohl am einfachsten ableiten. Vergleichen wir die *höchsten* Exponenten, so erhalten wir Gleichungen von der Form

$$q_{h_1} = \lambda,$$

$$q_{h_2} + k_1 . q_{h_1} = \lambda \frac{\lambda - 1}{2},$$

$$q_{h_3} + k_2 . q_{h_2} + \frac{k_1(k_1 - 1)}{1 . 2} q_{h_1} = \lambda \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{2 . 3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hier bedeutet k_r das zu h_r gehörende k und gehorcht der Kongruenz

$$k_r \equiv -\xi r \pmod{\lambda},$$

so dass $k_1 = \lambda - \xi$; $k_2 = \lambda - 2\xi$ oder $= 2\lambda - 2\xi$ ist; u. s. w.

Man kann auch die Gleichung erhalten

$$(x+1)^\lambda = x^\lambda + 1 + \Sigma(-1)^h . x^k . (x+1)^{h-k}. \tag{34}$$

Dann erhält man ein ähnliches System von Rekursionsformeln. Die erste wird

$$q_{\lambda-\mu} = (-1)^{\mu+1} . \lambda.$$

Man sieht, dass so von *drei* Seiten her der Zugang zu den q_h eröffnet ist. Und dadurch erhält unsere Methode den Charakter vollkommenen Abschlusses; denn der Wert λ tritt unter den q_h im allgemeinen an *drei* Stellen auf.

Da $\lambda - h$ entweder gleich μk oder gleich $\mu k - g\lambda$ ist, wo g eine ganze Zahl bedeutet, so haben wir noch

$$(x+1)^\lambda = x^\lambda + 1 + \Sigma q_h x^{-g\lambda}(x^{\mu+1} + x^\mu)^k,$$

oder, wenn wir x durch α ersetzen,

$$(\alpha+1)^\lambda = 2 + \Sigma q_h (\alpha^{\mu+1} + \alpha^\mu)^k. \tag{35}$$

Da die Gleichung $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grades, welche α bestimmt, irreduktibel ist, so kann man auch aus der letzten Formel eine Methode ableiten, welche die Werte der q_h finden lässt.

§ 8.

Wir wollen jetzt *einige weitere Eigenschaften unserer Normen* aufzählen.

Vertauscht man z mit $-z$, so führt Gleichung (15) zu nachstehender Beziehung:

$$(x+y+z)N(x + y\alpha + z\alpha^{\mu+1}) - x^\lambda - y^\lambda - z^\lambda \tag{36}$$
$$= \Sigma(-1)^k . q_h . x^{\lambda-h} . y^{h-k} . z^k.$$

Analog erhält man durch Vertauschung von α mit α^ξ und y mit z

$$(37)\qquad (x+y+z)N(x+y\alpha+z\alpha^\xi)-x^\lambda-y^\lambda-z^\lambda$$
$$=\Sigma(-1)^k\,.\,q_h\,.\,x^{\lambda-h}\,.\,y^k\,.\,z^{h-k}.$$

Andere Formeln erhält man ohne Mühe in ähnlicher Weise und zwar

$$(38)\qquad (x+y+z)N(x+y\alpha+z\alpha^{\nu+1})-x^\lambda-y^\lambda-z^\lambda$$
$$=\Sigma(-1)^k\,.\,q_h\,.\,x^k\,.\,y^{h-k}\,.\,z^{\lambda-h},$$

$$(39)\qquad (x+y+z)N(x+y\alpha+z\alpha^{\lambda-\xi+1})-x^\lambda-y^\lambda-z^\lambda$$
$$=\Sigma(-1)^k\,.\,q_h\,.\,x^k\,.\,y^{\lambda-h}\,.\,z^{h-k},$$

$$(40)\qquad (x+y+z)N(x+y\alpha+z\alpha^{\lambda-\mu})-x^\lambda-y^\lambda-z^\lambda$$
$$=\Sigma(-1)^k\,.\,q_h\,.\,x^{h-k}\,.\,y^{\lambda-h}\,.\,z^k,$$

$$(41)\qquad (x+y+z)N(x+y\alpha+z\alpha^{\lambda-\nu})-x^\lambda-y^\lambda-z^\lambda$$
$$=\Sigma(-1)^k\,.\,q_h\,.\,x^{h-k}\,.\,y^k\,.\,z^{\lambda-h}.$$

