CHAPITRE III.

Résultats divers.

§ 20. *Solutions périodiques du* 2e *genre.*

Dans le chapitre précédent et en particulier dans les §§ 17 et 18 nous avons construit nos séries en supposant que l'on donne à C_1 une valeur tantôt supérieure tantôt égale à $-\varphi_4$.

Supposons maintenant qu'on ait donné à C_1 une valeur $< -\varphi_4$. Alors

$$x_2^1 = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}$$

n'est pas toujours réel. Supposons par exemple que, pour la valeur choisie de C_1, x_2^1 reste réel quand y_2 varie depuis η_5 jusqu'à η_6. Je vais considérer une valeur η_7 de y_2 comprise entre η_5 et η_6:

$$\eta_5 < \eta_7 < \eta_6$$

et je vais chercher à définir les x_i^k pour toutes les valeurs de y_2 comprises entre η_5 et η_7.

J'observe d'abord que x_2^1 est susceptible de deux valeurs égales et de signe contraire, à cause du double signe du radical; donnons d'abord par exemple à ce radical le signe $+$.

Imaginons que l'on ait calculé successivement

$$x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^{k-2},$$
$$x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^{k-2}.$$

L'équation (7) du § 18 nous donne:

$$x_1^2[x_2^{k-1}] = \theta(y_2) + C_{k-1},$$

$\theta(y_2)$ étant une fonction entièrement connue de y_2 et C_{k-1} une constante.

Nous déterminerons cette constante par la condition

$$\theta(\eta_5) + C_{k-1} = 0.$$

Alors bien que x_2^1 s'annule pour $y_2 = \eta_5$, la fonction

$$[x_2^{k-1}] = \frac{\theta(y_2) - \theta(\eta_5)}{x_2^1}$$

reste finie pour $y_2 = \eta_5$.

Nous avons donc complètement déterminé les fonctions x_i^k pour $\eta_5 < y_2 < \eta_7$ et nous appellerons $x_{0.i}^k$ les fonctions de y_2 ainsi déterminées.

Supposons que l'on recommence le calcul en donnant au radical le signe —. On trouvera pour les fonctions x_i^k de nouvelles valeurs que j'appelle $x_{1.i}^k$ et qui seront d'ailleurs la continuation analytique des premières.

Imaginons ensuite que l'on remplace C_1 par une constante nouvelle C_1' très voisine de C_1.

Alors le radical:

$$\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1')}$$

sera réel toutes les fois que y_2 sera compris entre η_7 et une certaine valeur η_8 très voisine de η_6.

Cela posé, nous allons par le procédé exposé ci-dessus calculer les fonctions x_i^k pour les valeurs de y_2 comprises entre η_7 et η_8, d'abord en faisant:

$$x_2^1 = +\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1')}$$

(nous appellerons $x_{2.i}^k$ les fonctions ainsi calculées), puis en faisant

$$x_2^1 = -\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1')}$$

(nous appellerons $x_{3.i}^k$ les fonctions ainsi calculées).

Nous allons ensuite construire les quatre branches de courbes:

1°. $\qquad y_1 = 0, \qquad x_1 = \varphi_{0.1}(y_2), \qquad x_2 = \varphi_{0.2}(y_2)$

que nous prolongerons depuis $y_2 = \eta_5$ à $y_2 = \eta_7$.

2°. $y_1 = 0, \qquad x_1 = \varphi_{1.1}(y_2), \qquad x_2 = \varphi_{1.2}(y_2)$

que nous prolongerons également depuis $y_2 = \eta_5$ jusqu'à $y_2 = \eta_7$.

3°. $y_2 = 0, \qquad x_1 = \varphi_{2.1}(y_2), \qquad x_2 = \varphi_{2.2}(y_2)$

que nous prolongerons depuis $y_2 = \eta_7$ jusqu'à $y_2 = \eta_8$.

4°. $y_1 = 0, \qquad x_1 = \varphi_{3.1}(y_2), \qquad x_2 = \varphi_{3.2}(y_2)$

que nous prolongerons également depuis $y_2 = \eta_7$ jusqu'à $y_2 = \eta_8$.

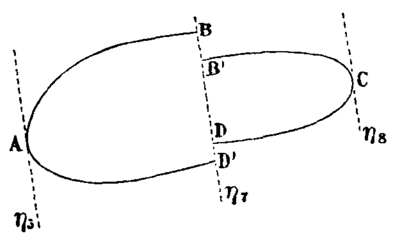
Dans ces formules nous avons posé:

$$\varphi_{p.q}(y_2) = x^0_{p.q} + x^1_{p.q}\sqrt{\mu} + \ldots + x^k_{p.q}\mu^{\frac{k}{2}}.$$

La première et la seconde de ces courbes se raccorderont et seront tangentes en un même point à la courbe $y_2 = \eta_5$.

