SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION

PAR

GUSTAF KOBB

à STOCKHOLM.

Dans son mémoire *De motu puncti singularis,*[1] JACOBI a étudié le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution et il a démontré le théorème suivant:

»S'il existe une fonction de force et si le mouvement ne dépend que de la position du point matériel dans une section méridionale de la surface, on peut toujours ramener l'intégration des équations du mouvement à des quadratures.»

Dans les cas où l'équation de la surface est algébrique et la fonction de force une fonction rationnelle, ces quadratures sont des intégrales Abéliennes. Je me propose donc de trouver les conditions nécessaires, que doit remplir l'équation de la surface pour que ces intégrales Abéliennes se réduisent à des intégrales elliptiques.

Traitons la question à l'aide des coordonnées rectilignes et supposons la masse du mobile égale à l'unité.

Si l'axe des x coïncide avec l'axe de révolution, l'équation de la surface prend la forme

$$f(y^2 + z^2, x) = 0$$

et la fonction de force la forme

$$U = R(y^2 + z^2, x).$$

[1] Journal für Mathematik, T. 24, 1842, p. 5—27.

Soient x, y, z les coordonnées du point à l'époque t, nous aurons pour équations de mouvement

$$(1)\qquad \begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \mu \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x}\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \mu \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \mu \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z}.\end{aligned}$$

Le principe des forces vives et le principe des aires nous fournissent deux intégrales du système (1), savoir

$$(2)\qquad \begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= 2H + 2U\\ x \cdot \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dz}{dt} &= c\end{aligned}$$

où H et c sont des constantes d'intégration. Nous poserons ensuite

$$z = r \cdot \cos \Psi$$
$$y = r \cdot \sin \Psi.$$

Les équations (2) deviennent alors

$$(3)\qquad \begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \cdot \left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2 &= 2H + 2U\\ r^2 \cdot \frac{d\Psi}{dt} &= c\\ f(r^2,\ x) &= 0\end{aligned}$$

ou

$$r^2\left[1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = r^2(2H + 2U) - c^2$$

$$r^2 \cdot \frac{d\Psi}{dt} = c$$

et par conséquent

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
t &= \int_{x_0}^{x} \frac{r\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}\,.\,dx}{\sqrt{r^2(2H+2U)-c^2}}\\
\Psi-\Psi_0 &= c\int_0^t \frac{dt}{r^2} = c\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}\,.\,dx}{r\sqrt{r^2(2H+2U)-c^2}}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, si l'équation de la surface est une équation algébrique et U une fonction rationnelle, t et Ψ sont exprimés par des intégrales Abéliennes de la variable x. Pour les ramener à la forme normale nous poserons

$$\xi^2 = \frac{r^2\left[1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right]}{r^2(2H+2U)-c^2}.$$

En éliminant r^2 entre cette expression et l'équation

$$f(r^2, x) = 0$$

nous aurons une nouvelle équation

$$\varphi(\xi^2, x) = 0.$$

Nous allons démontrer, que si la première équation est irréductible, la dernière l'est aussi. Dans ce but nous employons le théorème suivant donné par M. Weierstrass dans ses leçons sur la théorie des fonctions Abéliennes:

»Soit

$$f(x, y) = 0$$

une équation algébrique irréductible de degré n en y et

$$z = R(x, y)$$

où R désigne une fonction rationnelle. Formons la résolvante de Galois

$$\prod_{\beta=1}^{n}[z - R(x, y_\beta)] = \frac{G(x, z)}{G_0(x)}.$$

Ici il peut se présenter deux cas, l'équation

$$G(x, z) = 0$$

est ou bien irréductible, ou, si elle est réductible, on doit avoir

$$G(x, z) = [G_1(x, z)]^p$$

où p est un diviseur de n et l'équation

$$G_1(x, z) = 0$$

est une équation irréductible. Dans le premier cas, on a aussi

$$y = R_1(x, z)$$

où R_1 désigne une fonction rationnelle et les deux courbes

$$G(x, z) = 0; \qquad F(x, y) = 0$$

sont de même genre.