Nehmen wir $x=y=z=1$, so erhalten wir aus einer dieser 6 Formeln

$$(42)\qquad 3N(1+\alpha+\alpha^{\mu+1})=3+\Sigma(-1)^k\,.\,q_h.$$

Es ist also $\Sigma(-1)^k\,.\,q_h$ *immer durch* 3 *teilbar.*

So ist für $\lambda=11$, $\mu=2$

$$\Sigma(-1)^k\,.\,q_h=11(2+3-1+1+1)=6\,.\,11.$$

Diese Bemerkung ist als Rechnungsprobe nicht ohne Wert.

Die Gleichung (42) zeigt, dass die 6 Normen, welche links entstehen, wenn man für $\mu+1$ die Werte $\nu+1$, ξ, $\lambda-\mu$, $\lambda-\nu$, $\lambda-\xi+1$ setzt, *identisch* sind. Man bestätigt dies auch durch unmittelbare Betrachtung der komplexen Zahl $1+\alpha+\alpha^{\mu+1}$ ohne Mühe. Und hierin liegt vielleicht ein Hinweis, wie unsere Untersuchungen über die *trinomischen* Zahlen hinaus verallgemeinert werden könnten.

Für $N(\alpha+\alpha^\delta+\alpha^{\delta^2})$, wenn $\delta^3\equiv1 \pmod{\lambda}$ erhalten wir nur $\frac{\lambda-1}{3}$

verschiedene Faktoren. Denn $\alpha + \alpha^{\delta} + \alpha^{\delta^2}$ ist eine *Periode* der Kreisteilungsgleichungen. Bildet man also nach unserem Verfahren die Norm $N(1 + \alpha^{\delta-1} + \alpha^{\delta^2-1}) = N(1 + \alpha + \alpha^{\delta+1})$, *so erhält man einen vollständigen Kubus*. So ist für $\alpha^{31} = 1$, $N(1 + \alpha + \alpha^6) = 5^6$. Ist $\mu = \delta$, so ist auch $\lambda - \nu = \delta + 1$, $\lambda - \xi + 1 = \delta + 1$, wie wir § 5 gefunden haben. Daher erhalten wir aus (25) drei Identitäten, welche uns zeigen:

$$q_h = (-1)^{h+k+1} \cdot q_{\lambda-h+k} = (-1)^h \cdot q_{\lambda-k},$$

falls $h + \delta k \equiv 0 \pmod{\lambda}$, $\delta^2 + \delta + 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}$.

So wird für $\lambda = 31$, $\delta = 5$:

$$\begin{aligned}
q_6 &= q_{30} = q_{26} = 31 \cdot 1\,, \\
q_{11} &= q_{24} = -q_{27} = 31 \cdot 30\,, \\
q_{12} &= -q_{29} = q_{21} = 31 \cdot 10\,, \\
q_{16} &= q_{18} = q_{28} = 31 \cdot 35\,, \\
q_{17} &= -q_{23} = -q_{22} = -31 \cdot 500.
\end{aligned}$$

Die dreimalige Wiederkehr, welche allgemein *nur für* λ stattfindet, tritt hier bei *jedem* Koefficienten ein.

§ 9.

Es sollen jetzt die Beziehungen der vorliegenden Untersuchungen zu den oben erwähnten Forschungen L. KRONECKER's dargelegt werden.