La troisième et la quatrième courbes se raccorderont également et seront tangentes en un même point à la courbe $y_2 = \eta_8$.

Fig. 8.



C'est ce qu'indique la figure 8 où les trois arcs pointillés représentent les trois courbes

$$y_2 = \eta_5, \eta_7, \eta_8,$$

où l'arc AB représente la 1ère de nos quatre branches de courbe, l'arc AD' la seconde, l'arc $B'C$ la 3me et l'arc DC la quatrième.

Nous regarderons C_1 comme une donnée, mais C_1'' est resté jusqu'ici arbitraire. Nous déterminerons C_1'' par la condition que la 1ère et la 3me courbes se raccordent et que les points B et B' se confondent, ce qui s'exprime analytiquement par les conditions:

(1) $$\varphi_{0.1}(\eta_7) = \varphi_{2.1}(\eta_7), \qquad \varphi_{0.2}(\eta_7) = \varphi_{2.2}(\eta_7).$$

Ces deux équations ne sont d'ailleurs pas distinctes et se ramènent à une seule.

En nous appuyant sur le théorème III du § 8 nous pourrions démontrer que si C_1'' est déterminé par les équations (1), les équations

$$(1') \qquad \varphi_{1.1}(\eta_7) = \varphi_{3.1}(\eta_7), \qquad \varphi_{1.2}(\eta_7) = \varphi_{3.2}(\eta_7)$$

seront aussi satisfaites aux quantités près de l'ordre de $\mu^{\frac{k+1}{2}}$; c'est à dire que la 2^{de} et la 4^{me} courbes se raccorderont aux quantités près de cet ordre, ou que la distance DD' est un infiniment petit de même ordre que $\mu^{\frac{k+1}{2}}$.

Mais je dois faire ici la même observation que plus haut; les séries auxquelles on parvient de la sorte ne sont pas convergentes bien qu'elles puissent rendre des services si on les manie avec précaution.

Il existe donc des régions, où, au moins pendant un certain temps, y_2 (dans le cas où l'on suppose $n_2 = 0$) on $n_2 y_1 - n_1 y_2$ (dans le cas général) conservent des valeurs finies. C'est ce fait que les astronomes expriment d'ordinaire en disant qu'il y a libration. On peut se demander si ces régions de libration sont sillonnées de solutions périodiques.

On peut s'en rendre compte par les considérations suivantes.

Ecrivons les équations:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^2, \\ x_2 &= x_2^0 + \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)} + \mu u_2^2. \end{aligned}$$

Ces équations sont à des quantités près de l'ordre μ celles de surfaces que nous avons construites (voir figure 8); elles satisfont donc approximativement aux équations (3) du § 17. Quant à u_2^2 c'est une fonction de y_1 et de y_2 qui ne diffère de x_2^2 que par une fonction de y_2 de telle sorte que

$$\frac{du_2^2}{dy_1} = \frac{dx_2^2}{dy_1}.$$

Cette fonction u_2^2 doit d'ailleurs rester toujours finie.

Je me propose de modifier la forme de la fonction F qui entre dans nos équations différentielles de façon que ces équations (2) satisfassent *exactement* aux équations (3) du § 17.

Je cherche donc une fonction F^* telle que les équations:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF^*}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF^*}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF^*}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF^*}{dx_2} \end{aligned}$$

admettent des surfaces trajectoires représentées précisément par ces équations (2).

Voici comment nous déterminerons cette fonction F^*.

Observons d'abord que x_1^0 et x_2^0 sont déterminés par les deux équations simultanées

$$F_0(x_1^0, x_2^0) = C, \qquad \frac{dF_0}{dx_2^0} = 0.$$

On peut tirer de ces deux équations x_1^0 et x_2^0 en fonctions de C. Nous regarderons donc désormais x_1^0 et x_2^0 comme des fonctions connues de C.

D'autre part $[F_1]$ est une fonction de y_2, de x_1^0 et de x_2^0, ce qui nous permet de le regarder comme une fonction connue de y_2 et de C.

Les équations (2) nous donneront par conséquent x_1 et x_2 en fonctions de y_1, de y_2, de C et de C_1.