Pour que le second cas puisse avoir lieu, il faut que les (n) valeurs de z, qui correspondent à chaque valeur de x et aux (n) valeurs différentes de y, se partagent en un certain nombre de groupes égaux entre eux. Si donc on peut montrer, que pour une certaine valeur de x et pour les n valeurs différentes correspondantes de y, y_1, y_2, ..., y_n, les n valeurs de z

$$z_1 = R(x, y_1), \qquad z_2 = R(x, y_2), \quad . \; . \; . \; , \quad z_n = R(x, y_n)$$

sont toutes différentes entre elles, il en résulte que l'équation

$$G(x, z) = 0$$

est irréductible.»

Supposons maintenant

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

une équation réductible, tandis que

$$f(r^2, x) = 0$$

est irréductible.

Il faut donc, qu'au moins deux valeurs de ξ^2 coïncident pour des valeurs ordinaires de x:

$$\frac{r_\mu^2\left[1 + \left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2\right]}{r_\mu^2(2H + 2U_\mu) - c^2} = \frac{r_\nu^2\left[1 + \left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2\right]}{r_\nu^2(2H + 2U_\nu) - c^2}$$

d'où résulte après quelques réductions la relation suivante

$$r_\mu^2 . r_\nu^2 . 2H\left[\left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2\right] - c^2\left[r_\mu^2\left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2 - r_\nu^2 . \left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2 + r_\mu^2 - r_\nu^2\right]$$
$$+ 2r_\mu^2 . r_\nu^2\left[U_\nu\left[1 + \left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2\right] - U_\mu\left[1 + \left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2\right]\right] = 0;$$

mais puisque H et c^2 sont des constantes arbitraires, il faut que leurs coefficients s'annullent, ainsi

$$r_\mu^2 . r_\nu^2\left[\left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2\right] = 0$$

$$r_\mu^2 . \left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2 - r_\nu^2 . \left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2 + r_\mu^2 - r_\nu^2 = 0.$$

On en tire

$$(r_\mu^2 - r_\nu^2)\left[1 + \left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2\right] = 0$$

ou

$$r_\mu^2 - r_\nu^2 = 0$$

mais cela est impossible, car l'équation

$$f(r^2,\ x) = 0$$

est irréductible.

Ainsi la nouvelle équation

$$\varphi(\xi^2,\ x) = 0$$

ne peut être réductible, elle est donc irréductible. Il résulte de là, qu'on peut exprimer r^2 comme fonction rationnelle de ξ^2 et x:

$$r^2 = R_1(\xi^2,\ x)$$

et par conséquent, si nous considérons

$$f(r^2, x) = 0$$

comme équation entre r^2 et x et

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

comme équation entre ξ^2 et x, les deux courbes algébriques définies par ces équations sont de même genre.

Le système (4) prend la forme

$$\begin{aligned} t &= \int_{x_0}^{x} \xi\, dx \\ \psi - \psi_0 &= c \int_{x_0}^{x} \frac{\xi\, dx}{R_1(\xi^2, x)} \qquad (5) \\ \varphi(\xi^2, x) &= 0. \end{aligned}$$

Pour trouver le genre de

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

considérée comme équation entre ξ et x nous employons ce théorème général:

»Soit $f(x, y) = 0$ une courbe algébrique de genre ρ et λ le nombre total des systèmes circulaires de la forme

$$\begin{aligned} x &= a + \tau^{s_\nu} \\ y &= \alpha\tau^{\mu}[1 + \mathfrak{p}(\tau)] \qquad (\alpha \gtrless 0) \end{aligned}$$

où μ est un nombre *impair*.[1] En désignant par ρ' le genre de la courbe $f(x, z^2) = 0$ où $z^2 = y$, nous aurons la relation suivante

$$2\rho' = 4\rho + \lambda - 2.»$$

Pour démontrer cette relation nous employons une formule donnée par M. Weierstrass.

---

[1] Je désigne par $\mathfrak{p}(\tau)$ une série contenant seulement des puissances positives de la variable τ.