Sei γ eine primitive Wurzel (mod λ), so kann man setzen:

$$\mu \equiv \gamma^m, \qquad \mu + 1 \equiv \gamma^l \pmod{\lambda},$$

oder

$$m = \operatorname{ind} \mu, \qquad l = \operatorname{ind}(\mu + 1).$$

Daraus folgt leicht:

$$-\mu = \operatorname{ind} \nu, \qquad l - m = \operatorname{ind}(\nu + 1); \qquad \frac{\lambda - 1}{2} + l = \operatorname{ind}(\lambda - \mu - 1),$$

$$\frac{\lambda - 1}{2} + m = \operatorname{ind}(\lambda - \mu), \qquad \frac{\lambda - 1}{2} + l - m = \operatorname{ind}(\lambda - \nu - 1),$$

$$\frac{\lambda - 1}{2} - m = \operatorname{ind}(\lambda - \nu); \qquad \frac{\lambda - 1}{2} + m - l = \operatorname{ind}(\xi - 1), \qquad -l = \operatorname{ind} \xi;$$

$$\frac{\lambda - 1}{2} - l = \operatorname{ind}(\lambda - \xi), \qquad m - l = \operatorname{ind}(\lambda - \xi + 1).$$

Hiernach haben wir 6 Exponentenpaare von γ; und diese 6 Paare sind es, welche durch die komplexe Zahl

$$1 - \zeta^l + \zeta^m$$

(oder die andern 5 entsprechenden) *die ψ-Funktion*

$$\psi_{\gamma^m} = \psi_\mu$$

charakterisiren. Genau diese 6 Paare zählt KRONECKER auf. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 93, S. 357.) Während also KRONECKER zeigt, dass die Zahl $1 - \zeta^l + \zeta^m$; $\zeta^{\lambda-1} = 1$ die ψ-Funktion charakterisirt, haben wir die Norm der Zahl $z + \alpha - \alpha^{\gamma^m}$; $\alpha^\lambda = 1$ ins Auge gefasst. (Man beachte den Exponenten m, welcher in γ^m und $\lambda - 1$, welches in λ übergeht.)

Die einfachste Beziehung nun, welche zwischen unserer Zahl λ und der von KRONECKER betrachteten Primzahl n, die wir p nennen wollen, bestehen kann, ist die, dass

$$p = 2\lambda + 1$$

genommen wird. Dann müssen beide Zahlen p und λ von der Form $6n + 5$ sein. Demnach erhalten wir, wenn wir alle Paare m, l bilden, $\frac{p+1}{6}$ nicht auf einander zurückführbare. Formen wir nun $1 + \zeta^m - \zeta^l$ in $1 + (-1)^m\alpha^m - (-1)^l\alpha^l$, wo $\alpha^\lambda = 1$ ist, um, so erhalten wir eine der Zahlen $1 + \alpha - \alpha^{\mu+1}$ oder $1 + \alpha + \alpha^{\mu+1}$. Da nun $1 + \gamma^m - \gamma^l \equiv 0 \pmod{p}$, ($\gamma$ ist hier eine primitive Wurzel der Primzahl p und m und l bestimmen sich durch die Kongruenz $\gamma^l \equiv 1 + \gamma^m \pmod{p}$) so enthalten die obigen komplexen Zahlen einen oder mehrere Primteiler von p; ihre Norm ist durch p oder eine Potenz von p teilbar. Es gibt also $\frac{p+1}{6}$ solcher Formen trinomischer komplexer Zahlen, welche einen (oder mehrere) Primteiler von p enthalten. Nun führt jede Zahl $1 + \alpha - \alpha^{\mu+1}$ zu *drei* im allgemeinen verschiedenen Normen, wie (25) zeigt, nämlich:

$$1 + \Sigma q_h, \qquad 1 + \Sigma(-1)^{h+k+1}.q_h, \qquad 1 + \Sigma(-1)^h q_h;$$

