# CHAPITRE II.

## Etude des surfaces asymptotiques.

### § 16. *Exposé du problème.*

Reprenons les équations de la dynamique en supposant deux degrés de liberté seulement, et par conséquent quatre variables $x_1$, $x_2$, $y_1$ et $y_2$. D'après ce que nous avons vu aux § 14 ces équations admettent certaines solutions particulières remarquables que nous avons appelées asymptotiques. Chacune de ces solutions asymptotiques est représentée, dans le système de représentation géométrique exposé au paragraphe précédent, par certaines courbes trajectoires. L'ensemble de ces courbes engendrent certaines surfaces que nous pouvons appeler surfaces asymptotiques et que nous nous proposons d'étudier.

Ces solutions asymptotiques peuvent se mettre sous la forme suivante:

$$x_1 = \varphi_1(t, w), \qquad x_2 = \varphi_2(t, w), \qquad y_1 = n_1 t + \varphi_3(t, w), \qquad y_2 = n_2 t + \varphi_4(t, w), \tag{1}$$

$w$ étant égal à $Ae^{\alpha t}$, et $A$ étant une constante arbitraire. De plus $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ et $\varphi_4$ sont (par rapport à $t$, $w$ étant regardé un instant comme une constante) des fonctions périodiques de période $T$ et $n_1 T$ et $n_2 T$ sont des multiples de $2\pi$.

Si entre les équations (1) on élimine $t$ et $w$, il viendra:

$$x_1 = f_1(y_1, y_2), \qquad x_2 = f_2(y_1, y_2) \tag{2}$$

et ces équations peuvent être regardées comme définissant nos surfaces asymptotiques. Nous avons vu ensuite que si l'on cherche à développer $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ et $\varphi_4$ suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, on arrive à des séries qui sont divergentes, mais que ces séries représentent néanmoins asymptotiquement ces fonctions lorsque $\mu$ est très petit.

Je rappelle que je conviens de dire que la série

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_p x^p + \ldots$$

représente asymptotiquement la fonction $F(x)$ pour $x$ très petit, quand on a:

$$\lim \frac{F(x) - A_0 - A_1 x - \ldots - A_p x^p}{x^p} = 0 \quad \text{pour } x = 0.$$

J'ai étudié dans les Acta mathematica, tome 8, les propriétés des séries divergentes qui représentent asymptotiquement certaines fonctions et j'ai reconnu que les règles ordinaires du calcul sont applicables à ces séries. Une égalité asymptotique, c'est à dire une égalité entre une série divergente et une fonction qu'elle représente asymptotiquement, peut subir toutes les opérations ordinaires du calcul, à l'exception de la différentiation.

Soient donc

$$\sigma_1(t, w, \sqrt{\mu}), \ \sigma_2(t, w, \sqrt{\mu}), \ \sigma_3(t, w, \sqrt{\mu}), \ \sigma_4(t, w, \sqrt{\mu})$$

les séries divergentes ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ qui représentent asymptotiquement $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.

Nous aurons alors les quatre égalités asymptotiques:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sigma_1(t, w, \sqrt{\mu}), & x_2 &= \sigma_2(t, w, \sqrt{\mu}), \\ y_1 &= n_1 t + \sigma_3(t, w, \sqrt{\mu}), & y_2 &= n_2 t + \sigma_4(t, w, \sqrt{\mu}). \end{aligned} \tag{3}$$

Nous pourrons éliminer $t$ et $w$ entre ces égalités d'après les règles ordinaires du calcul et nous obtiendrons ainsi deux nouvelles égalités asymptotiques:

$$x_1 = s_1(y_1, y_2, \sqrt{\mu}), \qquad x_2 = s_2(y_1, y_2, \sqrt{\mu}), \tag{4}$$

où $s_1$ et $s_2$ sont des séries divergentes ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et dont les coefficients sont des fonctions de $y_1$ et de $y_2$.

En général, il n'est pas permis de différentier une égalité asymptotique; mais nous avons démontré directement à la fin du § 14 que dans le cas particulier qui nous occupe, on peut différentier autant de fois que l'on veut les égalités (3), tant par rapport à $t$ que par rapport à $w$.

Nous pouvons en conclure qu'il est permis également de différentier les égalités (4) autant de fois qu'on veut par rapport à $y_1$ et à $y_2$.

Nous nous proposons d'étudier les surfaces asymptotiques définies par les équations (2). Les fonctions $x_1 = f_1$, $x_2 = f_2$ qui entrent dans ces équations devront satisfaire aux équations

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
\frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dy_1} = 0, \\
\frac{dF}{dx_1}\frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} = 0.
\end{aligned}
$$

Nous allons procéder par approximations successives; dans une première approximation nous prendrons pour équations des surfaces asymptotiques les équations (4) en nous arrêtant au second terme des séries (c'est à dire au terme en $\sqrt{\mu}$) inclusivement. L'erreur commise sera alors du même ordre de grandeur que $\mu$.

Dans une seconde approximation, nous prendrons encore pour équations des surfaces asymptotiques les équations (4), mais en prenant un plus grand nombre de termes dans les séries. Nous pourrons en prendre un assez grand nombre pour que l'erreur commise soit du même ordre de grandeur que $\mu^p$, quelque grand que soit $p$.

Enfin dans une troisième approximation, nous chercherons à mettre en évidence les propriétés des équations *exactes* des surfaces asymptotiques, c'est à dire des équations (2).

Nous devons donc d'abord chercher à former directement les séries $s_1$ et $s_2$ des équations (4). Ces séries, substituées à la place de $x_1$ et de $x_2$, doivent satisfaire formellement aux équations (5).

Nous sommes donc conduits à chercher des séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, qui satisfassent formellement aux équations (5). Les coefficients de ces séries seront des fonctions de $y_1$ et de $y_2$ qui ne devront pas changer quand $y_1$ et $y_2$ augmenteront respectivement de $n_1 T$ et $n_2 T$.

Mais nous trouverons une infinité de séries qui satisfont à ces conditions. Comment distinguer parmi celles-là, celles qui doivent entrer dans les égalités (4)? Nous avons vu plus haut que dans notre mode de représentation géométrique, la solution périodique considérée est représentée par une courbe fermée et que par cette courbe fermée, passent deux surfaces asymptotiques. On passe de l'une à l'autre en changeant $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$.

Si donc dans les équations (2) on change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$, on obtient une seconde surface asymptotique qui doit couper la première.

En d'autres termes, si on considère les deux surfaces asymptotiques ainsi obtenues comme deux nappes d'une même surface, on peut dire que cette surface a une courbe double.

Soit $s_1^p$ et $s_2^p$ la somme des $p$ premiers termes des séries $s_1$ et $s_2$, les équations:

$$(6)\qquad \begin{aligned} x_1 &= s_1^p(y_1, y_2, \sqrt{\mu}), & x_2 &= s_2^p(y_1, y_2, \sqrt{\mu}), \\ x_1 &= s_1^p(y_1, y_2, -\sqrt{\mu}), & x_2 &= s_2^p(y_1, y_2, -\sqrt{\mu}) \end{aligned}$$

représenteront deux surfaces qui différeront peu des deux nappes dont je viens de parler et qui par conséquent devront se couper.

Si l'on considère ces deux surfaces comme deux nappes d'une surface unique, on peut dire que cette surface unique présente une courbe double.

Nous verrons dans la suite que cette condition suffit pour faire distinguer les séries $s_1$ et $s_2$ parmi toutes les séries de même forme qui satisfont formellement aux équations (5).

## § 17. *Première approximation.*

Reprenons nos hypothèses ordinaires, à savoir: que quatre variables, deux linéaires $x_1$ et $x_2$, deux angulaires $y_1$ et $y_2$ sont liées par les équations:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}. \end{aligned}$$

Que la constante $C$ des forces vives étant regardée comme une des données de la question, ces quatre variables satisfont à l'équation:

$$(2)\qquad F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

de telle façon qu'il n'y en a que trois d'indépendantes.

Que l'on a adopté un mode de représentation géométrique tel qu'à toute situation du système correspond un point représentatif et réciproquement.

Que $F$ dépend d'un paramètre très petit $\mu$, de telle façon qu'on puisse développer $F$ suivant les puissances de $\mu$ et écrire:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 \dots$$

Que $F_0$ ne dépend que de $x_1$ et $x_2$ et est indépendant de $y_1$ et de $y_2$.

Ces conditions sont remplies dans le cas particulier du problème des trois corps qui nous a servi d'exemple au paragraphe précédent.

Supposons que pour certaines valeurs de $x_1$ et de $x_2$, par exemple pour:

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0$$

les deux nombres:

$$-\frac{dF_0}{dx_1} \quad \text{et} \quad -\frac{dF_0}{dx_2}$$

(que j'appellerai pour abréger $n_1$ et $n_2$) sont commensurables entre eux.

D'après ce que nous avons vu dans le § 11 à chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$ correspond une équation

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0,$$

qui portait le n° 7 dans le paragraphe cité, et à chaque racine de cette équation (7) correspond une solution périodique des équations (1).

Nous avons vu ensuite dans le § 12 que le nombre des racines de l'équation (7) est toujours pair, que la moitié de ces racines correspond à des solutions périodiques stables et l'autre moitié à des solutions instables.

*Les équations* (1) *ont donc si $\mu$ est assez petit des solutions périodiques instables.*

Chacune de ces solutions périodiques sera représentée dans le mode de représentation adopté par une courbe trajectoire fermée.

Nous avons vu au § 13 que par chacune des courbes fermées qui représentent une solution périodique instable, passent deux surfaces trajectoires dites *asymptotiques* sur lesquelles sont tracées en nombre infini des trajectoires qui vont en se rapprochant asymptotiquement de la courbe trajectoire fermée.

Les équations (1) nous conduisent donc à une infinité de surfaces trajectoires asymptotiques dont je me propose de trouver l'équation.

Voyons d'abord sous quelle forme se présente en général l'équation d'une surface trajectoire. Cette équation pourra s'écrire

$$x_1 = \Phi_1(y_1, y_2), \qquad x_2 = \Phi_2(y_1, y_2),$$

$\Phi_1$ et $\Phi_2$ étant deux fonctions de $y_1$ et de $y_2$ qui doivent être choisies de telle sorte que l'on ait identiquement:

$$F(\Phi_1, \Phi_2, y_1, y_2) = C.$$

Ces deux fonctions $\Phi_1$ et $\Phi_2$ devront d'ailleurs satisfaire à deux équations aux dérivées partielles:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dy_1} &= 0, \\ \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} &= 0. \end{aligned}$$

Il pourrait d'ailleurs nous suffire d'envisager la première de ces équations, car on peut en faire disparaître $x_2$, en remplaçant cette variable par sa valeur que l'on peut tirer de (2) en fonction de $x_1$, de $y_1$ et de $y_2$.

Voici comment nous procèderons pour intégrer les équations (3) en supposant que $x_1$ et $x_2$ sont très voisins de $x_1^0$ et de $x_2^0$, et que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est commensurable.