»Soit $F(x, y) = 0$ une courbe algébrique, où le domaine du point $x = \infty$, $y = \infty$ est représenté par les n systèmes distincts

$$x = \tau^{-1}$$
$$y = b_\nu \tau^{-1} + \mathfrak{p}(\tau).$$

En désignant par ρ le genre de la courbe et par

$$s = \Sigma(s_\nu - 1)$$
$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$y = b_\nu + \mathfrak{p}(\tau)$$

la sommation étendue à tous les systèmes circulaires où le nombre s_ν a des valeurs positives, on a la formule

$$2\rho = s - 2n + 2.»$$

Nous considérons d'abord les systèmes circulaires de la courbe

$$f(x, y) = 0.$$

Soit

$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$y = b_\nu + \mathfrak{p}(\tau) \qquad (b_\nu \gtrless 0)$$

un des systèmes, qui représentent le domaine du point analytique (a_ν, b_ν) de la courbe

$$f(x, y) = 0.$$

En substituant

$$z^2 = y$$
$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$z^2 = b_\nu + \mathfrak{p}(\tau)$$

nous aurons dans le domaine du point $(a_\nu + \sqrt{b_\nu})$ de la courbe

$$f(x, z^2) = 0$$
$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$z = + \sqrt{b_\nu} + \mathfrak{p}_1(\tau)$$

et dans le domaine du point $(a_\nu - \sqrt{b_\nu})$

$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$z = -\sqrt{b_\nu} + \mathfrak{p}_2(\tau).$$

Comme nous pouvons employer le même raisonnement pour autres systèmes circulaires, nous en tirons:

au point (a_ν, b_ν) (où $b_\nu \gtrless 0$) de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

correspondent deux points $(a_\nu + \sqrt{b_\nu})$ et $(a_\nu - \sqrt{b_\nu})$ de la courbe

$$f(x, z^2) = 0$$

dont les domaines sont représentés par des systèmes circulaires du même nombre et de la même nature. Ainsi, soit (a_ν, b_ν) un point non critique, les deux points $(a_\nu + \sqrt{b_\nu})$ et $(a_\nu - \sqrt{b_\nu})$ sont aussi des points non critiques.

Nous supposons ensuite

$$b_\nu = 0.$$

Ainsi nous aurons

$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu} \qquad (\alpha \gtrless 0)$$
$$y = \alpha\tau^\mu[1 + \mathfrak{p}(\tau)]. \qquad (\mu \gtrless 0)$$

Soit

$$\mu = 2\mu'.$$

On en tire

$$\left|\begin{array}{l} x = a_\nu + \tau^{s_\nu} \\ z = +\sqrt{\alpha}\cdot\tau^{\mu'}[1 + \mathfrak{p}_1(\tau)] \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x = a_\nu + \tau^{s_\nu} \\ z = -\sqrt{\alpha}\cdot\tau^{\mu'}[1 + \mathfrak{p}_2(\tau)]. \end{array}\right.$$

Par conséquent le nombre des systèmes est doublé, mais leur nature n'est pas changée.

Soit à présent

$$\mu = 2\mu' + 1$$

nous ne pouvons pas représenter le domaine du point correspondant de la courbe

$$f(x, z^2) = 0$$

par des systèmes circulaires de la même nature. Il faut donc poser

$$x = a_\nu + \tau^{2s_\nu}$$
$$z = \alpha\tau^\mu[1 + \mathfrak{p}(\tau)].$$

Le nombre des systèmes n'est pas changé. Ainsi, soit $(a_\nu, 0)$ ou (a_ν, ∞) des points non critiques de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

ils sont des points critiques de la courbe

$$f(x, z^2) = 0.$$

Si la série y_τ commence par une puissance paire, le domaine est représenté par les deux systèmes

$$\begin{cases} x = a_\nu + \tau \\ z = +\sqrt{\alpha}\,.\,\tau^{\mu'}[1 + \mathfrak{p}_1(\tau)] \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = a_\nu + \tau \\ z = -\sqrt{\alpha}\,.\,\tau^{\mu'}[1 + \mathfrak{p}_2(\tau)] \end{array}$$

et si y_τ commence par une puissance impaire, le domaine est représenté par le système

$$x = a_\nu + \tau^2$$
$$z = \alpha\tau^\mu[1 + \mathfrak{p}(\tau)].$$

Maintenant nous allons transformer les deux courbes

$$f(x, y) = 0; \qquad f(x, z^2) = 0$$

de manière que le point $x = \infty$ ne soit pas un point critique.