ferner führt die Zahl $1 + \alpha + \alpha^{n+1}$ nur zu *einer* Norm

$$1 + \frac{1}{3}\Sigma(-1)^k q_h.$$

Also führen die für λ vorhandenen $\frac{\lambda - 5}{6}$ sechsgliedrigen Gruppen $z + \alpha \pm \alpha^{n+1}$ zu $4 \cdot \frac{\lambda - 5}{6}$ im allgemeinen verschiedenen Normen. Die Form $z + \alpha \pm \alpha^2$ ist auszuschliessen. Ebenso sehen wir von $m = 0$, $l = 1$, welches zur Form $2 - \zeta$ führt, ab und erhalten also nur $\frac{p - 5}{6}$ Zahlen, deren Normen durch p teilbar sind. Mithin sind unter den überhaupt für unsere Frage vorhandenen $\frac{4\lambda - 20}{6}$ Normen $\frac{2\lambda - 4}{6}$ oder in runder Zahl die Hälfte durch p teilbar.

Ist $p = 2\lambda + 1$ und p und λ jedes Primzahl, so ist die Hälfte aller nicht auf einander zurückführbaren Normen $N(1 + \alpha \pm \alpha^{n+1})$; $\alpha^\lambda = 1$ durch p teilbar.

Merkwürdiger Weise haben die Zahlen $p = 2\lambda + 1$ des ersten Hundert alle die Eigenschaft, dass sich Normen angeben lassen, welche Potenzen von p sind, also $p^{g_\cdot} = N(1 + \alpha \pm \alpha^{n+1})$; $\alpha^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

Als Beispiel wählen wir $p = 83$, also $\lambda = 41$. Nehmen wir $\gamma = 2$ als primitive Wurzel (mod 83), so erhalten wir folgende 14 Zahlenpaare m, l

$$m = 0,\ 1,\ 72,\ 2,\ 27,\ 73,\ 8,\ 3,\ 62,\ 28,\ 4,\ 56,\ 63,\ 47$$
$$l = 1,\ 72,\ 2,\ 27,\ 73,\ 8,\ 3,\ 62,\ 28,\ 24,\ 56,\ 63,\ 47,\ 29.$$

Die unter einander stehenden Paare gehören zusammen. Beispielsweise liefert $m = 73$, $l = 8$ die Zahl $1 + \zeta^{73} - \zeta^8$, oder da $\zeta = -\alpha$, $\alpha^{41} = 1$ ist, die Zahl $1 - \alpha^{32} - \alpha^8$, welche gleichwertig mit $1 + \alpha^{24} - \alpha^{33}$ oder mit $1 + \alpha - \alpha^{27}$ ist, wenn wir nur die Berechnung der Norm ins Auge fassen. So erhalten wir folgende 13 Zahlen, deren Normen die Primzahl 83 als Faktor enthalten müssen:

$$1 + \alpha + \alpha^r, \quad \text{wo} \quad r = 34,\ 26,\ 37;$$
$$1 + \alpha - \alpha^r, \quad \text{wo} \quad r = 15,\ 8,\ 38,\ 27,\ 15,\ 34,\ 36,\ 14,\ 31,\ 20.$$

$2 - \zeta$ haben wir ausgeschlossen; $r = 15$ tritt zufällig zweimal auf.

Für $\lambda = 41$ erhalten wir folgende Zusammenstellung:

$$\begin{aligned}
\mu &= 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 11,\ 12\\
\nu &= 1,\ 21,\ 14,\ 31,\ 33,\ 15,\ 24\\
\mu + 1 &= 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 12,\ 13\\
\nu + 1 &= 2,\ 22,\ 15,\ 32,\ 34,\ 16,\ 25\\
\xi &= 21,\ 14,\ 31,\ 33,\ 7,\ 24,\ 19\\
\lambda - \mu &= 40,\ 39,\ 38,\ 37,\ 36,\ 30,\ 29\\
\lambda - \nu &= 40,\ 20,\ 27,\ 10,\ 8,\ 26,\ 17\\
\lambda - \xi + 1 &= 21,\ 28,\ 11,\ 9,\ 35,\ 18,\ 23.
\end{aligned}$$