Nous supposerons que $x_1$ et $x_2$ sont développés selon les puissances de $\sqrt{\mu}$ et nous écrirons:

$$(4) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu} + x_1^2\mu + x_1^3\mu\sqrt{\mu} + \dots, \\ x_2 &= x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu} + x_2^2\mu + x_2^3\mu\sqrt{\mu} + \dots, \end{aligned}$$

et nous chercherons à déterminer les fonctions $x_i^k$ de telle façon qu'en substituant dans les équations (3) à la place de $x_1$ et de $x_2$ leurs valeurs (4), ces équations soient satisfaites formellement.[1]

---

[1] Si $x_1^0$ et $x_2^0$ étaient choisis de telle sorte que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable,

Si dans $F$ nous substituons à la place de $x_1$ et de $x_2$ leurs valeurs (4), $F$ deviendra développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et on pourra écrire

$$F = H_0 + \sqrt{\mu}H_1 + \mu H_2 + \mu\sqrt{\mu}H_3 + \dots.$$

On voit d'ailleurs sans peine que:

$$H_0 = F_0(x_1^0, x_2^0),$$

$$H_1 = x_1^1\frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^1\frac{dF_0}{dx_2^0} = -n_1x_1^1 - n_2x_2^1,$$

$$H_2 = F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2)$$

$$+\left[(x_1^1)^2\frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2} + 2x_1^1x_2^1\frac{d^2F_0}{dx_1^0dx_2^0} + (x_2^1)^2\frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}\right] - n_1x_1^2 - n_2x_2^2,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

et plus généralement:

$$H_k = \theta_k - [Lx_1^1x_1^{k-1} + M(x_1^1x_2^{k-1} + x_2^1x_1^{k-1}) + Nx_2^1x_2^{k-1}] - n_1x_1^k - n_2x_2^k,$$

$\theta_k$ ne dépendant que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \dots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \dots, x_2^{k-2}$, et en posant pour abréger

$$L = -\frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2}, \qquad M = -\frac{d^2F_0}{dx_1^0dx_2^0}, \qquad N = -\frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}.$$

La première des équations (3) nous donne alors, en égalant les puissances semblables de $\sqrt{\mu}$, une suite d'équations qui nous permettront de déterminer successivement $x_1^0, x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^k$.

Nous pouvons toujours supposer que $n_2 = 0$. Car si cela n'avait pas lieu nous poserions:

$$x_1'' = ax_1 + bx_2, \qquad y_1'' = dy_1 - cy_2,$$

$$x_2'' = cx_1 + dx_2, \qquad y_2'' = -by_1 + ay_2,$$

---

on pourrait se contenter de développer $x_1$ et $x_2$ suivant les puissances de $\mu$ (et non de $\sqrt{\mu}$). On arriverait ainsi à des séries, qui à la vérité ne seraient pas convergentes au sens géométrique du mot, mais qui comme celles de M. LINDSTEDT pourraient rendre des services dans certains cas.

$a, b, c, d$ étant quatre nombres entiers tels que

$$ad - bc = 1.$$

Après ce changement de variables les équations conservent la forme canonique.

La fonction $F$ qui est périodique de période $2\pi$ par rapport à $y_1$ et à $y_2$, est encore périodique de période $2\pi$ par rapport à $y_1''$ et à $y_2''$. Le changement de variables n'a donc pas altéré la forme des équations (1).

Les nombres $n_1$ et $n_2$ sont remplacés par deux nouveaux nombres $n_1''$ et $n_2''$ qui jouent par rapport aux équations transformées le même rôle que $n_1$ et $n_2$ par rapport aux équations primitives et l'on a:

$$n_1'' = \quad dn_1 - cn_2,$$

$$n_2'' = -bn_1 + an_2.$$

Mais le rapport de $n_1$ à $n_2$ étant commensurable par hypothèse, il est toujours possible de choisir les quatre entiers $a, b, c, d$ de telle sorte que

$$n_2'' = -bn_1 + an_2 = 0.$$

Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, supposer que $n_2$ soit nul; c'est ce que nous ferons jusqu'à nouvel ordre.

Nous supposerons en même temps $n_1 T = 2\pi$.

Si après cette simplification, nous égalons les coefficients de $\sqrt{\mu}$ dans les deux membres des deux équations (3) il viendra

$$-n_1 \frac{dx_1^1}{dy_1} = -n_1 \frac{dx_2^1}{dy_1} = 0 \tag{5}$$

ce qui montre que $x_1^1$ et $x_2^1$ ne dépendent que de $y_2$.

Egalons maintenant les coefficients de $\mu$ dans les deux membres de la première des équations (3), il viendra, en tenant compte des équations (5):

$$-n_1 \frac{dx_1^2}{dy_1} - (Mx_1^1 + Nx_2^1)\frac{dx_1^1}{dy_2} + \frac{dF_1}{dy_1} = 0. \tag{6}$$

Nous nous proposerons dans ce qui va suivre de déterminer les fonctions $x_i^k$ de telle façon que ce soient des fonctions périodiques de $y_1$, qui ne doivent pas être altérées quand, $y_2$ conservant la même valeur, $y_1$ augmentera de $2\pi$.

Nos fonctions pourront alors être développées en séries trigonométriques suivant les sinus et cosinus des multiples de $y_1$. Nous conviendrons de représenter par la notation

$$[U]$$

le terme tout connu dans le développement de la fonction périodique $U$, suivant les lignes trigonométriques de $y_1$ et de ses multiples. Dans ces conditions on aura:

$$\left[\frac{dU}{dy_1}\right] = 0,$$

et je puis écrire

$$\left[(Mx_1^1 + Nx_2^1)\frac{dx_1^1}{dy_2}\right] = 0,$$

$$\left[(Mx_1^1 + Nx_2^1)\frac{dx_2^1}{dy_2}\right] = \left[\frac{dF_1}{dy_2}\right].$$

Comme $x_1^1$ et $x_2^1$ ne dépendent pas de $y_1$, je puis écrire plus simplement:

(7) $$\frac{dx_1^1}{dy_2} = 0, \qquad (Mx_1^1 + Nx_2^1)\frac{dx_2^1}{dy_2} = \left[\frac{dF_1}{dy_2}\right].$$

La première de ces équations montre que $x_1^1$ se réduit à une constante. Quant à la seconde, elle est facile à intégrer. On a en effet:

$$\left[\frac{dF_1}{dy_2}\right] = \frac{d[F_1]}{dy_2},$$

ce qui nous donne pour l'intégrale de l'équation (7)

(8) $$Mx_1^1x_2^1 + \frac{N}{2}(x_2^1)^2 = [F_1] + C_1,$$

$C_1$ désignant une constante d'intégration.

Mais si nous regardons la constante des forces vives $C$ comme une des données de la question, nous ne pouvons plus considérer les deux constantes $x_1^1$ et $C_1$ comme arbitraires. On doit avoir en effet identiquement

$$F = H_0 + \sqrt{\mu}H_1 + \mu H_2 + \mu\sqrt{\mu}H_3 + \ldots = C$$

ou

$$H_0 = C, \qquad H_1 = 0, \qquad H_2 = 0, \quad \ldots$$

ou:

$$F_0(x_1^0, x_2^0) = C, \qquad -n_1 x_1^1 = 0, \quad \ldots .$$

Ainsi la constante $x_1^1$ est nulle, ce qui apporte de nouvelles simplifications dans nos équations.

L'équation (8) devient en effet

$$x_2^1 = \sqrt{\frac{2}{N}}([F_1] + C_1).$$

Nous nous contenterons dans ce paragraphe d'écrire et de discuter les équations de nos surfaces trajectoires en négligeant les termes en $\mu$ et ne tenant compte que des termes en $\sqrt{\mu}$.

Nous supposerons donc que $x_1$ et $x_2$ sont définis en fonction de $y_1$ et de $y_2$ par les équations suivantes:

$$x_1 = x_1^0 + \sqrt{\mu} x_1^1 = x_1^0,$$

$$x_2 = x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 = x_2^0 + \sqrt{\frac{2\mu}{N}([F_1] + C_1)}.$$

D'après cela, $x_1$ serait une constante et $x_2$ une fonction de $y_2$ seulement, indépendante de $y_1$.

Revenons à notre premier exemple du § 15. Ce que nous dirons s'appliquerait également aux deux autres exemples, mais c'est sur le premier que je veux insister parce que c'est un cas particulier du problème des trois corps.

Nous avons vu que l'on pouvait représenter la situation du système par le point $P$ qui a pour coordonnées rectangulaires:

$$\cos y_1' e^{\xi \cos y_2'} \quad \sin y_1' e^{\xi \cos y_2'}, \; \xi \sin y_2',$$

où

$$y_1' = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad y_2' = \frac{1}{2}(y_1 - y_2), \qquad \xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{L - G}{L + G} = \frac{-x_2}{x_1'},$$

$$y_1 = g - t, \qquad y_2 = l.$$

Nous avions observé de plus que les variables

$$x'_1 = x_1 + x_2, \qquad x'_2 = x_1 - x_2$$

forment avec $y'_1$ et $y'_2$ un système de variables canoniques.

Nous pouvons donc regarder $\xi, y'_1$ et $y'_2$ comme un système particulier de coordonnées définissant la position du point $P$ dans l'espace, de sorte que toute relation entre $\xi, y'_1 . y'_2$ est l'équation d'une surface.

Mais ensuite, nous avons dû faire un autre changement de variables.

Nous avons posé:

$$x''_1 = ax_1 + dx_2, \qquad y''_1 = dy_1 - cy_2,$$
$$x''_2 = cx_1 + dx_2, \qquad y''_2 = -by_1 + ay_2,$$

en choisissant les nombres entiers $a, b, c, d$ de façon à annuler le nombre que nous avons appelé $n''_2$.

Après ce changement de variables, nous avons supprimé les accents devenus inutiles et nous avons restitué le nom de $x_1, x_2, y_1, y_2$ à nos nouvelles variables indépendantes $x''_1, x''_2, y''_1$ et $y''_2$.

En conséquence, les variables que nous avons appelées $x_1, x_2, y_1$ et $y_2$ dans tout le calcul qui précède, et *auxquelles nous conserverons désormais ce nom,* ne sont pas les mêmes que celles que nous avions désignées par les mêmes lettres dans le premier exemple du § 15, c'est à dire $G, L, g - t$ et $l$.

Il est clair que notre nouvel $y_1$ et notre nouvel $y_2$ sont des fonctions linéaires de:

$$y'_1 = \frac{1}{2}(g - t + l) \quad \text{et de} \quad y'_2 = \frac{1}{2}(g - t - l)$$

et que le rapport du nouvel $x_2$ au nouvel $x_1$ est une fonction linéaire et fractionnaire de $\xi$.

Nous devons conclure de là que l'on peut définir complètement la position du point $P$ dans l'espace par le nouvel $y_1$, le nouvel $y_2$ et le rapport du nouvel $x_2$ au nouvel $x_1$ de telle façon que toute relation entre $y_1, y_2$ et $\frac{x_2}{x_1}$ est l'équation d'une surface.

Que ce système particulier de coordonnées est tel que l'on peut augmenter $y_1$ ou $y_2$ d'un multiple de $2\pi$ sans que le point $P$ change.

L'équation approximative de nos surfaces trajectoires, en négligeant les termes en $\mu$ sera:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu}}{x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu}} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}. \tag{9}$$

Nous nous proposons tout d'abord de construire les surfaces représentées par cette équation approximative (9).

Observons d'abord que $y_1 = 0$ est l'équation d'une certaine surface $S$ et que la portion de cette surface qui nous sera utile est une portion de surface sans contact.

En effet il suffit de montrer que l'on a:

$$\frac{dy_1}{dt} \gtrless 0.$$

Or il en est évidemment ainsi, car si l'on pose

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

il vient:

$$\frac{dy_1}{dt} = n_1 - \mu\frac{dF_1}{dx_1} - \mu^2\frac{dF_2}{dx_1} + \dots.$$

Le paramètre $\mu$ étant très petit, $\frac{dy_1}{dt}$ est de même signe que $n_1$ et $n_1$ est une constante qui est toujours de même signe.