Soit $x = a$ une valeur, à laquelle correspondent n valeurs distinctes de la variable y

$$b_1, b_2, \ldots, b_n.$$

Posons

$$\xi = \frac{1}{x - a}$$

$$\eta = \frac{y}{x - a}.$$

Comme (a, b_ν) est un point non critique, nous avons

$$x = a + \tau$$
$$y = b_\nu + \mathfrak{p}(\tau)$$

et par conséquent

$$\xi = \tau^{-1}$$
$$\eta = b'_\nu . \tau^{-1} + \mathfrak{p}_1(\tau).$$

Ainsi par cette substitution linéaire, nous pouvons former une nouvelle courbe algébrique

$$\varphi(\xi, \eta) = 0$$

de même genre, où, quand ξ croît indéfiniment, le rapport $\frac{\xi}{\eta}$ tend vers n valeurs finies distinctes

$$b'_1, b'_2, \ldots, b'_n.$$

Il faut donc remarquer, que si $(x = \infty, y = \infty)$ est un point critique, le point $(\xi = 0, \eta = \infty)$ est aussi un point critique de la même nature. De la même manière nous formons par la substitution

$$\xi_1 = \frac{1}{x - a_1}$$
$$\eta_1 = \frac{z}{x - a_1}$$

où $x = a_1$ est une valeur non critique de la courbe

$$f(x, z^2) = 0$$

une nouvelle courbe algébrique

$$\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0$$

de même genre, que $f(x, z^2) = 0$, et où le rapport $\frac{\xi_1}{\eta_1}$ tend vers $2n$ valeurs distinctes

$$c_1, c_2, \ldots, c_{2n}.$$

Soit

$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$y = b_\nu + \mathfrak{p}(\tau)$$

un des systèmes, qui représentent le domaine du point (a_ν, b_ν) de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

nous aurons si

$$|x - a_\nu| < |a - a_\nu|,$$

$$\xi = -\frac{1}{a - a_\nu - (x - a_\nu)} = -\frac{1}{a - a_\nu}\left\{1 + \frac{x - a_\nu}{a - a_\nu} + \left(\frac{x - a_\nu}{a - a_\nu}\right)^2 + \left(\frac{x - a_\nu}{a - a_\nu}\right)^3 + \ldots\right\}$$

$$\xi = -\frac{1}{a - a_\nu} - \frac{\tau^{s_\nu}}{a - a_\nu} - \frac{\tau^{2s_\nu}}{(a - a_\nu)^2} - \ldots$$

$$\eta = y \,.\, \xi = -\frac{b_\nu}{a - a_\nu} + \mathfrak{p}_1(\tau).$$

Supposons

$$\xi = -\frac{1}{a - a_\nu} + \tau_1^{s'_\nu}$$

$$\eta = -\frac{b_\nu}{a - a_\nu} + \mathfrak{p}_2(\tau_1).$$

Dans la théorie des fonctions algébriques on démontre le théorème suivant:

»Si l'on peut représenter un certain domaine du point analytique (a, b) de la courbe

$$F(x, y) = 0$$

par les deux systèmes

$$x = a + \mathfrak{p}_1(\tau) = a + \mathfrak{p}_1^{(1)}(\tau_1)$$

$$y = b + \mathfrak{p}_2(\tau) = b + \mathfrak{p}_2^{(1)}(\tau_1)$$

il existe entre les deux variables auxiliaires la relation

$$\tau_1 = g\tau[1 + \mathfrak{p}(\tau)].\text{»} \qquad (g \gtrless 0)$$

En employant ce théorème nous aurons

$$s'_\nu = s_\nu.$$

Ainsi le domaine du point

$$\xi = -\frac{1}{a - a_\nu}, \qquad \eta = -\frac{b_\nu}{a - a_\nu}$$

qui correspond au point (a_ν, b_ν) de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

est représenté à la même manière, que le domaine du point (a_ν, b_ν). Le nombre des systèmes est le même et leur nature n'est pas changée.