Remarquons que si x_1 et x_2 sont définis par ces équations

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2 = dS$$

est une différentielle exacte, de sorte que:

$$\frac{dx_1^2}{dy_2} = \frac{du_2^2}{dy_1}.$$

Résolvons maintenant les équations (2) par rapport à C et C_1, il viendra

$$\begin{aligned} C &= F^*(x_1, x_2, y_1, y_2), \\ C_1 &= \Phi^*(x_1, x_2, y_1, y_2). \end{aligned}$$

La fonction F^* est ainsi définie et on aura en employant la notation de Jacobi:

$$[F^*, \Phi^*] = 0,$$

ce qui signifie que

$$\Phi^* = \text{const},$$

est une intégrale des équations (3).

La solution la plus générale de ces équations (3) s'écrit alors:

$$(\alpha) \qquad \frac{dS}{dy_1} = x_1, \qquad \frac{dS}{dy_2} = x_2, \qquad \frac{dS}{dC} = C' + t, \qquad \frac{dS}{dC_1} = C_1',$$

C' et C_1' étant deux nouvelles constantes d'intégration.

Cherchons à former effectivement F^* ou du moins à nous rendre compte de l'ordre de grandeur de la différence:

$$F - F^*.$$

Or x_1^2 est défini par la condition suivante:

$$F(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1) - C$$

doit être une quantité de même ordre que $\mu\sqrt{\ }$. (Cf. § 17.)

Donc comme $\frac{dF_0}{dx_2^0}$ est nul, la fonction

$$F(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 + \mu u_2^2) - C$$

sera encore de même ordre que $\mu\sqrt{\mu}$, quelle que soit la fonction u_2^2.

D'ailleurs on a identiquement:

$$F^*(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 + \mu u_2^2) = C.$$

Donc la différence

$$F - F^*$$

regardée comme fonction de μ, de C, de C_1, de y_1 et de y_2 est de l'ordre de $\mu\sqrt{\mu}$.

Posons maintenant:

$$\xi_2\sqrt{\mu} = x_2 - x_2^0.$$

Des deux équations (1) on tirera facilement C_1 et C en fonctions de x_1, ξ_2, y_1, y_2 et μ; on voit alors sans peine que C et C_1 peuvent être développés suivant les puissances positives de $\sqrt{\mu}$, les coefficients étant des fonctions finies de x_1, de ξ_2, de y_1 et de y_2.

Nous venons de voir que $F - F^*$ est une fonction de μ, de y_1, de y_2, de C et de C_1 dont le développement suivant les puissances de μ commence par un terme en $\mu\sqrt{\mu}$; si nous y remplaçons C et C_1 par leurs valeurs en fonctions de μ, de x_1, de ξ_2, de y_1 et de y_2, nous verrons que cette différence $F - F^*$ est une fonction développée suivant les puissances de μ, dont les coefficients dépendent de x_1, ξ_2, y_1 et y_2 et qui commence par un terme en $\mu\sqrt{\mu}$.

Par conséquent la fonction:

$$\frac{F - F^*}{\mu\sqrt{\mu}} = F'(\mu, x_1, \xi_2, y_1, y_2)$$

ne devient pas infinie pour $\mu = 0$.

Par le changement de variable que nous venons de faire les équations (3) deviennent:

$$(3') \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF^*}{dy_1}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF^*}{dx_1},$$
$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{dF^*}{\sqrt{\mu}dy_2}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF^*}{\sqrt{\mu}d\xi_2}.$$

De même les équations proposées:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}$$

doivent se réduire à:

$$(4) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1},$$
$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{dF}{\sqrt{\mu}dy_2}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{\sqrt{\mu}d\xi_2}.$$

Nous formerons en outre les équations suivantes:

$$(5) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dy_1}(F^* + \varepsilon F'), \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{d}{dx_1}(F^* + \varepsilon F'),$$
$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{d}{\sqrt{\mu}dy_2}(F^* + \varepsilon F'), \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{d}{\sqrt{\mu}d\xi_2}(F^* + \varepsilon F'),$$

qui se réduisent à (3') pour $\varepsilon = 0$ et à (4) pour $\varepsilon = \mu\sqrt{\mu}$.

D'après ce que nous avons vu plus haut, les équations (3) et par conséquent les équations (3') peuvent s'intégrer exactement; nous en avons donné par les équations (α) la solution générale.

Si l'on discute cette solution générale et si on cherche à la construire en conservant le même mode de représentation géométrique que dans les paragraphes précédents, on verra qu'il existe une infinité de surfaces trajectoires fermées.