Donc $\frac{dy_1}{dt}$ est toujours de même signe et ne peut s'annuler.

C. Q. F. D.

La position d'un point $P$ sur la surface $S$ sera définie par les deux autres coordonnées $y_2$ et $\frac{x_2}{x_1}$; ce système de coordonnées est tout à fait analogue aux coordonnées polaires, c'est à dire que les courbes:

$$\frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$$

sont des courbes fermées concentriques et que le point $P$ ne change pas quand l'autre coordonnée $y_2$ augmente de $2\pi$.

Reprenons les surfaces définies par l'équation (9) et étudions leurs intersections avec la portion de surface $S$ qui a pour équation $y_1 = 0$.

Je remarque d'abord que $\sqrt{\mu}$ étant très petit, ces intersections différeront fort peu des courbes $\frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$

Mais pour étudier plus complètement la forme de ces courbes d'intersection, il faut d'abord rechercher quelles sont les propriétés de la fonction

$$[F_1].$$

Revenons aux notations du § 11. Dans ce paragraphe nous avons posé:

$$F_1 = \Sigma A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + h),$$

$A$ et $h$ étant des fonctions de $x_1^0, x_2^0, x_3^0$; comme nous n'avons plus ici que deux degrés de liberté, j'écrirai simplement:

$$F_1 = \Sigma A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + h).$$

En faisant ensuite:

$$y_1 = n_1 t, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \qquad \omega = (n_1 m_1 + n_2 m_2)t + m_2 \varpi_2 + h,$$

nous trouvions:

$$F_1 = \Sigma A \sin \omega.$$

Je posais ensuite:

$$\psi = \mathrm{S} A \sin \omega,$$

la sommation indiquée par le signe $\mathrm{S}$ s'étendant à tous les termes tels que:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0;$$

d'où

$$\omega = m_2 \varpi_2 + h.$$

Dans le cas qui nous occupe, $n_2$ est nul; la condition $m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0$ se réduit à $m_1 = 0$ et on a $y_2 = \varpi_2$; il vient donc:

$$\psi = \mathrm{S} A \sin(m_2 \varpi_2 + h) = \mathrm{S} A \sin(m_2 y_2 + h).$$

D'après la définition de $[F_1]$, il suffit pour obtenir cette quantité de supprimer dans l'expression de $F_1$ tous les termes où $m_1$ n'est pas nul; il vient donc:

$$[F_1] = \mathrm{S} A \sin(m_2 y_2 + h) = \psi.$$

Ainsi la fonction que nous appelons ici $[F_1]$ est la même que nous désignions par $\psi$ dans la 1ère partie.

$[F_1]$ est par conséquent une fonction périodique de $y_2$ et cette fonction est finie; elle doit donc passer au moins par un maximum et par un minimum.

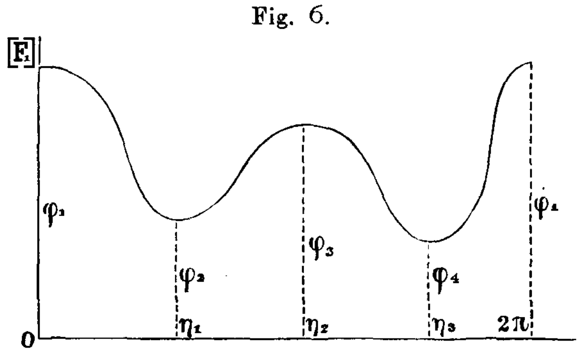
Nous supposerons pour fixer les idées que $[F_1]$ varie de la façon suivante quand $y_2$ varie depuis o jusqu'à $2\pi$.

Pour $y_2 = 0$ $[F_1]$ passe par un maximum égal à $\varphi_1$.
Pour $y_2 = \eta_1$ $[F_1]$ passe par un minimum égal à $\varphi_2$.
Pour $y_2 = \eta_2$ $[F_1]$ passe par un maximum égal à $\varphi_3$.
Pour $y_2 = \eta_3$ $[F_1]$ passe par un minimum égal à $\varphi_4$.
Pour $y_2 = 2\pi$ $[F_1]$ reprend la valeur $\varphi_1$.

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3 > \varphi_4.$$

Ces hypothèses peuvent être représentées par la courbe suivante dont l'abscisse est $y_2$ et l'ordonnée $[F_1]$:

Fig. 6.




Ayant ainsi fixé les idées, je puis construire les courbes

$$y_1 = 0, \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

Nous verrons que selon la valeur de la constante d'intégration $C_1$, ces courbes affecteront des formes différentes.

Dans la figure (7), j'ai représenté par un trait plein ——— les deux courbes $C_1 = -\varphi_4$ et $C_1 = -\varphi_2$; ces deux courbes ont chacune un point double dont les coordonnées sont respectivement:

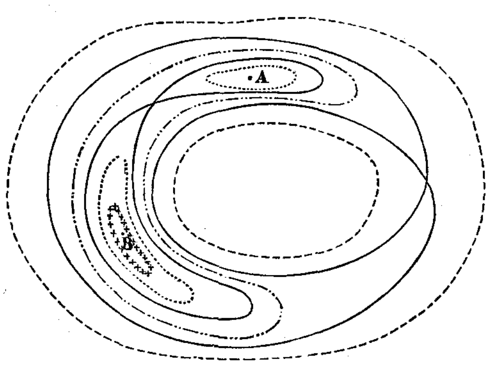
$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = \eta_3$$

et:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = \eta_1.$$

J'ai représenté par un trait pointillé - - - - - - - les deux branches d'une courbe correspondant à une valeur de $C_1 > -\varphi_4$.

Fig. 7.




J'ai représenté par le trait mixte _.._.._.._.. une courbe correspondant à une valeur de $C_1$ comprise entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$.

J'ai représenté par le trait ponctué ........ les deux branches d'une courbe correspondant à une valeur de $C_1$ comprise entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$.

Pour $C_1 = -\varphi_3$ l'une de ces deux branches se réduit à un point représenté sur la figure en $A$, $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}$, $y_2 = \eta_2$; l'autre branche est représentée sur la figure par le trait × × × × × ×.

Pour $C_1$ compris entre $-\varphi_3$ et $-\varphi_1$, cette seconde branche subsiste seule; pour $C_1 = -\varphi_1$, elle se réduit à son tour à un point représenté en $B$ sur la figure et ayant pour coordonnées:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = 0.$$

Enfin pour $C_1 < -\varphi_1$, la courbe devient tout entière imaginaire.

Les surfaces définies par l'équation (1) ont une forme générale qu'il est aisé de déduire de celle des courbes que nous venons de construire.

Considérons en effet une quelconque de ces courbes et par tous ses points faisons passer une des lignes dont l'équation générale est:

$$y_2 = \text{const.}; \qquad \frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$$

L'ensemble des lignes ainsi construites constituera une surface fermée qui sera précisément l'une des surfaces définies par l'équation (9).

On voit par là que ces surfaces seront en général des surfaces fermées triplement connexes (c'est à dire ayant mêmes connexions que le tore).

Pour $C_1 > -\varphi_4$ ou pour $C_1$ compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$ on trouve deux pareilles surfaces, intérieures l'une à l'autre dans le premier cas, extérieures l'une à l'autre dans le second.

Pour $C_1$ compris entre $-\varphi_3$ et $-\varphi_1$, ou entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$ on n'a plus qu'une seule surface triplement connexe; enfin pour $C_1 < -\varphi_1$ la surface cesse complètement d'exister.

Passons aux quatre surfaces remarquables:

$$C = -\varphi_1, \ -\varphi_2, \ -\varphi_3 \quad \text{et} \quad -\varphi_4.$$

Les surfaces $C_1 = -\varphi_2$ et $C_1 = -\varphi_4$ présentent une courbe double et ont mêmes connexions que la surface engendrée par la révolution d'un limaçon de Pascal à point double ou d'une lemniscate, autour d'un axe qui ne rencontre pas la courbe.

La surface $C_1 = -\varphi_3$ se réduit à une seule surface fermée triplement connexe et à une courbe fermée isolée; enfin la surface $C_1 = -\varphi_1$ se réduit à une courbe fermée isolée.

Dans le § 11 nous avons envisagé l'équation:

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0$$

qui portait le n° 7 dans ce paragraphe; nous avons vu qu'à chacune des racines de cette équation correspond une solution périodique. Mais dans le cas qui nous occupe, et d'après une remarque que nous venons de faire, cette équation peut s'écrire:

$$\frac{[dF_1]}{dy_2} = 0,$$

de telle sorte que les solutions périodiques correspondront aux maxima et aux minima de $[F_1]$. Dans le cas actuel, ces maxima, de même que les minima, seront au nombre de deux.

Nous aurons donc deux solutions périodiques instables correspondant aux deux courbes doubles des surfaces $C_1 = -\varphi_2$ et $-\varphi_4$ et deux solutions périodiques stables, correspondant aux deux courbes fermées isolées des surfaces $C_1 = -\varphi_3$ et $-\varphi_1$.

Quelles sont parmi ces surfaces, celles qui diffèrent peu des surfaces asymptotiques et les représentent en première approximation? D'après ce que nous avons vu au § 16, ce seront celles d'entre elles qui présentent une courbe double, c'est à dire les surfaces $C_1 = -\varphi_4$ et $C_1 = -\varphi_2$.

## § 18. *Deuxième approximation.*

Reprenons les équations (1) du paragraphe précédent et les hypothèses faites au début de ce paragraphe; écrivons:

$$x_1 = x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu} + x_1^2\mu + x_1^3\mu\sqrt{\mu} + \dots,$$
$$x_2 = x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu} + x_2^2\mu + x_2^3\mu\sqrt{\mu} + \dots;$$

imaginons que les coefficients de ces deux développements soient des fonctions de $y_1$ et de $y_2$ et cherchons à déterminer ces coefficients de façon que ces équations soient compatibles avec les équations différentielles (1). du paragraphe précédent, c'est à dire que l'on ait:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dy_1} &= 0, \\ \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} &= 0. \end{aligned}$$

C'est là le problème que nous nous sommes proposé plus haut.

Ce problème peut être présenté sous une autre forme (en se plaçant au point de vue des *Vorlesungen über Dynamik*).

Si $x_1$ et $x_2$ sont deux fonctions de $y_1$ et de $y_2$ satisfaisant aux équations (1), l'expression:

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2$$

devra être une différentielle exacte. Si donc nous posons:

$$dS = x_1 dy_1 + x_2 dy_2,$$

$S$ sera une fonction de $y_1$ et de $y_2$ qui sera définie par l'équation aux dérivées partielles:

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right) = C. \tag{2}$$

$S$ pourra se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et l'on aura:

$$S = S_0 + S_1\sqrt{\mu} + S_2\mu + S_3\mu\sqrt{\mu} + \dots \tag{3}$$

$S_0, S_1, \dots, S_k, \dots$ seront des fonctions de $y_1$ et de $y_2$ et on aura:

$$\frac{dS_k}{dy_1} = x_1^k, \qquad \frac{dS_k}{dy_2} = x_2^k.$$

Je rappelle maintenant quelles conditions nous avons imposées dans le paragraphe précédent, aux fonctions $x_1^k$ et $x_2^k$; nous avons supposé d'abord que $x_1^0$ et $x_2^0$ devaient être des constantes. On a alors

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2.$$

Si nous appelons ensuite $n_1$ et $n_2$ les valeurs de $-\frac{dF_0}{dx_1}$ et $-\frac{dF_0}{dx_2}$ pour $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$, ces quantités $n_1$ et $n_2$ seront encore des constantes. L'analyse qui va suivre s'applique au cas où le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est commensurable. Dans ce cas on peut toujours, comme nous l'avons vu, supposer $n_2 = 0$; c'est ce que nous ferons désormais, comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent.