Le même raisonnement s'applique à la courbe

$$\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0.$$

Maintenant nous sommes en état de déterminer le genre des nouvelles courbes

$$\varphi(\xi, \eta) = 0; \qquad \varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0.$$

Dans la courbe $\varphi(\xi, \eta) = 0$, le domaine du point $(\xi = \infty, \eta = \infty)$ est représenté par les n systèmes distinctes

$$\begin{aligned} \xi &= \tau^{-1} \\ \eta &= b_\nu^{(1)}\tau^{-1} + \mathfrak{p}(\tau). \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, n)} \end{aligned}$$

En employant la formule de M. Weierstrass nous aurons le genre ρ de la courbe

$$2\rho = s - 2n + 2$$

où

$$\begin{aligned} s &= \Sigma(s_\nu - 1) \\ x &= a_\nu + \tau^{s_\nu} \\ y &= b_\nu + \mathfrak{p}_1(\tau) \qquad {\scriptstyle (b_\nu \gtreqless 0)} \end{aligned}$$

la sommation étendue à tous les systèmes circulaires de la courbe $\varphi(\xi, \eta) = 0$ où s_ν a des valeurs positives.

Dans la courbe $\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0$ le domaine du point $(\xi_1 = \infty, \eta_1 = \infty)$ est représenté par $2n$ systèmes distincts

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \tau^{-1} \\ \eta_1 &= c_\nu\tau^{-1} + \mathfrak{p}(\tau). \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, 2n)} \end{aligned}$$

En désignant par

$$s_1 = \Sigma(s'_\nu - 1)$$

la somme correspondante pour la courbe $\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0$ et par ρ' son genre, nous aurons

$$2\rho' = s_1 - 4n + 2.$$

Pour exprimer s_1 par s nous décomposons s_1 en quatre sommes

$$s_1 = \sum_{(1)}(s'_\nu - 1) + \sum_{(2)}(s'_\nu - 1) + \sum_{(3)}(s'_\nu - 1) + \sum_{(4)}(s'_\nu - 1).$$

Dans la première somme, la sommation est étendue aux points de la courbe $\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0$, qui correspondent aux points critiques (a_ν, b_ν), où $b_\nu \gtrless 0$, de la courbe $f(x, y) = 0$; dans la deuxième aux points, qui correspondent aux points critiques $(a_\nu, 0)$ et (a_ν, ∞) de la courbe $f(x, y) = 0$ où y_τ commence par une puissance paire; dans la troisième aux points, qui correspondent aux points critiques $(a_\nu, 0)$ et (a_ν, ∞) de la courbe $f(x, y) = 0$, mais où y_τ commence par une puissance impaire et enfin dans la quatrième aux points, qui correspondent aux zéros et pôles non critiques de la courbe $f(x, y) = 0$.

Nous avons trouvé qu'à chaque point (a_ν, b_ν), $b_\nu \gtrless 0$ de la courbe $f(x, y) = 0$ correspondent deux points de la courbe $\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0$, dont les domaines sont représentés par des systèmes circulaires du même nombre et de la même nature que le domaine du point (a_ν, b_ν). On en tire

$$s'_\nu = s_\nu$$

$$\sum_{(1)}(s'_\nu - 1) = 2\sum_{(1)}(s_\nu - 1).$$

Dans la deuxième somme le nombre de points et la nature des systèmes ne sont pas changés, mais le nombre des systèmes est doublé; ainsi

$$s'_\nu = s_\nu$$

$$\sum_{(2)}(s'_\nu - 1) = 2\sum_{(2)}(s_\nu - 1).$$

Dans la troisième le nombre de points et de systèmes ne sont pas changés, mais

$$s'_\nu = 2s_\nu$$

$$\sum_{(3)}(s'_\nu - 1) = 2\sum_{(3)}(s_\nu - 1) + \lambda_1$$

si nous désignons par λ_1 le nombre total de systèmes pour ces points.

Dans la quatrième somme on a

$$s'_\nu = 1$$

si la série correspondante y_τ commence par une puissance paire et

$$s'_\nu = 2$$

si la série y_τ commence par une puissance impaire. Par conséquent, en désignant par λ_2 le nombre de ces dernières, on a

$$\sum_{(4)}(s'_\nu - 1) = \lambda_2.$$

Ainsi

$$s_1 = 2\sum_{(1)}(s_\nu - 1) + 2\sum_{(2)}(s_\nu - 1) + 2\sum_{(3)}(s_\nu - 1) + \lambda_1 + \lambda_2$$