Ces surfaces qui ont pour équation:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)} + \mu u_2^2}{x_1^0 + \mu x_1^2} \tag{6}$$

diffèrent peu des surfaces que nous avons construites dans le § 17 et dont l'équation s'écrivait:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}}{x_1^0}. \tag{7}$$

Elles ont même forme générale que les surfaces définies par l'équation (7). Si donc nous faisons les mêmes hypothèses que dans le § 17 au sujet des maxima et des minima de $[F_1]$, deux de nos surfaces (6) seront des surfaces fermées à courbe double; ce seront celles qui correspondent aux valeurs $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$ de la constante C_1. Les autres se composent de une ou deux nappes fermées.

La surface fermée à courbe double sera pour nos équations (3') une surface asymptotique et elle partagera l'espace en trois régions comme nous l'avons dit plus haut.

Parmi ces régions, je distingue la région R_2 comprise entre les deux nappes qui est une région dite de libration et je me propose de montrer que dans cette région, on peut tracer une infinité de trajectoires fermées correspondant à des solutions périodiques.

Revenons en effet aux équations (α) qui nous font connaître la solution générale des équations (3) et (3'). D'après la forme des équations (2), nous pouvons écrire:

$$S = ay_1 + by_2 + \theta(y_1, y_2) + \sqrt{\frac{2\mu}{N}}\int\sqrt{([F_1] + C_1)}dy_2,$$

a et b étant des fonctions de C et de C_1 seulement et $\theta(y_1, y_2)$ une fonction réelle et périodique de y_1 et de y_2.

On en déduit:

$$C_1' = \frac{dS}{dC_1} = \frac{da}{dC_1}y_1 + \frac{db}{dC_1}y_2 + \frac{d\theta}{dC_1} + \sqrt{\frac{\mu}{2N}}\int\frac{dy_2}{\sqrt{([F_1] + C_1)}}.$$

Nous donnerons à C_1 une valeur déterminée qui devra être plus petite que $-\varphi_4$ puisque nous nous supposons placés dans la région R_2.

La surface fermée qui correspond à cette valeur de C_1 présentant les mêmes connexions que le tore, nous pouvons en faire le tour de deux manières différentes: 1° en regardant y_2 comme constant; 2° en regardant y_1 comme constant.

Quand on aura fait le tour de la surface en regardant y_2 comme constant, y_1 aura augmenté de 2π et $\frac{dS}{dC_1}$ aura augmenté de

$$2\pi\frac{da}{dC_1}.$$

Quand on aura fait le tour de la surface en regardant y_1 comme constant, y_2 sera revenu à la même valeur, mais l'intégrale

$$\int\frac{dy_2}{\sqrt{([F_1] + C_1)}}$$

aura augmenté d'une certaine période v définie comme il suit:

Supposons que les valeurs de y_2 pour lesquelles le radical $\sqrt{([F_1] + C_1)}$ est réel soient les valeurs comprises entre η_5 et η_6, on aura:

$$v = 2\int_{\eta_5}^{\eta_6}\frac{dy_2}{\sqrt{([F_1] + C_1)}}.$$

Quand notre intégrale augmentera de v, $\frac{dS}{dC_1}$ augmentera de

$$v\sqrt{\frac{\mu}{2N}}.$$

Pour que la solution qui correspond à cette valeur de C_1 soit périodique, il faut donc et il suffit que ces deux quantités:

$$2\pi \frac{da}{dC_1} \quad \text{et} \quad v\sqrt{\frac{\mu}{2N}}$$

soient commensurables entre elles.

Cette condition sera évidemment satisfaite pour une infinité de valeurs de C_1; notre région R_2 contient donc une infinité de trajectoires fermées, représentant des solutions périodiques.

Ainsi si K est un nombre commensurable quelconque, l'équation:

$$2\pi \frac{da}{dC_1} = Kv\sqrt{\frac{\mu}{2N}} \tag{8}$$

(qui contient C_1 parce que $\frac{da}{dC_1}$ et v sont des fonctions de C_1) nous donnera une valeur de C_1 correspondant à une solution périodique.

Pour discuter cette équation, il me faut chercher ce que c'est que $\frac{da}{dC_1}$.