Die in vertikaler Reihe stehenden Zahlen bilden eine Gruppe; jede Gruppe führt zu 4 Normen $N(1 + \alpha \pm \alpha^{\mu+1})$. Schliessen wir die erste Gruppe aus, so bleiben 24 Normen, deren Hälfte (12) durch 83 teilbar ist. Die genauere Ausrechnung ergibt, dass die Zahlen $1 + \alpha - \alpha^{15}$, $1 + \alpha - \alpha^{27}$, $1 + \alpha - \alpha^{8}$, $1 + \alpha - \alpha^{34}$, $1 + \alpha - \alpha^{36}$ die Norm $571\,787 = 83 . 83 . 83$ liefern. Die Zahlen gehören der dritten und fünften Gruppe an.

An dieser Stelle erlaube ich mir, die folgenden Worte des Herrn L. Kronecker aus seinem Aufsatze *Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen*, Journal für Mathematik, Bd. 93, S. 359 anzuführen:

»Dass, wie Jacobi vermutet zu haben scheint, die von ihm mit $(\alpha, x)^\lambda$ bezeichneten Kreisteilungsausdrücke *stets* als Produkte konjugirter ψ-Funktionen darstellbar sein sollten, ist nach den oben dafür gefundenen Bedingungen kaum anzunehmen; denn darnach müsste stets eine Zahl m existiren, für welche jede der komplexen Zahlen

$$1 + \zeta^{km} - \zeta^{k\,\mathrm{ind}(1+g^m)}; \qquad {\scriptstyle (k=1,\,3,\,\ldots,\,\lambda-2)}$$

wo ζ eine Wurzel der Gleichung $\zeta^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} + 1 = 0$ bedeutet, entweder eine komplexe Einheit oder aber ein Produkt konjugirter algebraischer Primteiler von λ ist. Ich habe jedoch noch für keinen Wert von λ feststellen können, dass diese Bedingungen nicht erfüllbar sind. Die erste Primzahl, welche in dieser Beziehung zur Untersuchung geeignet erscheint, ist $\lambda = 83$.«

Ersetzen wir λ in dieser Darlegung KRONECKER's durch p, so haben wir gesehen, dass sogar 5 verschiedene Werte für m angegeben werden können, welche für 83 jene Bedingungen erfüllen. Dagegen sind sie schon für die nächste Primzahl 89 *nicht* erfüllbar, jedoch für 97 wieder erfüllbar. Die erste Primzahl, welche zur weiteren Untersuchung einladet, dürfte $p = 107$ sein. [1]

§ 10.

Wenden wir uns schliesslich der Frage zu, welche Teiler die Normen zulassen, so werden wir finden, dass nur die Primzahlen von der Form

$$p = 2m\lambda + 1$$

in unzähliger Menge als Teiler von $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ vorkommen. Zu diesem Resultate gelangen wir leicht auf dem von E. KUMMER bei ähnlichen Untersuchungen betretenen Wege. Es besteht für jede Grösse x die Kongruenz:

$$x^p - x \equiv x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1) \pmod{p}. \tag{43}$$

Diese sehr bekannte Beziehung kann man wohl am einfachsten durch Einführung der primitiven Wurzel g und Darstellung der Zahlen 1, 2, ..., $p-1$ durch die ihnen kongruenten Potenzen von g bestätigen. Nehmen wir nun $p = 2m\lambda + n$, $x = z + \alpha - \alpha^{\mu+1}$, setzen kurz

$$N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1}) = N(z),$$

so wird

$$(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})^p - (z + \alpha - \alpha^{\mu+1}) \equiv \alpha^n - \alpha^{n(\mu+1)} - \alpha + \alpha^{\mu+1} \pmod{p},$$