Nous avons supposé en outre dans ce paragraphe que $x_1^k$ et $x_2^k$ sont des fonctions périodiques de $y_1$ qui ne changent pas de valeur quand on change $y_1$ et $y_2$ en $y_1 + 2\pi$ et $y_2$.

Il résulte de là que $\frac{dS_k}{dy_1}$ et $\frac{dS_k}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques par rapport à $y_1$ et qu'on peut écrire:

$$S_k = \frac{\lambda_k}{n_1} y_1 + S'_k, \tag{4}$$

$\lambda_k$ étant une constante et $S'_k$ une fonction périodique de $y_1$.

Supposons que dans le premier membre de l'équation (2)

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right)$$

on remplace $S$ par son développement (3); on verra que $F$ deviendra développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et qu'on aura, ainsi qu'on l'a vu dans le paragraphe précédent:

$$F = H_0 + H_1\sqrt{\mu} + H_2\mu + H_3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,$$

les $H$ étant des fonctions de $y_1$, de $y_2$, et des dérivées partielles de $S_0$, $S_1$, $S_2$, etc.

On voit d'ailleurs que $H_0$ dépendra seulement de $S_0$, $H_1$ de $S_0$ et $S_1$, $H_2$ de $S_0$, $S_1$ et $S_2$, $H_3$ de $S_0$, $S_1$, $S_2$, $S_3$ etc.

On trouve d'ailleurs:

$$\begin{aligned}
H_0 &= F_0(x_1^0, x_2^0) = C,\\
H_1 &= -n_1 \frac{dS_1}{dy_1},\\
H_2 &= -n_1 \frac{dS_2}{dy_1} + \Delta S_1 + K_2,\\
H_3 &= -n_1 \frac{dS_3}{dy_1} + 2\Delta S_2 + K_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
H_p &= -n_1 \frac{dS_p}{dy_1} + 2\Delta S_{p-1} + K_p,
\end{aligned}$$

où l'on a posé pour abréger:

$$\Delta S_p = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2} x_1^1 x_1^p + \frac{d^2F_0}{dx_1^0 dx_2^0}(x_1^1 x_2^p + x_2^1 x_1^p) + \frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2} x_2^1 x_2^p\right]$$

et où $K_p$ ne dépend que de $S_0, S_1, \ldots,$ jusqu'à $S_{p-2}$.

Cela posé, pour déterminer par récurrence les fonctions $S_p$, nous aurons les équations suivantes:

$$H_0 = C, \qquad H_1 = 0, \qquad H_2 = 0, \quad \ldots, \quad H_p = 0.$$

Si l'on supposait que les fonctions $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}$ fussent entièrement connues, l'équation

$$H_p = 0$$

ou

$$(5) \qquad n_1 \frac{dS_p}{dy_1} = 2\Delta S_{p-1} + K_p$$

déterminerait la fonction $S_p$ à une fonction arbitraire près de $y_2$.

Mais ce n'est pas tout à fait ainsi que la question se présente.

Supposons que l'on connaisse complètement

$$S_0, S_1, \ldots, S_{p-2}$$

et que l'on connaisse $S_{p-1}$ à une fonction arbitraire près de $y_2$.

Par hypothèse les dérivées de $S_0, S_1, \ldots, S_{p-2}, S_{p-1}$ sont des fonctions périodiques de $y_1$; donc $K_p$ et $\Delta S_{p-1}$ seront des fonctions périodiques de $y_1$.

Désignons par $[U]$ comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent la valeur moyenne de $U$ qui est une fonction périodique de $y_1$.

$S_p$ doit être de la forme (4); nous en concluons que:

$$\left[\frac{dS_p}{dy_1}\right]$$

doit être une constante $\frac{\lambda_p}{n_1}$ indépendante de $y_2$, de sorte que l'équation (5) nous donne:

$$(6) \qquad 2[\Delta S_{p-1}] + [K_p] = \lambda_p,$$

et cette équation déterminera complètement $S_{p-1}$ (si l'on suppose que l'on se donne, soit arbitrairement, soit suivant une loi quelconque, la constante $\lambda_p$).

Nous trouvons d'abord l'équation:

$$H_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dS_1}{dy_1} = 0$$

qui nous montre que $S_1$ est une fonction arbitraire de $y_2$.

Nous en déduirons:

$$2\Delta S_p = -M\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_p}{dy_1} - N\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_p}{dy_2}$$

(nous posons pour abréger:

$$-M = \frac{d^2F_0}{dx_1^0 dx_2^0}, \qquad -N = \frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}$$

comme nous l'avons fait dans le paragraphe cité).

L'équation que nous trouvons ensuite en égalant à 0 la valeur moyenne de $H_2$ est la suivante:

$$[\Delta S_1] + [K_2] = \lambda_2.$$

Or

$$\Delta S_1 = -\frac{N}{2}\left(\frac{dS_1}{dy_2}\right)^2 = [\Delta S_1].$$

D'autre part:

$$K_2 = F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2).$$

$\lambda_2$ est une constante qui, ainsi qu'il est aisé de le voir, est précisément celle que nous avons appelée $-C_1$ dans le paragraphe cité.

Il vient donc:

$$\frac{dS_1}{dy_2} = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

$S_1$ est ainsi entièrement déterminé à une constante près; mais nous pouvons laisser cette constante de côté, elle ne joue en effet aucun rôle puisque les fonctions $S$ n'entrent que par leurs dérivées.

L'équation (6) devient ensuite:

$$\left[N\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p - M\left[\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] + [K_p]. \tag{7}$$

Dans le second membre tout est connu; $K_p$ ne dépend que de $S_0$, $S_1, \ldots, S_{p-2}$; $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est connu puisque $S_{p-1}$ est supposée déterminée à une fonction arbitraire près de $y_2$.

D'autre part $\frac{dS_1}{dy_2}$ est indépendant de $y_1$; le premier membre peut donc s'écrire:

$$N\frac{dS_1}{dy_1}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right],$$

de sorte que l'équation (7) nous donnera $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ en fonction de $y_2$. Nous connaîtrons donc $[S_{p-1}]$ à une constante près et cette constante qui ne joue aucun rôle peut être laissée de côté.

Nous connaissons d'une part $S_{p-1}$ à une fonction arbitraire près de $y_2$; d'autre part nous connaissons $[S_{p-1}]$ en fonction de $y_2$; donc $S_{p-1}$ est entièrement déterminé.

La constante $C_1$ joue un rôle prépondérant. Supposons d'abord qu'elle soit supérieure à la valeur que nous avons appelée $-\varphi_4$ dans les paragraphes cités et par conséquent que $[F_1] + C_1$ soit toujours positif et $\frac{dS_1}{dy_2}$ toujours réel et je pourrai ajouter toujours positif parce que je suis libre de prendre le signe $+$ devant le radical.

Je dis que dans ce cas, on peut choisir arbitrairement les constantes $\lambda$ et que $\frac{dS_p}{dy_1}$ et $\frac{dS_p}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques non seulement de $y_1$, mais encore de $y_2$. ($S_p$ est alors de la forme

$$S_p = \lambda_p y_1 + \mu_p y_2 + S_p'',$$

$\lambda_p$ et $\mu_p$ étant des constantes pendant que $S_p''$ est périodique de période $2\pi$ tant par rapport à $y_1$ que par rapport à $y_2$.)

En effet, supposons que cela soit vrai pour:

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \frac{dS_2}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \ldots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1};$$

je dis que cela sera vrai encore pour $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ et $\frac{dS_p}{dy_1}$.

En effet, nous avons par hypothèse:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \Sigma A_{m_1 m_2} \cos(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \alpha),$$

les $A$ et les $\alpha$ étant des constantes, $m_1$ et $m_2$ étant des entiers.

On aura ensuite par définition

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] = \sum_{m_2=0}^{m_2=\infty} A_{0.m_2} \cos(m_2 y_2 + \alpha).$$

Mais on doit avoir

$$2[\Delta S_{p-2}] + [K_{p-1}] = \lambda_{p-1}$$

et par conséquent:

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1},$$

$\lambda_{p-1}$ étant une constante; on en conclut que:

$$A_{0.m_2} = 0 \quad \text{pour} \quad m_2 \neq 0, \qquad A_{0.0} = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1}.$$

Il vient ainsi

$$S_{p-1} = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1} y_1 + \sum A_{m_1.m_2} \frac{\sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \alpha)}{m_1} + [S_{p-1}],$$

$m_1$ et $m_2$ prenant toujours sous le signe $\Sigma$ toutes les valeurs entières telles que $m_1 \neq 0$.

Ainsi, pour que $S_{p-1}$ soit de la forme voulue, il suffit que:

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$$

soit une fonction périodique de $y_2$. Or $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ est défini par l'équation:

$$N\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p - M\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] + [K_p].$$

$K_p$ ne dépendant que de $S_1, S_2, \ldots, S_{p-2}$ sera périodique en $y_2$.

$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right]$ est une constante $\frac{\lambda_{p-1}}{n_1}$; de plus $\frac{dS_1}{dy_2}$ est une fonction périodique de $y_2$ *qui ne s'annule jamais.*

Il en résulte que $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ peut être développé suivant les sinus et les cosinus des multiples de $y_2$.

On a ensuite:

$$n_1 \frac{dS_p}{dy_1} = 2(\Delta S_{p-1}) + K_p,$$

ce qui montre que $\frac{dS_p}{dy_1}$ est périodique en $y_1$ et $y_2$.

Ainsi en choisissant pour $C_1$ une valeur supérieure à $-\varphi_4$ et en choisissant ensuite les autres constantes $\lambda_3, \lambda_4, \ldots$ d'une façon arbitraire, on trouve pour $\frac{dS}{dy_1}$ et $\frac{dS}{dy_2}$ des séries ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples de $y_1$ et de $y_2$. Ces séries, quoique divergentes, peuvent rendre des services dans certains cas.

Passons maintenant au cas de

$$C_1 = -\varphi_4,$$

qui ainsi que nous l'avons vu au § 17 est celui qui correspond aux séries qui représentent asymptotiquement les surfaces asymptotiques.

L'expression

$$[F_1] + C_1$$

n'est jamais négative, mais elle devient nulle pour une certaine valeur de $y_2$ que nous avons appelée $\eta_3$ dans le paragraphe cité. Je supposerai dans ce paragraphe que cette valeur est nulle; j'ai le droit de le faire, puisque cela n'implique qu'un choix particulier de l'origine des $y_2$.

Ecrivons donc $[F_1] + C_1$ sous forme de série trigonométrique:

$$[F_1] + C_1 = \Sigma A_m \sin m y_2 + \Sigma B_m \cos m y_2.$$

Pour $y_2 = 0$, cette fonction s'annule ainsi que sa dérivée, puisque la fonction étant toujours positive, zéro est pour elle un minimum. Il en résulte que l'expression suivante:

$$\frac{[F_1] + C_1}{\sin^2 \frac{y_2}{2}}$$

est développable suivant les sinus et cosinus des multiples de $y_2$; c'est une fonction périodique de $y_2$ qui ne s'annule jamais et ne devient jamais infinie.