Il me suffit pour cela de rappeler que:

$$a = x_1^0 + \mu[x_1^2]$$

et que:

$$F_0(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu}x_2^1) + \mu F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2)$$

doit se réduire à C aux quantités près de l'ordre de $\mu\sqrt{\mu}$. On en conclut:

$$-n_1 x_1^2 - \frac{N}{2}(x_2^1)^2 + F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2) = 0$$

d'où

$$-n_1[x_1^2] - C_1 - [F_1] + [F_1] = 0$$

et:

$$\frac{da}{dC_1} = -\frac{\mu}{n_1}.$$

$\frac{da}{dC_1}$ est donc une constante, indépendante de C_1, de sorte que l'équation (8) peut s'écrire

$$\frac{v}{\sqrt{\mu}} = \text{const.} \tag{8'}$$

Pour discuter cette équation nouvelle, il convient de chercher comment varie v quand on fait varier C_1 depuis $-\varphi_4$ jusqu'à $-\varphi_1$.

Pour $C_1 = -\varphi_4$, v est infini; C_1 variant depuis $-\varphi_4$ jusqu'à $-\varphi_2$, v décroît d'abord jusqu'à un certain minimum, pour croître ensuite de nouveau jusqu'à l'infini.

Pour $C_1 < -\varphi_2$, v peut admettre deux valeurs correspondant aux deux nappes de la surface et que l'on peut envisager séparément. (Cf. figure 7.)

La première nappe de la surface reste réelle quand C_1 est compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$; la valeur correspondante de v décroît depuis l'infini jusqu'à un certain minimum quand C_1 décroît depuis $-\varphi_2$ jusqu'à $-\varphi_3$.

La seconde nappe de la surface reste réelle quand C_1 est compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_1$; la valeur correspondante de v décroît depuis l'infini jusqu'à un certain minimum quand C_1 décroît depuis $-\varphi_2$ jusqu'à $-\varphi_1$.

Ainsi v admet trois minima au moins et reste toujours supérieur à une certaine limite positive.

Si donc nous regardons l'équation (8') comme définissant C_1 en fonction de μ, C_1 sera fonction continue de μ, mais nous pourrons prendre μ assez petit pour que cette équation n'admette aucune racine.

Ainsi il est certain qu'il existe toujours une infinité de solutions périodiques; mais quand on fera décroître μ, toutes ces solutions disparaîtront l'une après l'autre.

Il résulte de ce qui précède que les équations (5) admettent pour $\varepsilon = 0$ une infinité de solutions périodiques; les principes du chapitre III (1ère partie) nous permettent d'affirmer qu'il y en a encore une infinité pour les valeurs suffisamment petites de ε. Comme μ est très petit, il semble très probable qu'il existera une infinité de solutions périodiques pour $\varepsilon = \mu\sqrt{\mu}$, c'est à dire pour les équations (4) qui sont déduites par un changement de variable très simple des équations proposées.

Par conséquent, si nous revenons à ces équations proposées, nous voyons que dans la *région de libration R_2 il y a une infinité de trajectoires fermées représentant des solutions périodiques.* Nous allons d'ailleurs l'établir rigoureusement par une voie toute différente.

Mais si faisant décroître μ d'une manière continue, on suit une de ces trajectoires fermées, on la verra se déformer aussi d'une façon continue et *disparaître* ensuite pour une certaine valeur de μ. Ainsi pour $\mu = 0$ toutes les solutions périodiques de la région R_2 auront disparu l'une après l'autre. Ce n'est pas ainsi que se comportaient les solutions périodiques étudiées dans le chapitre III (1^ère^ partie) et qui subsistaient encore pour $\mu = 0$.

On peut démontrer que dans le voisinage d'une trajectoire fermée représentant une solution périodique, soit stable, soit instable, il passe une infinité d'autres trajectoires fermées. Cela ne suffit pas, en toute rigueur, pour conclure que toute région de l'espace, si petite qu'elle soit, est traversée par une infinité de trajectoires fermées,[1] mais cela suffit pour donner à cette hypothèse un haut caractère de vraisemblance.

Ainsi que je viens de le dire, l'aperçu qui précède ne suffirait pas pour établir rigoureusement l'existence des solutions périodiques du 2^e^ genre. Voici comment nous y parviendrons.