---

[1] Bisher fand ich:

$$\begin{aligned}
N(1 + a - a^{50}) &= 107.243589,\\
N(1 + a - a^{4}) &= 107.181579,\\
N(1 + a - a^{35}) &= 107.246769,\\
N(1 + a - a^{41}) &= 107.27773\ ,\\
N(1 + a - a^{32}) &= 107.107.7103. \quad a^{53} = 1.
\end{aligned}$$

Aber keine trinomische Zahlform $1 + a - a^{\mu+1}$ hat mehr als *zwei* verschiedene Primteiler von 107 im Bereiche der 53sten Einheitswurzeln. Daher ist die Darstellung von 107^g als Norm einer solchen Zahlform nicht sehr wahrscheinlich.

also

$$\alpha^n - \alpha^{n(\mu+1)} - \alpha + \alpha^{\mu+1}$$

$$\equiv (z + \alpha - \alpha^{\mu+1})(z - 1 + \alpha - \alpha^{\mu+1}) \dots (z - p + 1 + \alpha - \alpha^{\mu+1}) \pmod p,$$

mithin:

$$N(\alpha^n - \alpha^{n(\mu+1)} - \alpha + \alpha^{\mu+1}) \tag{44}$$

$$\equiv N(z) \,.\, N(z - 1) \dots N(z - p + 1) \pmod p.$$

Diese Kongruenz gilt *allgemein,* für jeden Wert von z. Nehmen wir an, $N(z)$ enthalte den Teiler p, so muss sein

$$N(\alpha^n - \alpha^{n(\mu+1)} - \alpha + \alpha^{\mu+1}) \equiv 0 \pmod p. \tag{45}$$

Will man also *alle* Primzahlen $p = 2m\lambda + n$ erhalten, welche als Teiler der unendlich vielen Normen $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ auftreten können, so braucht man nur die linke Seite der Kongruenz (45) zu bilden. Für $n = 1$ gelten diese Schlüsse nicht. Primzahlen von der Form $p = 2m\lambda + 1$ können daher in unbegrenzter Menge auftreten. Die Induktion bestätigt diese Schlüsse. Fast alle Normen, welche ich berechnet habe, lieferten Teiler von der Form $2m\lambda + 1$. Nur für $\lambda = 31$ traten wiederholt die Divisoren 2^5 und 5^3 auf. Um auch ein Beispiel für $\lambda = 6n + 1$ neben dem obigen zu geben, teile ich die folgende Zusammenstellung mit.

$\lambda = 31.$

$\mu =$	1,	2,	3,	4,	5,	11
$\nu =$	1,	16,	21,	8,	25,	17
$\xi =$	16,	21,	8,	25,	26,	13
$\lambda - \mu =$	30,	29,	28,	27,	26,	20
$\lambda - \nu =$	30,	15,	10,	23,	6,	14
$\lambda - \xi + 1 =$	16,	11,	24,	7,	6,	19.

Die erste Gruppe liefert 3 Zahlen, nämlich

$$z + \alpha - \alpha^2, \qquad z + \alpha - \alpha^{16}, \qquad z + \alpha - \alpha^{30}.$$

Die fünfte liefert nur 2 Zahlen:

$$z + \alpha - \alpha^6, \qquad z + \alpha - \alpha^{26}.$$

Endlich geben wir eine Norm:

$$N(z + \alpha - \alpha^5) = z^{30} + 31(z^{23} - 42z^{19} + 9z^{16} + 91z^{15} + 466z^{12}$$
$$- 51z^{11} + 22z^9 + 770z^8 + 11z^7 - 173z^5 + 112z^4 - z^3 + 5z^2 + 7z + 1).$$

Die vier Normen für $z = 1$ sind (vergl. § 9)

$$38069, \qquad 46439, \qquad 6263, \qquad 5953.$$

Im Januar 1887.