Il suit de là que l'on peut écrire:

$$\frac{\sin\frac{y_2}{2}}{\sqrt{[F_1]+C_1}} = \Sigma A_m \cos my_2 + \Sigma B_m \sin my_2$$

et par conséquent:

$$\frac{dS_1}{dy_2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{N}}\sin\frac{y_2}{2}}{\Sigma A_m \cos my_2 + \Sigma B_m \sin my_2}.$$

Nous pourrons écrire maintenant l'équation (7) sous la forme suivante:

$$(7') \qquad \frac{\sqrt{2N}\sin\frac{y_2}{2}}{\Sigma A_m \cos my_2 + \Sigma B_m \sin my_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p + \Phi_p(y_2),$$

$\Phi_p$ étant une fonction connue de $y_2$.

Cela posé, je me propose de démontrer que:

$$\frac{dS_p}{dy_1} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_2}$$

sont des fonctions périodiques de $y_1$ et de $y_2$, dont la période est $2\pi$ par rapport à $y_1$ et $4\pi$ par rapport à $y_2$.

Supposons en effet que cela soit démontré pour:

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \frac{dS_2}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \ldots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1}.$$

$\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est une fonction périodique de $y_1$ et de $y_2$; d'autre part sa valeur moyenne

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1}$$

est une constante indépendante de $y_2$. Nous pourrons donc écrire:

$$S_{p-1} = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1}y_1 + \theta_{p-1}(y_1, y_2) + \zeta_{p-1}(y_2).$$

$\theta_{p-1}(y_1, y_2)$ étant une fonction périodique de $y_1$ et $y_2$ et $\zeta_{p-1}$ une fonction arbitraire de $y_2$ seulement. Il vient ensuite:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} = \frac{d\theta_{p-1}}{dy_2} + \frac{d\zeta_{p-1}}{dy_2},$$

d'où

$$\frac{d[S_{p-1}]}{dy_2} = \frac{d[\theta_{p-1}]}{dy_2} + \frac{d\zeta_{p-1}}{dy_2}$$

et

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[S_{p-1}]}{dy_2} = \frac{d\theta_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[\theta_{p-1}]}{dy_2},$$

ce qui montre que $\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[S_{p-1}]}{dy_2}$ est une fonction périodique de $y_1$ et de $y_2$.

L'équation (7') montre que cela est vrai également de $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ et par conséquent de $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ (quelle que soit d'ailleurs la constante $\lambda_p$) et l'équation (5) montre que cela est vrai de $\frac{dS_p}{dy_1}$.

Cela sera donc vrai des fonctions:

$$\frac{dS_p}{dy_1} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_2}$$

quel que soit l'indice $p$.

Il importe toutefois de remarquer que si ces fonctions sont périodiques, ce n'est pas une raison suffisante pour qu'elles puissent être développées suivant les sinus et cosinus des multiples de $y_1$ et de $\frac{y_2}{2}$. En effet ces fonctions ne sont pas toujours finies, sauf pour un choix particulier des constantes $\lambda_p$; il est aisé de s'en rendre compte, car l'équation (7') d'où l'on doit tirer la valeur de

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$$

a en facteur dans son premier membre $\sin\frac{y_2}{2}$. Donc l'expression de $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ contiendra $\sin\frac{y_2}{2}$ au dénominateur.

Les dérivées des fonctions $S_p$ pourront donc devenir infinies, mais seulement pour

$$\sin\frac{y_2}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad y_2 = 2k\pi.$$

Si $y_2$ a une valeur différente de $2k\pi$, ces dérivées ne deviennent infinies pour aucune valeur de $y_1$; elles peuvent donc se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de $y_1$.

Nous pouvons donc écrire par exemple:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1} + \Sigma A_m \cos my_1 + \Sigma B_m \sin my_1$$

$A_m$ et $B_m$ étant des fonctions périodiques de $y_2$ qui peuvent devenir infinies.

Imaginons maintenant que les constantes $\lambda_p$ *d'indice impair* soient toutes nulles; je dis que

$$\frac{dS_p}{dy_1} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_2}$$

ne changeront pas quand on changera $y_2$ en $y_2 + 2\pi$ toutes les fois que l'indice $p$ sera pair et qu'au contraire ces deux fonctions changeront de signe, sans changer de valeur absolue quand on changera $y_2$ en $y_2 + 2\pi$, toutes les fois que l'indice $p$ sera impair.

Je suppose que le théorème soit vrai pour:

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \frac{dS_2}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \ldots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1}$$

et je me propose de démontrer qu'il est vrai également pour

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_1}.$$

Si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est multiplié par $(-1)^{p-1}$ quand $y_2$ se change en $y_2 + 2\pi$, il en sera de même de:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right].$$

Nous avons trouvé en effet

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1} + \Sigma A_m \cos my_1 + \Sigma B_m \sin my_1,$$

$A_m$ et $B_m$ étant des fonctions périodiques de $y_2$.

Si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est multiplié par $(-1)^{p-1}$ quand $y_2$ augmente de $2\pi$, il en sera de même de $A_m$ et $B_m$ et des dérivées de ces fonctions par rapport à $y_2$. Il en sera donc encore de même de:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = \sum \frac{dA_m}{dy_2}\frac{\sin my_1}{m} - \sum \frac{dB_m}{dy_2}\frac{\cos my_1}{m}.$$

Nous avons maintenant à montrer que cela est vrai de

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right].$$

Pour cela il est nécessaire d'étudier de quelle manière $K_p$ dépend des fonctions $S_0, S_1, S_2 \ldots, S_{p-1}$. Je me propose d'établir que l'ordre de tous les termes de $K_p$ par rapport aux dérivées des fonctions d'indice impair

$$S_1, S_3, S_5, \ldots$$

sera de même parité que $p$.

En effet, en faisant dans

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right),$$

$$S = S_0 + S_1\sqrt{\mu} + S_2\mu + \ldots,$$

nous avons trouvé:

$$F = H_0 + H_1\sqrt{\mu} + H_2\mu + \ldots.$$

Si je change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$ et qu'en même temps je change $S_1, S_3, S_5$, etc. en $-S_1, -S_3, -S_5$ etc. sans toucher aux fonctions d'indice pair, l'expression de $F$ ne devra pas changer.

Donc $H_p$ devra se changer en $(-1)^p H_p$.

Cela montre que l'ordre de tous les termes de $H_p$ par rapport aux dérivées de $S_1, S_3, S_5$, etc., devra être de même parité que $p$. Il devra donc, comme je l'ai annoncé, en être de même des termes de $K_p$ puisqu'on obtient $K_p$ en supprimant dans $H_p$ les termes qui dépendent de $S_{p-1}$ ou de $S_p$.

Cela posé, changeons $y_2$ en $y_2 + 2\pi$; les dérivées de $S_q$ ne changeront pas si $q$ est pair et au plus égal à $p - 2$; elles changeront de signe si $q$ est impair et au plus égal à $p - 2$. Donc $K_p$ se changera en $(-1)^p K_p$.

Reprenons maintenant l'équation (7)

$$N\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p - M\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] + [K_p]. \tag{7}$$

Quand on change $y_2$ en $y_2 + 2\pi$,

$$[K_p] \quad \text{se change en} \quad (-1)^p[K_p],$$

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] \quad \text{se change en} \quad (-1)^p\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right],$$

et

$$\frac{dS_1}{dy_2} \quad \text{se change en} \quad -\frac{dS_1}{dy_2}.$$

Nous pouvons même dire que

$$\lambda_p \quad \text{se change en} \quad (-1)^p\lambda_p.$$

En effet cela est vrai pour $p$ pair parce que $\lambda_p$ est une constante indépendante de $y_2$; cela est vrai encore pour $p$ impair parce que nous avons supposé que les $\lambda_p$ d'indice impair sont tous nuls.

Il résulte de là que

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] \quad \text{se change en} \quad (-1)^{p-1}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$$

et par conséquent

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \quad \text{en} \quad (-1)^{p-1}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

C. Q. F. D.

Je dis maintenant que $\frac{dS_p}{dy_1}$ se changera en $(-1)^p\frac{dS_p}{dy_1}$.

Ecrivons en effet l'équation (5)

$$(5) \qquad n_1 \frac{dS_p}{dy_1} = 2\Delta S_{p-1} + K_p;$$

$K_p$ et $\Delta S_{p-1}$ et par conséquent le second membre de l'équation (5) seront multipliés par $(-1)^p$ quand $y_2$ augmentera de $2\pi$. Il devra donc en être de même du premier membre et de $\frac{dS_p}{dy_1}$.

C. Q. F. D.

Je vais maintenant démontrer que l'on peut choisir les constantes $\lambda_p$ de façon que les dérivées des fonctions $S_p$ ne deviennent pas infinies pour $y_2 = 2k\pi$.

Supposons que l'on ait choisi les constantes $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{p-1}$ de façon que

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \ldots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1}$$

restent finies et que les constantes $\lambda_q$ d'indice impair soient nulles; je me propose de choisir $\lambda_p$ de façon que $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ et $\frac{dS_p}{dy_1}$ ne deviennent pas non plus infinies. Nous verrons en même temps que $\lambda_p$ devra être nulle si $p$ est impair.

Il est clair d'abord que si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ reste finie, il en sera de même de:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$$

et de

$$\Phi_p(y_2) = [K_p] - M\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right].$$

Reprenons maintenant l'équation (7'). Le coefficient de la quantité inconnue $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ s'annule pour $y_2 = 2k\pi$; pour que cette quantité inconnue demeure finie, il faut que le second membre s'annule également et que l'on ait:

$$\Phi_p(2k\pi) = \lambda_p.$$

Comme $\Phi_p$ ne change pas quand $y_2$ augmente de $4\pi$, il suffira de prendre $k = 0$ et $k = 1$ et d'écrire

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi) = \lambda_p. \tag{8}$$

Si $p$ est pair, il n'y a pas de difficulté, on a:

$$\Phi_p(y_2) = \Phi_p(y_2 + 2\pi)$$

et par conséquent:

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi),$$

de sorte qu'il suffit de prendre:

$$\lambda_p = \Phi_p(0).$$

Si au contraire $p$ est impair, on a:

$$\Phi_p(y_2) = -\Phi_p(y_2 + 2\pi)$$

et

$$\Phi_p(0) = -\Phi_p(2\pi),$$

de sorte que les équations (8) ne peuvent être satisfaites que si l'on a:

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi) = \lambda_p = 0.$$

Nous avons donc à démontrer que pour $p$ impair, $\Phi_p(0)$ est nul. Soit en effet:

$$\Phi_p(0) = \alpha$$

et par conséquent

$$\Phi_p(2\pi) = -\alpha.$$

*Je dis que $\alpha$ est nul.*

Nous allons nous appuyer sur un lemme qui est presque évident. Voici l'énoncé de ce lemme:

Soient $\varphi_1$ et $\varphi_2$ deux fonctions périodiques et de période $2\pi$ par rapport à $y_1$ et à $y_2$. On sait que si $\varphi$ est une fonction périodique de $y_1$, par exemple, la valeur moyenne de $\frac{d\varphi}{dy_1}$ est nulle. On aura donc

$$\iint \frac{d\varphi_1}{dy_2} dy_1 dy_2 = \iint \frac{d\varphi_2}{dy_1} dy_1 dy_2 = 0$$

ou

$$\iint \left(\frac{d\varphi_1}{dy_2} - \frac{d\varphi_2}{dy_1}\right) dy_1 dy_2 = 0,$$

les intégrales étant étendues à toutes les valeurs de $y_1$ et de $y_2$ depuis 0 jusqu'à $2\pi$.

Il est nécessaire pour que le lemme soit vrai que les fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ soient continues, mais leurs dérivées peuvent être discontinues. Ces dérivées doivent seulement rester finies.

