

EINE VERALLGEMEINERUNG DER DEKADISCHEN SCHREIBWEISE
 NEBST
 FUNCTIONENTHEORETISCHER ANWENDUNG

VON

EMIL STRAUSS

in FRANKFURT a/M.

Bekanntlich lassen sich viele Sätze über ganze rationale Functionen auch auf ganze transcendente Functionen übertragen. Man könnte daher vermuthen, dass dies auch bei dem folgenden Satze der Fall ist:

»Wenn eine ganze rationale Function mit rationalen Coefficienten für *eine* Wurzel einer irreductibeln algebraischen Gleichung verschwindet, so verschwindet sie für *sämmtliche* Wurzeln derselben.»

Würde sich dieses Theorem auch auf ganze transcendente Functionen (d. h. Functionen, die durch beständig convergente Potenzreihen darstellbar sind,) ausdehnen lassen, so wäre damit ein einfacher Beweis für die Transcendenz von π erbracht. Dieser Satz ist indessen nicht richtig und es soll in den folgenden Zeilen eine ganze transcendente Function mit rationalen Coefficienten construirt werden, welche zwar für eine Wurzel, nicht aber zugleich für die anderen Wurzeln einer irreductibeln algebraischen Gleichung verschwindet. Es ist dies auf mannigfaltige Weise möglich, am'bequemsten wohl mit Benutzung der im folgenden zu entwickelnden Darstellung einer beliebigen Grösse, einer Darstellung, die sich als Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise auffassen lässt.

I.

Es sei gegeben eine unendliche Reihe von Grössen

$$c_1, c_2, \dots, c_\nu, \dots$$

und zwar möge sein:

$$c_1 = \frac{1}{a_1}, \quad c_2 = \frac{1}{a_1 a_2}, \quad \dots, \quad c_\nu = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_\nu}, \quad \dots,$$

wo die Grössen

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots$$

irgend welche ganze positive Zahlen ausser 0 und 1 bedeuten. Es lässt sich dann jede positive, rationale oder irrationale Grösse ω , die kleiner ist als 1, in der Form darstellen:

$$\omega = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \dots,$$

wo a_1, a_2, \dots ganze Zahlen bedeuten, die den Ungleichungen genügen

$$a_1 < \alpha_1, \quad a_2 < \alpha_2, \quad \dots$$

Um diesen Satz zu beweisen genügt es die Methode anzugeben, wie die Grössen a gefunden werden, wenn die Grössen α gegeben sind.

Man setze

$$(1), (2) \quad \begin{cases} [\alpha_1 \omega] = a_1 \\ [\alpha_2 \omega_1] = a_2 \\ \dots \\ [\alpha_\nu \omega_{\nu-1}] = a_\nu \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 \omega - a_1 = \omega_1 \\ \alpha_2 \omega_1 - a_2 = \omega_2 \\ \dots \\ \alpha_\nu \omega_{\nu-1} - a_\nu = \omega_\nu \\ \dots \end{cases}$$

Dabei bedeutet $[x]$ die grösste ganze Zahl, welche nicht grösser ist als x ; es sind demnach die Grössen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu$, sämtlich echte Brüche, es sei denn, dass eine derselben und mithin alle folgenden verschwinden. In dem letzteren Falle ist die Darstellung eine endliche, sonst ist sie unendlich. Die Grössen a genügen ferner der geforderten Bedingung

$$a_\nu < \alpha_\nu.$$

Die Darstellung liefert einen convergenten Ausdruck; denn es ist

$$\frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_1 a_2} + \dots + \frac{a_\nu}{a_1 a_2 \dots a_\nu} \leq \frac{a_1 - 1}{a_1} + \frac{a_2 - 1}{a_1 a_2} + \dots + \frac{a_\nu - 1}{a_1 a_2 \dots a_\nu}$$

also

$$\leq 1 - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_\nu}.$$

Endlich ist zu zeigen, dass

$$(3) \quad \lim \left[\omega - \frac{a_1}{a_1} - \frac{a_2}{a_1 a_2} - \dots - \frac{a_\nu}{a_1 a_2 \dots a_\nu} \right] = 0.$$

Multipliziert man die ν ersten von den Gleichungen (2) der Reihe nach mit

$$\frac{1}{a_1}, \quad \frac{1}{a_1 a_2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_\nu}$$

und addirt dann, so erhält man

$$\omega - \frac{a_1}{a_1} - \frac{a_2}{a_1 a_2} - \dots - \frac{a_\nu}{a_1 a_2 \dots a_\nu} = \frac{\omega_\nu}{a_1 a_2 \dots a_\nu} < \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_\nu},$$

woraus die Gleichung (3) sich ergibt. Damit ist der in Rede stehende Satz erwiesen.

Es seien noch, wiewohl für unseren nächsten Zweck unnöthig, die folgenden Bemerkungen zu dieser Darstellungsweise einer Zahl, welche eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise repräsentirt, hinzugefügt.

1°. Wenn von irgend einem Index ab jede Grösse a den höchsten Werth hat, den sie haben kann, so lässt sich statt dieser Darstellung eine endliche geben.