mais

$$s = \sum_{(1)}(s_\nu - 1) + \sum_{(2)}(s_\nu - 1) + \sum_{(3)}(s_\nu - 1)$$

donc

$$s_1 = 2s + \lambda_1 + \lambda_2$$

ou, en désignant par λ le nombre total de systèmes de la courbe $f(x, y) = 0$

$$x = a + \tau^{s_\nu}$$
$$y = \alpha\tau^\mu[1 + \mathfrak{p}(\tau)] \qquad (\alpha \gtrless 0)$$

où μ est un nombre *impair*,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$$
$$s_1 = 2s + \lambda,$$

par conséquent

$$2\rho' = 2s + \lambda - 4n + 2$$

et en combinant cette équation avec l'équation

$$2\rho = s - 2n + 2$$

on aura

$$2\rho' = 4\rho + \lambda - 2.$$

C. Q. F. D.

De la même manière on peut démontrer ce théorème plus général:

»Soit $f(x, y) = 0$ une courbe algébrique de genre ρ et λ_m le nombre total des systèmes circulaires de la forme

$$x = a + \tau^{s_\nu}$$
$$y = \alpha\tau^{\mu}[1 + \mathfrak{p}(\tau)] \qquad (\alpha \gtrless 0)$$

où, si m est un nombre premier, μ est un nombre premier avec m. En désignant par ρ_m le genre de la courbe $f(x, z^m)$ où $z^m = y$, nous aurons la relation suivante

$$2\rho_m = 2m\rho + (\lambda_m - 2)(m - 1).»$$

Maintenant nous allons démontrer, que le nombre λ ne peut être nul, si

$$\rho \geqq 1.$$

Soit

$$f(x, y) = 0$$

une courbe algébrique de genre ρ. Formons par la transformation birationnelle

$$x = R(\xi, \eta), \qquad \xi = R_2(x, y)$$
$$y = R_1(\xi, \eta), \qquad \eta = R_3(x, y)$$

une nouvelle courbe algébrique de même genre

$$\varphi(\xi, \eta) = 0$$

où nous supposons que le nombre λ soit nul.

Ainsi en substituant les séries x_τ, y_τ, qui représentent le domaine d'un point arbitraire de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

dans l'expression

$$\eta = R_3(x, y)$$

la série y_τ ne commence jamais par une puissance impaire. Alors nous pouvons extraire la racine carrée

$$\sqrt{\eta_\tau} = \eta_\tau^{(1)} = P(\tau)$$

où $P(\tau)$ est une série, qui ne contient qu'un nombre fini de puissances négatives dans le domaine d'un point quelconque. Ainsi $\eta^{(1)}$ est une fonction rationnelle de x et y.

Donc

$$\xi = R_2(x, y), \qquad x = R(\xi, [\eta^{(1)}]^2)$$

$$\eta^{(1)} = \overline{R}_3(x, y), \qquad y = R_1(\xi, [\eta^{(1)}]^2)$$

et la courbe algébrique

$$\varphi(\xi, \eta^{(1)}) = 0$$

est aussi de genre ρ. Les deux courbes

$$\varphi(\xi, [\eta^{(1)}]^2) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta^{(1)}) = 0$$

sont donc de même genre

$$\rho' = \rho$$

mais suivant la formule

$$2\rho' = 4\rho + \lambda - 2$$

il résulte, puisque nous supposons $\lambda = 0$,

$$2\rho = 4\rho - 2;$$

ce qui est impossible, si

$$\rho > 1.$$

Ainsi le nombre λ ne peut être nul, si

$$\rho > 1.$$

Soit

$$\rho = 1.$$

Supposons que le nombre λ soit nul pour la courbe

$$\varphi(\xi, \eta^{(1)}) = 0.$$

En posant

$$\sqrt{\eta^{(1)}} = \eta^{(2)}$$

nous obtenons par le même procédé, que les deux courbes

$$\varphi(\xi, [\eta^{(2)}]^2) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta^{(2)}) = 0$$

sont de genre 1.