Cela posé, nous achèverons de déterminer la fonction $S_{p-1}$ non plus par l'équation (7'), mais par l'équation suivante:

$$\text{(9)} \qquad \frac{\sqrt{2N} \sin \frac{y_2}{2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]}{\Sigma A_m \cos m y_2 + \Sigma B_m \sin m y_2} = -\alpha \cos \frac{y_2}{2} + \Phi_p(y_2).$$

Elle ne diffère de l'équation (7') que par ce que $\lambda_p$ a été remplacé par $\alpha \cos \frac{y_2}{2}$.

Cette équation montre d'abord que $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ est une fonction périodique de $y_2$ et de période $2\pi$, (je rappelle que $p$ est supposé impair). De plus cette fonction ne devient pas infinie pour $y_2 = 2k\pi$, parce que le second membre de l'équation (9) s'annule pour $y_2 = 0$ et pour $y_2 = 2\pi$.

Posons ensuite

$$\zeta_1 = \frac{dS_0}{dy_1} + \mu^{\frac{1}{2}} \frac{dS_1}{dy_1} + \mu \frac{dS_2}{dy_1} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_1} + \mu^{\frac{p}{2}} \eta,$$

$$\zeta_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \mu^{\frac{1}{2}} \frac{dS_1}{dy_2} + \mu \frac{dS_2}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_2};$$

$\eta$ sera une fonction de $y_1$, de $y_2$ et de $\mu$ définie par l'équation:

$$\text{(10)} \qquad F(\zeta_1, \zeta_2, y_1, y_2) = C.$$

Il est aisé de voir que $\zeta_2$ est entièrement déterminé puisque nous connaissons maintenant complètement $S_0, S_1 \ldots, S_{p-1}$. On pourra donc tirer $\eta$ de l'équation (10) sous la forme suivante:

$$\eta = \eta_0 + \mu^{\frac{1}{2}} \eta_1 + \mu \eta_2 + \ldots,$$

les $\eta_i$ étant des fonctions périodiques de $y_1$ et de $y_2$, de période $2\pi$ par rapport à $y_1$ et $4\pi$ par rapport à $y_2$.

De plus on aura:

$$\frac{d\zeta_1}{dy_2} - \frac{d\zeta_2}{dy_1} = \mu^{\frac{p}{2}} \frac{d\eta}{dy_2}.$$

Nous n'avons besoin que de $\eta_0$; or on voit tout de suite que $\eta_0$ est donnée par l'équation suivante:

$$(11) \qquad n_1\eta_0 = 2\Delta S_{p-1} + K_p$$

qui ne diffère de l'équation (5) que par ce que l'inconnue y est désignée par $\eta_0$.

Cette équation montre que $\eta_0$ est une fonction périodique de $y_1$; il faut chercher la valeur moyenne de cette fonction. Si l'on se reporte à la signification de l'équation (9), on verra qu'elle exprime que la partie moyenne du second membre de (11) est $\alpha \cos\frac{y_2}{2}$. On a donc:

$$[\eta_0] = \frac{\alpha}{n_1} \cos\frac{y_2}{2}.$$

$\zeta_2$ est susceptible de deux valeurs différentes qui se permutent l'une dans l'autre, soit quand on change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$, soit quand on change $y_2$ en $y_2 + 2\pi$.

J'appellerai $\varphi_2$ la plus grande des deux valeurs de $\zeta_2$ et $\psi_2$ la plus petite.

De même $\zeta_1$ est susceptible de deux valeurs; j'appellerai $\varphi_1$ celle qui correspond à $\varphi_2$ et $\psi_1$ celle qui correspond à $\psi_2$.

Enfin $\eta$ est susceptible de deux valeurs; j'appellerai $\eta'$ celle qui correspond à $\varphi_2$ et $\eta''$ celle qui correspond à $\psi_2$; $\eta_i$ est susceptible de deux valeurs que j'appellerai de même $\eta_i'$ et $\eta_i''$.

La fonction $\varphi_2$ est périodique de période $2\pi$ par rapport à $y_2$; en effet, quand on augmente $y_2$ de $2\pi$, les deux valeurs de $\zeta_2$ se permutent entre elles; donc $\varphi_2$ qui est toujours égale à la plus grande de ces deux valeurs ne change pas.

Pour la même raison, $\varphi_1, \psi_1, \psi_2, \eta', \eta'', \eta_i', \eta_i''$ seront des fonctions de période $2\pi$ par rapport à $y_2$.

Des définitions précédentes, il résulte que $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ et $\psi_2$ sont des fonctions continues, quoique les dérivées de ces fonctions, de même que $\eta'$ et $\eta''$ puissent être discontinues.

Nous sommes donc dans les conditions où notre lemme est applicable et nous pourrons écrire:

$$\mu^{\frac{p}{2}}\iint \frac{d\eta'}{dy_2}dy_1dy_2 = \iint\left(\frac{d\varphi_1}{dy_2}-\frac{d\varphi_2}{dy_1}\right)dy_1dy_2 = 0,$$

$$\mu^{\frac{p}{2}}\iint \frac{d\eta''}{dy_2}dy_1dy_2 = \iint\left(\frac{d\psi_1}{dy_2}-\frac{d\psi_2}{dy_1}\right)dy_1dy_2 = 0,$$

ou encore

$$\iint\frac{d(\eta'-\eta'')}{dy_2}dy_1dy_2 = 0,$$

ou enfin:

$$\iint\frac{d(\eta_0'-\eta_0'')}{dy_2}dy_1dy_2 + \iint\left[\frac{d(\eta'-\eta_0')}{dy_2}-\frac{d(\eta''-\eta_0'')}{dy_2}\right]dy_1dy_2 = 0.$$

Cette relation devra avoir lieu quel que soit $\mu$.

Mais quand $\mu$ tend vers 0 $\eta'-\eta_0'$ et $\eta''-\eta_0''$ tendent vers 0.

Donc on aura:

$$\lim\iint\frac{d(\eta_0'-\eta_0'')}{dy_2}dy_1dy_2 = 0 \quad (\text{pour } \mu = 0). \tag{12}$$

Transformons le premier membre de l'égalité (12). Je remarque d'abord que $p$ étant impair, $\eta_0$ est une fonction qui doit se changer en $-\eta_0$ quand $y_2$ se change en $y_2 + 2\pi$. Il suffit pour s'en convaincre de se reporter à l'équation (11). Nous avons donc:

$$\eta_0' = -\eta_0'' = \pm\eta_0$$

d'où

$$\iint\frac{d(\eta_0'-\eta_0'')}{dy_2}dy_1dy_2 = 2\iint\frac{d\eta_0'}{dy_2}dy_1dy_2 = 2\iint\frac{d(\pm\eta_0)}{dy_2}dy_1dy_2.$$

Il reste à voir pour quelles valeurs des $y$ nous devons faire $\eta_0' = +\eta_0$ et pour quelles valeurs des $y$ nous devons faire $\eta_0' = -\eta_0$.

Si nous avons:

$$\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_3}{dy_2} + \mu^2\frac{dS_5}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-3}{2}}\frac{dS_{p-2}}{dy_2} > 0, \tag{13}$$

nous devrons prendre d'après notre convention:

$$\varphi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_2}{dy_2} + \mu\sqrt{\mu}\frac{dS_3}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$$

et

$$\psi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} - \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_2}{dy_2} - \mu\sqrt{\mu}\frac{dS_3}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

Si au contraire le premier membre de l'inégalité (13) est négatif, nous devrons prendre:

$$\varphi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} - \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$$

et

$$\psi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

Tout dépend donc du signe du premier membre de l'inégalité (13). Egalons ce premier membre à 0, nous obtiendrons une équation:

$$\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_3}{dy_2} + \ldots = 0. \tag{14}$$

Cette équation peut être regardée comme définissant $y_2$ en fonction de $y_1$ et de $\mu$.

On pourra résoudre cette équation et écrire:

$$y_2 = \theta(y_1, \mu).$$

Observons seulement que $\theta$ est une fonction périodique de période $2\pi$ par rapport à $y_1$ et que cette fonction $\theta$ s'annule identiquement quand on y fait $\mu = 0$.

Par conséquent quand $y_2$ variera de $\theta$ à $\theta + 2\pi$, on aura:

$$\eta_0' = +\eta_0$$

et quand $y_2$ variera de $\theta + 2\pi$ à $\theta + 4\pi$, on aura

$$\eta_0' = -\eta_0.$$

Nos intégrales doivent être étendues à toutes les valeurs de $y_2$ comprises entre o et $2\pi$. Mais comme $\eta_0'$ est une fonction de période $2\pi$, on aura:

$$\int_0^{2\pi} dy_1 \int_0^{2\pi} dy_2 \frac{d\eta_0'}{dy_2} = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_\theta^{\theta+2\pi} dy_2 \frac{d\eta_0'}{dy_2}$$

ou

$$\iint \frac{d\eta_0'}{dy_2} dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_\theta^{\theta+2\pi} dy_2 \frac{d\eta_0}{dy_2}.$$

Quand $\mu$ tendra vers o, le premier membre devra tendre vers o et d'ailleurs $\theta$ tendra vers o, on aura donc:

$$\lim \iint \frac{d\eta_0'}{dy_2} dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_0^{2\pi} dy_2 \frac{d\eta_0}{dy_2} = 0$$

d'où

$$0 = \iint \frac{d\eta_0}{dy_2} dy_1 dy_2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{d[\eta_0]}{dy_2} dy_2 = -\pi \frac{a}{n_1} \int_0^{2\pi} \sin\frac{y_2}{2} dy_2 = -\frac{4\pi a}{n_1}.$$

On a donc

$$a = 0.$$

C. Q. F. D.

Il résulte de là que si l'on annule les constantes $\lambda_p$ d'indice impair et si l'on donne des valeurs convenables aux constantes $\lambda_p$ d'indice pair, les fonctions $\frac{dS_p}{dy_1}$ et $\frac{dS_p}{dy_2}$ resteront finies.

On pourra donc les développer suivant les sinus et cosinus des multiples de $y_1$ et de $\frac{y_2}{2}$; les multiples pairs de $\frac{y_2}{2}$ entreront seuls dans le développement si $p$ est pair; si au contraire $p$ est impair, les multiples impairs de $\frac{y_2}{2}$ entreront seuls.

Nous aurons alors pour les équations approximatives de la surface asymptotique

$$(15) \qquad x_1 = \sum_{p=0}^{p=n} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS_p}{dy_1}, \qquad x_2 = \sum_{p=0}^{p=n} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS_p}{dy_2}.$$

Ces séries ainsi que nous l'avons vu sont divergentes, mais si on arrête comme nous le faisons dans les équations (15) au $n^e$ terme, l'erreur commise peut être très petite si $\mu$ est très petit, ainsi que je l'ai exposé plus haut.

Nous avons vu que la quantité appelée plus haut $\alpha$ est toujours nulle. On peut donner de ce fait essentiel une autre démonstration.

Posons:

$$T = S_1 + \mu S_3 + \mu^2 S_5 + \ldots + \mu^{\frac{p-3}{2}} S_{p-2},$$
$$\xi = \eta_0 + \mu\eta_2 + \mu^2\eta_4 + \ldots.$$

Je dis d'abord que $T$ est une fonction périodique de $y_1$ et de $y_2$.

En effet ses dérivées $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques; on a donc:

$$T = \beta y_1 + \gamma y_2 + T',$$

$\beta$ et $\gamma$ étant des constantes et $T'$ étant une fonction périodique de $y_1$ et $y_2$.