Denn es sei

$$\omega = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_k c_k + (a_{k+1} - 1) c_{k+1} + (a_{k+2} - 1) c_{k+2} + \dots;$$

nun ist aber

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{k+\nu} - 1) c_{k+\nu} = c_k,$$

also

$$\omega = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_{k-1} c_{k-1} + (a_k + 1) c_k.$$

Dieses ist eine endliche Darstellung und wenn $a_k + 1 < \alpha_k$, so ist dieselbe auch von der gewünschten Form; wo nicht, so muss sein

$$a_k + 1 = \alpha_k,$$

also

$$(a_k + 1)c_k = c_{k-1}.$$

Mithin ist die noch kürzere Darstellung möglich

$$\omega = a_1 c_1 + \dots + a_{k-2} c_{k-2} + (a_{k-1} + 1) c_{k-1}.$$

Dieses ist nun die gewünschte Form, wenn $a_{k-1} + 1 < \alpha_{k-1}$; wo nicht, so verfährt man wie eben. Schliesslich muss man auf diese Weise zum Ziele gelangen, da $\omega < 1$ vorausgesetzt wird und die Ungleichung stattfindet

$$(a_1 + 1)c_1 \leq 1.$$

2°. Abgesehen von dem eben erwähnten Falle giebt es für eine Grösse ω stets nur eine Darstellung in der gewünschten Form, nämlich die oben gelehrt.

Denn wenn ω sich in zweierlei Weise darstellen liesse:

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_k c_k + a_{k+1} c_{k+1} + \dots = s$$

und

$$a'_1 c_1 + a'_2 c_2 + \dots + a'_k c_k + a'_{k+1} c_{k+1} + \dots = s'.$$

so seien die ersten beiden von einander verschiedenen Grössen a diejenigen mit dem Index $k + 1$, während die vorangehenden übereinstimmen mögen und zwar sei

$$a_{k+1} > a'_{k+1}$$

dann ist

$$(4) \quad s \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_k c_k + (a'_{k+1} + 1) c_{k+1}.$$

Da wir voraussetzen, dass keine der Darstellungen zu den oben erwähnten gehöre, d. h. zu denen, bei welchen von irgend einem Index ab jedes a um 1 kleiner ist als das entsprechende α , so ist

$$a'_{k+2} c_{k+2} + a'_{k+3} c_{k+3} + \dots < (\alpha_{k+2} - 1) c_{k+2} + (\alpha_{k+3} - 1) c_{k+3} + \dots$$

$$\text{d. h. } < c_{k+1},$$

also

$$(5) \quad s' < a'_1 c_1 + a'_2 c_2 + \dots + a'_k c_k + (a'_{k+1} + 1) c_{k+1};$$

durch Vergleichung von (4) und (5) ergibt sich

$$s > s'.$$

II.

Wir wollen jetzt mit Hilfe dieser Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise einer Zahl eine ganze transcendente Function bilden, die zwar für eine, nicht aber für jede Wurzel einer irreductibeln Gleichung verschwindet.

Als die irreductible Gleichung wählen wir die Gleichung:

$$kx^2 - 1 = 0,$$

wo k eine positive ganze, nicht quadratische Zahl bedeutet. Es sei ferner ω eine beliebige irrationale Grösse, welche nur die beiden Ungleichungen befriedigt:

$$\omega < 1 \quad \text{und} \quad \omega \sqrt{k} < 1.$$

Wir entwickeln dann die beiden Grössen ω und $\omega \sqrt{k}$ auf die in I gezeigte Weise; dabei soll sein

$$\alpha_1 = k, \quad \alpha_2 = 2k, \quad \dots, \quad \alpha_\nu = \nu k, \quad \dots$$

also

$$c_1 = \frac{1}{\lfloor 1k \rfloor}, \quad c_2 = \frac{1}{\lfloor 2k^2 \rfloor}, \quad \dots, \quad c_\nu = \frac{1}{\lfloor \nu k^\nu \rfloor}, \quad \dots$$

Die Entwicklungen seien:

$$\begin{aligned} \omega &= a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots \\ \omega \sqrt{k} &= b_1 c_1 + b_2 c_2 + \dots, \end{aligned}$$

wo

$$a_\nu < \nu k, \quad b_\nu < \nu k.$$

Betrachten wir jetzt die beiden Potenzreihen

$$F(x) = \frac{a_1}{1} x^2 + \frac{a_2}{2} x^4 + \dots + \frac{a_\nu}{\nu} x^{2\nu} + \dots$$

$$G(x) = \frac{b_1}{1} x^2 + \frac{b_2}{2} x^4 + \dots + \frac{b_\nu}{\nu} x^{2\nu} + \dots,$$

so sind diese beständig convergent; denn setzt man statt der Grössen a und b ihre oberen Grenzen, so erhält man noch immer eine beständig convergente Reihe, nämlich die Reihe für $kx^2e^{x^2}$.

Nun ist

$$F\left(\pm \sqrt{\frac{1}{k}}\right) = \omega, \quad G\left(\pm \sqrt{\frac{1}{k}}\right) = \omega \sqrt{k}.$$

Setzt man daher endlich

$$H(x) = F(x) - xG(x),$$

so ist

$$H\left(+\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = 0, \quad H\left(-\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = 2\omega.$$

Demnach hat die ganze transcendente Function $H(x)$, welche rationale Coefficienten besitzt, die Eigenschaft zwar für eine Wurzel der obigen irreductibeln Gleichung zu verschwinden, nicht aber für die andere.