Cela exige que le nombre λ pour la courbe

$$\varphi(\xi,\ \eta^{(2)}) = 0$$

soit nul. Si tel est le cas nous répétons le même procédé et enfin il faut que nous trouvions une courbe

$$\varphi(\xi,\ \eta^{(n-1)}) = 0$$

où

$$\lambda > 0.$$

Car

$$\eta^{(n)} = \sqrt[2^n]{R_3(x,\ y)} = \sqrt{\eta^{(n-1)}}.$$

Il est évident, qu'en donnant à n une valeur assez grande, $\eta^{(n)}$ doit nécessairement cesser d'être une fonction rationnelle et par conséquent $\eta^{(n-1)}_{\tau}$ commence par une puissance impaire au moins dans le domaine d'un point. Mais alors les deux courbes

$$\varphi(\xi,\ [\eta^{(n-1)}]^2) = 0, \qquad \varphi(\xi,\ \eta^{(n-1)}) = 0$$

ne sont pas de même genre, selon la formule

$$2p' = 4p + \lambda - 2.$$

On en tire que la supposition $\lambda = 0$ pour la courbe

$$\varphi(\xi,\ \eta^{(n-2)}) = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(\xi,\ [\eta^{(n-1)}]^2) = 0$$

n'est pas juste, et par conséquent les deux courbes

$$\varphi(\xi,\ [\eta^{(n-2)}]^2) = 0, \qquad \varphi(\xi,\ \eta^{(n-2)}) = 0,$$

ne sont pas de même genre. En répétant le même raisonnement, nous aurons enfin que le nombre λ ne peut être nul pour la courbe

$$\varphi(\xi,\ \eta) = 0.$$

Ainsi nous avons trouvé

$$\lambda > 0$$

si

$$\rho \geqq 1.$$

Reprenons notre système d'équations (5)

$$t = \int_{x_0}^{x} \xi dx$$

$$\psi - \psi_0 = c \int \frac{\xi dx}{R(\xi^2, x)}$$

$$\varphi(\xi^2, x) = 0.$$

Maintenant nous pouvons résoudre la question: quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les intégrales du système (5) soient des intégrales elliptiques?

En désignant par ρ' le genre de la courbe

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

considérée comme équation entre ξ et x et par ρ le genre de la même courbe considérée comme équation entre ξ^2 et x nous aurons la formule

$$2\rho' = 4\rho + \lambda - 2.$$

En posant

$$\rho' = 1$$

on a

$$\rho = 0, \qquad \lambda = 4.$$

Mais la courbe

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

considérée comme équation entre ξ^2 et x et la courbe

$$f(x, r^2) = 0$$

considérée comme équation entre r^2 et x sont de même genre.

Par conséquent

$$r^2 = R_1(\zeta)$$

$$x = R_2(\zeta)$$

où R_1 et R_2 sont des fonctions rationnelles du paramètre ζ.

Ayant donc

$$\xi^2 = \frac{r^2\left[1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right]}{r^2(2H + 2U) - c^2}$$

et par conséquent ξ^2 une fonction rationnelle de ζ, il faut déterminer R_1 et R_2 de manière que l'expression de ξ ne contienne qu'une racine carrée

$$\sqrt{R_3(\zeta)}$$

où $R_3(\zeta)$ est un polynôme du troisième ou du quatrième degré.

Supposons

$$U = k$$

où k désigne une constante, on sait que le point matériel décrit une ligne géodésique de la surface. Par conséquent on peut énoncer ce théorème:

»Toutes les surfaces de révolution, qui ont la propriété, que les coordonnées d'une ligne géodésique peuvent être exprimées par des fonctions elliptiques d'un paramètre, sont nécessairement de la forme

$$r^2 = R_1(\zeta)$$

$$x = R_2(\zeta).»$$

Supposons ensuite que la seule force agissante soit la pésanteur, c'est à dire

$$U = gx,$$

nous trouvons, que l'intégration du système (5) peut être effectuée par des fonctions elliptiques, si la surface de révolution est déterminée par une de ces cinq équations

$$r = mx \tag{1}$$

$$r^2 + x^2 = a^2 \tag{2}$$

$$r^2 = 4ax \tag{3}$$

$$9ar^2 = x(x - 3a)^2 \tag{4}$$

$$2r^4 + 3a^2r^2 - 2xa^3 = 0. \tag{5}$$

Ce sont les seuls cas possibles. Les trois premiers cas étaient déjà connus, les deux autres me semblent nouveaux.