On en conclut que

$$\frac{dT}{dy_1} = \beta + \frac{dT'}{dy_1}, \qquad \frac{dT}{dy_2} = \gamma + \frac{dT'}{dy_2},$$

$\frac{dT'}{dy_1}$ et $\frac{dT'}{dy_2}$ étant des séries trigonométriques dont le terme tout connu est nul.

Mais les fonctions $S_1, S_3, \ldots, S_{p-2}$ étant d'indice impair, leurs dérivées changent de signe quand on change $y_2$ en $y_2 + 2\pi$. Donc $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ changent de signe quand $y_2$ augmente de $2\pi$. Donc les termes tout connus $\beta$ et $\gamma$ sont nuls. Donc $T = T'$ est une fonction périodique qui ne change pas quand $y_1$ augmente de $2\pi$ et qui change de signe quand $y_2$ augmente de $2\pi$.

Cela posé, nous savons que $\zeta_1$ et $\zeta_2$ sont liés par l'équation:

$$F(\zeta_1, \zeta_2, y_1, y_2) = C.$$

Il en résulte que, si les deux valeurs de $\zeta_2$ se confondent, les deux valeurs de $\zeta_1$ se confondent également.

Ecrivons que les deux valeurs de $\zeta_2$ se confondent, il vient:

$$\frac{dT}{dy_2} = 0. \tag{16}$$

Cette équation (16) est d'ailleurs identique à l'équation (14). Ecrivons maintenant que les deux valeurs de $\zeta_1$ se confondent, il viendra:

$$\frac{dT}{dy_1} + \mu^{\frac{p-1}{2}} \xi = 0. \tag{17}$$

Les équations (16) et (17) devront être équivalentes. De plus elles devront être équivalentes à la suivante:

$$y_2 = \theta(y_1, \mu),$$

$\theta$ ayant le même sens que plus haut. Supposons qu'on développe $\theta$ suivant les puissances croissantes de $\mu$, il viendra:

$$y_2 = \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \mu^3\theta_3 + \dots, \tag{18}$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ étant des fonctions périodiques de $y_1$.

Supposons $y_2$ lié à $y_1$ par l'équation (18); quand $y_1$ augmentera de $2\pi$, $y_2$ ne changera pas et $T$ qui est périodique ne changera pas non plus; on aura donc:

$$\int_{y_1=0}^{y_1=2\pi} dT = \int_0^{2\pi} \left(\frac{dT}{dy_1} dy_1 + \frac{dT}{dy_2} dy_2\right) = 0,$$

ou en remplaçant $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ par leurs valeurs tirées des équations (16) et (17)

$$-\mu^{\frac{p-1}{2}} \int_0^{2\pi} \xi dy_1 = 0.$$

Si dans

$$\xi = \eta_0 + \mu\eta_2 + \mu^2\eta_4 + \dots$$

on remplace $y_2$ par sa valeur (18) il viendra:

$$\xi = \xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \ldots,$$

$\xi_0$, $\xi_1$, $\xi_2$, etc. étant des fonctions périodiques de $y_1$.

On devra avoir quel que soit $\mu$:

$$\int_0^{2\pi} dy_1(\xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \ldots) = 0$$

et par conséquent:

$$\int_0^{2\pi} \xi_0 dy_1 = 2\pi[\xi_0] = 0.$$

Il est clair que pour obtenir $\xi_0$, il suffit de faire $y_2 = 0$ dans $\eta_0$, or on a

$$[\eta_0] = \frac{\alpha}{n_1}\cos\frac{y_2}{2}.$$

Il vient donc

$$\frac{2\pi\alpha}{n_1} = 0$$

ou

$$\alpha = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

## § 19. *Troisième approximation.*

Nous nous proposons maintenant de construire exactement nos surfaces asymptotiques ou plutôt leur intersection avec la surface $y_1 = 0$ qui est comme nous l'avons vu plus haut une surface sans contact.

Dans notre mode de représentation géométrique, la solution périodique que nous envisageons est représentée par une certaine courbe trajectoire fermée. Cette courbe fermée vient couper la surface $y_1 = 0$ en un point que j'ai représenté sur la figure en $O'$.

Par cette courbe fermée passent deux surfaces asymptotiques; ces deux surfaces coupent la surface $y_1 = 0$ suivant deux courbes que j'ai représentées sur la figure en trait plein en $AO'B'$ et $A'O'B$.

J'ai représenté en trait pointillé ------- la courbe $y_1 = y_2 = 0$.

Reprenons les notations du § 16; considérons les séries $s_1$ et $s_2$ qui entrent dans les équations (4) de ce paragraphe; soient comme dans le

§ 16, $s_1^p$ et $s_2^p$ la somme des $p$ premiers termes des séries $s_1$ et $s_2$. Nous avons vu que les équations:

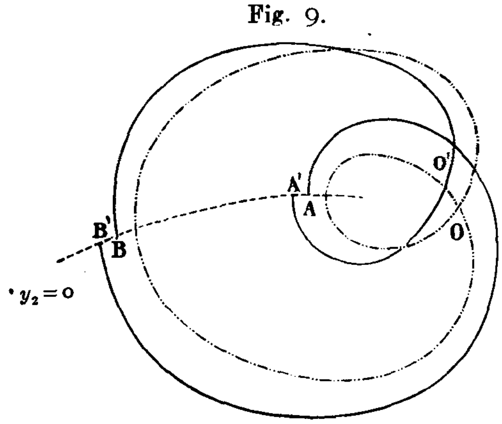
$$x_1 = s_1^p(y_1, y_2), \qquad x_2 = s_2^p(y_1, y_2)$$

représentent des surfaces qui diffèrent très peu des surfaces asymptotiques. Ces surfaces couperont la surface $y_1 = 0$ suivant des courbes qui ont pour équation:

$$y_1 = 0, \qquad x_1 = s_1^p(0, y_2), \qquad x_2 = s_2^p(0, y_2)$$

et qui sont représentées sur la figure en trait mixte —..—..—..—..

Fig. 9.




Nous avons appris dans le paragraphe précédent à former les séries $s_1$ et $s_2$; nous avons vu que $s_1^p(y_1, y_2)$ et $s_2^p(y_1, y_2)$ sont des fonctions périodiques de période $2\pi$ par rapport à $y_1$ et de période $4\pi$ par rapport à $y_2$.

Il en résulte que la courbe en trait mixte doit être comme l'indique la figure une courbe fermée admettant un point double $O$.

La première question à traiter est la suivante: les courbes en trait plein, intersections des surfaces asymptotiques avec $y_1 = 0$, sont-elles aussi des courbes fermées? Il est clair qu'il en serait ainsi si les séries $s_1$ et $s_2$ étaient convergentes. Car les courbes en trait pointillé différeraient alors aussi peu qu'on voudrait des courbes en trait plein; la distance d'un point de la courbe pleine à la courbe pointillée tendrait vers 0 quand $p$ croîtrait indéfiniment.

Je vais montrer sur un exemple simple qu'il n'en est pas ainsi. Soit:

$$-F = p + q^2 - 2\mu \sin^2 \frac{y}{2} - \mu\varepsilon \cos x\varphi(y),$$

où $\varphi(y)$ représente une fonction périodique de $y$ de période $2\pi$, et où $\mu$ et $\varepsilon$ sont deux constantes que je suppose très petites. Je forme les équations:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = -\frac{dF}{dp} = 1, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{dF}{dq} = 2q, \\ &\frac{dp}{dt} = \frac{dF}{dx} = -\mu\varepsilon \sin x\varphi(y), \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{dF}{dy} = \mu \sin y + \mu\varepsilon \cos x\varphi'(y). \end{aligned}$$

On voit que $p$ et $q$ joueront le même rôle que j'attribuais jusqu'ici à $x_1$ et à $x_2$, pendant que $x$ et $y$ joueront le rôle que j'attribuais à $y_1$ et à $y_2$, je n'ai changé les notations que pour supprimer les indices.

Supposons d'abord $\varepsilon = 0$. Les équations admettent alors une solution périodique qui s'écrit:

$$x = t, \qquad p = 0, \qquad q = 0, \qquad y = 0.$$

Les exposants caractéristiques (en laissant de côté les deux qui sont nuls, ainsi qu'il arrive toujours avec les équations de la dynamique) sont égaux à $\pm\sqrt{2\mu}$.

Il existe alors deux surfaces asymptotiques qui ont pour équations:

$$p = \frac{dS_0}{dx}, \qquad q = \frac{dS_0}{dy}, \qquad S_0 = \mp 2\sqrt{2\mu}\cos\frac{y}{2}$$

d'où

$$p = 0, \qquad q = \pm\sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}.$$

Les exposants caractéristiques n'étant pas nuls, mais égaux à $\pm\sqrt{2\mu}$ quand on fait $\varepsilon = 0$, il existera encore une solution périodique pour les petites valeurs de $\varepsilon$; à cette solution périodique correspondront deux surfaces asymptotiques dont l'équation pourra se mettre sous la forme

$$p = \frac{dS}{dx}, \qquad q = \frac{dS}{dy},$$

$S$ étant une fonction de $x$ et de $y$ satisfaisant à l'équation

$$\frac{dS}{dx} + \left(\frac{dS}{dy}\right)^2 = 2\mu\sin^2\frac{y}{2} + \mu\varepsilon\cos x\varphi(y).$$

Les exposants caractéristiques ne s'annulant pas pour $\varepsilon = 0$, il résulte de ce que nous avons dit à la fin du § 13 que $p$ et $q$ et par conséquent $S$ sont développables suivant les puissances croissantes de $\varepsilon$. Posons donc:

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \dots .$$

Nous avons trouvé plus haut:

$$S_0 = -2\sqrt{2\mu}\cos\frac{y}{2}.$$

Quant à $S_1$, il devra satisfaire à l'équation:

$$\frac{dS_1}{dx} + \sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}\frac{dS_1}{dy} = \mu\cos x\varphi(y).$$

Si l'on désigne par $\Sigma$ une fonction qui satisfasse à l'équation:

$$\frac{d\Sigma}{dx} + \sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}\frac{d\Sigma}{dy} = \mu e^{ix}\varphi(y) \qquad (i = \sqrt{-1})$$

$S_1$ sera la partie réelle de $\Sigma$. Or on peut satisfaire à cette équation en faisant:

$$\Sigma = e^{ix}\psi(y);$$

il suffit pour cela que:

$$i\psi + \sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}\frac{d\psi}{dy} = \mu\varphi(y).$$

L'équation en $\psi$ ainsi obtenue et qu'il s'agit d'intégrer est linéaire. Son intégrale générale s'écrit: si $\varphi(y) = 0$

$$\psi = C\left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{\alpha}, \qquad \alpha = -i\sqrt{\frac{2}{\mu}}$$

et si $\varphi(y)$ est quelconque:

$$\psi = \left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{\alpha}\int\sqrt{\frac{\mu}{2}}\varphi(y)\left(\sin\frac{y}{2}\right)^{-1}\left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{-\alpha}dy.$$

Comme $\psi$ doit être développable suivant les puissances entières de $y$ pour les petites valeurs de $y$, il est facile de voir quelle valeur il faudra donner à la constante d'intégration. Si, pour $y = 0$, $\varphi(y)$ s'annule, l'intégrale devra s'annuler aussi, de sorte qu'il faudra la prendre entre les limites $0$ et $y$.

Que faudrait-il maintenant pour que les courbes $BO'B'$ et $AO'A'$ fussent fermées? Il faudrait que la fonction $S$ restât finie ainsi que ses dérivées pour toutes les valeurs de $y$ et fût périodique de période $4\pi$ par rapport à $y$ (c'est ce qui arrivait, rappelons-le, pour les fonctions $s_1^p$ et $s_2^p$ dont nous avons parlé un peu plus haut). Comme cela devrait avoir lieu pour toutes les valeurs de $\varepsilon$, cela devrait avoir lieu de $S_1$, et comme $S_1$ est égal à $\cos x$ multiplié par la partie réelle de $\psi$, plus $\sin x$ multiplié par la partie imaginaire de $\psi$, cela devrait avoir lieu de $\psi$.

Donc pour les valeurs de $y$ voisines de $2\pi$, $\psi$ devrait être développable suivant les puissances entières de $y - 2\pi$. Mais il n'en est pas ainsi de $\left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{\alpha}$. Donc l'intégrale:

$$J = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{2}}\,\varphi(y)\left(\sin\frac{y}{2}\right)^{-1}\left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{-\alpha} dy$$

devrait être nulle. Calculons cette intégrale en supposant $\varphi(y) = \sin y$. Posons $\operatorname{tg}\frac{y}{4} = t$, il viendra:

$$J = 4\sqrt{2\mu}\int_0^{\infty}\frac{t^{-\alpha}(1 - t^2)\,dt}{(1 + t^2)^2}.$$

Intégrons pas parties en remarquant que $\frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2}$ est la dérivée de $\frac{t}{1 + t^2}$, il viendra:

$$J = 4\alpha\sqrt{2\mu}\int_0^{\infty}\frac{t^{-\alpha}dt}{1 + t^2}.$$

Faisons $t^2 = u$, on aura:

$$J = 2\alpha\sqrt{2\mu}\int_0^{\infty}\frac{u^{-\frac{\alpha+1}{2}}du}{1 + u} = \frac{2\pi\alpha\sqrt{2\mu}}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}} = \frac{-8\pi i}{e^{\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}} + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}}}.$$

Donc $J$ n'est pas nul; donc les courbes $BO'B'$ et $AO'A'$ ne sont pas fermées; donc les séries $s_1$ et $s_2$ ne sont pas convergentes, non plus que les séries définies dans les §§ 14 et 18 ainsi que je l'avais annoncé dans ces paragraphes.

La distance des deux points $B$ et $B'$ n'est donc pas nulle, mais elle jouit de la propriété suivante. Non seulement $BB'$ tend vers o, quand $\mu$ tend vers o, mais le rapport $\frac{BB'}{\mu^{\frac{p}{2}}}$ tend également vers o quelque grand que soit $p$.

En effet la courbe pointillée a pour équation

$$y_1 = 0, \qquad x_1 = s_1^p(0, y_2), \qquad x_2 = s_2^p(0, y_2)$$

et la courbe en trait plein a pour équation:

$$y_1 = 0, \qquad x_1 = f_1(0, y_2), \qquad x_2 = f_2(0, y_2).$$

D'après ce que nous avons vu plus haut les séries $s_1$ et $s_2$ représentent asymptotiquement les fonctions $f_1$ et $f_2$, ce qui veut dire que l'on a:

$$\lim \frac{f_1 - s_1^p}{\mu^{\frac{p}{2}}} = \lim \frac{f_2 - s_2^p}{\mu^{\frac{p}{2}}} = 0 \quad (\text{pour } \mu = 0).$$

Donc le rapport à $\mu^{\frac{p}{2}}$ de la distance de $B$ à la courbe pointillée tendra vers o et il en sera de même du rapport à $\mu^{\frac{p}{2}}$ de la distance de $B'$ à cette courbe pointillée. On a donc:

$$\lim \frac{BB'}{\mu^{\frac{p}{2}}} = 0.$$

C. Q. F. D.

En d'autres termes, si on regarde $\mu$ comme un infiniment petit du premier ordre, la distance $BB'$, sans être nulle, est un infiniment petit d'ordre infini. C'est ainsi que la fonction $e^{-\frac{1}{\mu}}$ est un infiniment petit d'ordre infini sans être nulle.

Dans l'exemple particulier que nous avons traité plus haut, la distance $BB'$ est du même ordre de grandeur que l'intégrale $J$, c'est à dire que $e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}}$.

Une seconde question à traiter est celle de savoir si les deux courbes $O'B$ et $O'B'$ prolongées se coupent. S'il en est ainsi en effet, la trajectoire qui passera par le point d'intersection appartiendra à la fois aux deux nappes de la surface asymptotique. Ce sera une trajectoire *doublement asymptotique.* Soit $C$ la trajectoire fermée qui passe par le point $O'$ et qui représente la solution périodique. La trajectoire doublement asymptotique diffère très peu de $C$, lorsque $t$ est négatif et très grand, elle s'en éloigne asymptotiquement, s'en écarte beaucoup d'abord, puis s'en rapproche de nouveau asymptotiquement, de façon à différer très peu de $C$, lorsque $t$ est positif et très grand.

Je me propose d'établir qu'il existe une infinité de trajectoires doublement asymptotiques.

Je commence par observer que la courbe $O'B$, quelque loin qu'on la prolonge, ne pourra jamais se recouper elle-même, c'est à dire que cette courbe $O'B$ prolongée n'a pas de point double. En effet d'après la définition de cette courbe les antécédents des divers points de $O'B$ sont eux-mêmes sur cette courbe $O'B$; de sorte que l'antécédente de la courbe $O'B$ est une portion de cette courbe. De même la seconde, la troisième etc., la $n^e$ antécédente de $O'B$ sont des portions de plus en plus petites de cette courbe, limitées par le point $O'$ d'une part et un point $D$ de plus en plus rapproché de $O'$ d'autre part.

Si la courbe $O'B$ avait un point double, il en devrait être de même de toutes ses antécédentes, et par conséquent de tout arc $O'D$ si petit qu'il soit, faisant partie de $O'B$. Or les principes du § 13 nous permettent de construire la portion de $O'B$ voisine de $O'$ et de constater que cette portion de courbe n'a pas de point double. Il en est donc de même de la courbe entière quelque loin qu'on la prolonge.

D'après la définition des deux nappes de la surface asymptotique et des courbes $BO'A'$, $B'O'A$, l'une de ces courbes (par exemple la courbe $BO'A'$) est telle que le $n^e$ antécédent d'un point de cette courbe se rapproche indéfiniment de $O'$, quand $n$ augmente; pour l'autre courbe $B'O'A$, c'est le $n^e$ conséquent qui se rapproche indéfiniment de $O'$. Ce que nous venons de dire s'applique donc également à la courbe $O'B'$, pourvu qu'on remplace partout le mot antécédent par le mot conséquent. Donc la courbe $O'B'$ quelque loin qu'on la prolonge ne se recoupera pas elle-même et il est clair qu'il en sera de même des courbes $O'A$ et $O'A'$.

Je dis maintenant que la courbure des courbes $O'B$ et $O'B'$ est finie, je veux dire qu'elle ne croît pas indéfiniment quand $\mu$ tend vers o.

En effet nous avons vu que non seulement les séries $s_1$ et $s_2$ représentent asymptotiquement les deux fonctions $f_1$ et $f_2$, mais que les séries $\frac{d^2s_1}{dy_2^2}$ et $\frac{d^2s_2}{dy_2^2}$ représentent asymptotiquement $\frac{d^2f_1}{dy_2^2}$ et $\frac{d^2f_2}{dy_2^2}$.

On en conclut que si $\mu$ est regardé comme un infiniment petit, la courbure de la courbe en trait plein au point $B$ différera infiniment peu de la courbure de la courbe pointillée au point le plus rapproché; or cette dernière courbure est finie, donc il en est de même de la courbure de la courbe en trait plein.

Soit maintenant $B_1$ le conséquent du point $B$ et $B'_1$ celui du point $B'$. La distance $BB_1$ est du même ordre de grandeur que $\sqrt{\mu}$ et il en est de même de la distance $B'B'_1$, les arcs $BB_1$ et $B'B'_1$ sont donc très petits si $\mu$ est très petit et leur courbure est finie; d'autre part les distances $BB'$, $B_1B'_1$ de même que les rapports $\frac{BB'}{BB_1}$, $\frac{BB'}{B'B'_1}$ tendent vers o quand $\mu$ tend vers o; enfin il existe un invariant intégral positif.

Nous nous trouvons donc dans les conditions du théorème III du § 8. Nous en conclurons que les arcs $BB_1$ et $B'B'_1$ se coupent, c'est à dire que la courbe $O'B'$ coupe la courbe $O'B$ prolongée et par conséquent qu'il existe au moins une trajectoire doublement asymptotique.

Je dis maintenant qu'il en existe au moins deux.

En effet la figure a été construite de façon que les points $B$ et $B'$ soient sur la courbe

$$y_1 = y_2 = 0.$$

Mais l'origine des $y_2$ est restée arbitraire; je puis supposer qu'on la choisisse de telle sorte qu'au point d'intersection des deux courbes $O'B$ et $O'B'$, on ait $y_2 = 0$. En ce cas les points $B$ et $B'$ coïncident. Il doit donc en être de même de leurs conséquents $B_1$ et $B'_1$. Les deux arcs $BB_1$ et $B'B'_1$ ont alors mêmes extrémités, mais cela ne suffit pas pour satisfaire au théorème III que je viens d'appliquer (il faut en effet pour satisfaire à ce théorème que l'aire limitée par ces deux arcs ne soit pas convexe), il faut encore qu'ils se coupent en un autre point $N$.

Par ce point passera une trajectoire doublement asymptotique qui ne se confondra pas avec celle qui passe en $B$. Il y a donc au moins deux trajectoires doublement asymptotiques.

Je suppose toujours que les points $B$ et $B'$ se confondent. Soit $BMN$ la portion de la courbe $O'B$ comprise entre les points $B$ et $N$; soit de même $BPN$ la portion de la courbe $O'B'$ comprise entre le point $B = B'$ et le point $N$. Ces deux arcs $BMN$ et $BPN$ limiteront une certaine aire que j'appelle $\alpha$.

Nous avons vu que dans le cas particulier du problème des trois corps qui nous occupe on peut appliquer le théorème 1^er^ du § 8. Il existera donc des trajectoires qui traverseront une infinité de fois l'aire $\alpha$.

Donc parmi les conséquentes de l'aire $\alpha$, il y en aura une infinité qui auront une partie commune avec $\alpha$.

Si donc on considère la courbe fermée $BMNPB$ qui limite l'aire $\alpha$, et les conséquentes de cette courbe, il y aura une infinité de ces conséquentes qui couperont la courbe $BMNPB$ elle-même.

Comment cela peut-il se faire?

L'arc $BMN$ ne peut couper aucun de ses conséquents; car l'arc $BMN$ et ses conséquents appartiennent à la courbe $O'B$ et la courbe $O'B$ ne peut se recouper elle-même.

Pour la même raison l'arc $BPN$ ne peut couper aucun de ses conséquents.

Il faut donc, ou bien que l'arc $BMN$ coupe un des conséquents de $BPN$, ou que l'arc $BPN$ coupe un des conséquents de $BMN$ (dans les hypothèses où nous nous sommes placés, c'est le second cas qui se présentera). Dans l'un comme dans l'autre cas la courbe $O'B$ ou son prolongement coupera la courbe $O'B'$ ou son prolongement.

Ces deux courbes se coupent donc en une infinité de points et une infinité de ces points d'intersection se trouveront sur les arcs $BMN$ ou $BPN$. Par ces points d'intersection passeront une infinité de trajectoires doublement asymptotiques.

On démontrerait de la même manière que la surface asymptotique qui coupe la surface $y_1 = 0$ suivant la courbe $O'A$ contient une infinité de trajectoires doublement asymptotiques.