Reprenons nos équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}$$

et envisageons une solution périodique du 1^er^ genre de période T; quand t augmentera de T, y_1 et y_2 augmenteront de $n_1 T$ et de $n_2 T$; je supposerai comme plus haut:

$$n_1 T = 2\pi, \qquad n_2 = 0.$$

Cela posé, de l'équation

$$F = C$$

nous pouvons tirer x_2 en fonction de x_1, y_1 et y_2; en remplaçant x_2 par la valeur ainsi obtenue, on trouve:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2},$$

[1] Les travaux récents de M. CANTOR nous ont appris en effet (pour employer le langage de ce savant géomètre) qu'un ensemble peut être parfait, sans être continu.

les seconds membres pouvant être regardés comme des fonctions connues de x_1, y_1 et y_2. Enfin en éliminant dt il viendra:

$$\frac{dx_1}{dy_1} = X, \qquad \frac{dy_2}{dy_1} = Y, \tag{9}$$

X et Y étant des fonctions connues de x_1, y_1 et y_2, périodiques de période 2π par rapport à y_1.

Soit:

$$x_1 = \varphi_1(y_1), \qquad y_2 = \varphi_2(y_1)$$

la solution périodique considérée qui sera de période 2π par rapport à y_1; je suppose que cette solution périodique soit celle que nous avons définie plus haut et qui était représentée approximativement sur la figure du § 17 par la courbe fermée isolée de la surface $C_1 = -\varphi_3$. Ce sera donc une solution périodique *stable*, elle admettra deux exposants caractéristiques α et $-\alpha$ égaux et de signe contraire et dont le carré sera réel négatif.

Soit maintenant

$$x_1 = \varphi_1(y_1) + \xi_1, \qquad y_2 = \varphi_2(y_1) + \xi_2$$

une solution peu différente de la première. Soient conformément aux notations du chapitre III (1ère partie) β_1 et β_2 les valeurs initiales de ξ_1 et de ξ_2 pour $y_1 = 0$, et $\beta_1 + \psi_1$, $\beta_2 + \psi_2$ les valeurs de ξ_1 et de ξ_2 pour $y_1 = 2k\pi$ (k entier). La solution sera périodique de période $2k\pi$ si l'on a:

$$\psi_1 = \psi_2 = 0. \tag{10}$$

On sait que ψ_1 et ψ_2 pourront se développer suivant les puissances de β_1 et β_2 et que ces fonctions dépendront en outre de μ.

Si on regarde un instant β_1, β_2 et μ comme les coordonnées d'un point dans l'espace, les équations (10) représentent une certaine courbe gauche et à chaque point de cette courbe gauche correspond une solution périodique. Il est clair que ψ_1 et ψ_2 s'annulent avec β_1 et β_2; en effet si l'on fait $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, on obtient, d'après la définition de ξ_1 et de ξ_2, une solution périodique de période 2π qui peut aussi être regardée comme périodique de période $2k\pi$.

La courbe (10) comprend donc d'abord l'axe des μ tout entier. Je me propose de démontrer que si, pour $\mu = \mu_0$, $k\alpha$ est multiple de $2i\pi$, il existera une autre branche de la courbe (10) qui passera par le point

$$\mu = \mu_0, \qquad \beta_1 = 0, \qquad \beta_2 = 0$$

et par conséquent que pour les valeurs de μ voisines de μ_0, il existe d'autres solutions périodiques que $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

Posons $\mu - \mu_0 = \lambda$ et cherchons à développer ψ_1 et ψ_2 suivant les puissances de β_1, de β_2 et de λ.

Calculons d'abord les termes du 1[er] degré par rapport à β_1 et à β_2.

Je dis d'abord que pour $\lambda = 0$, c'est à dire pour $\mu = \mu_0$, tous ces termes sont nuls.

En effet supposons que les ξ soient assez petits pour qu'on en puisse négliger les carrés. Nous avons vu dans la 1[ère] partie que dans ce cas, les ξ satisfont à un système de deux équations différentielles linéaires, que nous avons appelées équations aux variations des équations (9). Nous avons vu également que ces équations linéaires admettent deux solutions remarquables; que la première de ces solutions est multipliée par $e^{2\alpha\pi}$ quand y_1 augmente de 2π, et que l'autre est multipliée par $e^{-2\alpha\pi}$.

Pour $\lambda = 0$, $k\alpha$ est un multiple de $2i\pi$ de sorte que $e^{2\alpha\pi}$ et $e^{-2\alpha\pi}$ sont deux racines k^{es} de l'unité. Donc nos deux solutions se reproduisent quand y_1 augmente de $2k\pi$. Comme l'équation est linéaire, la solution générale est une combinaison linéaire de ces deux solutions remarquables, et elle ne change pas non plus quand y_1 augmente de $2k\pi$.

Comme ψ_1 et ψ_2 sont précisément les accroissements que subissent ξ_1 et ξ_2 quand y_1 passe de la valeur 0 à la valeur $2k\pi$, ψ_1 et ψ_2 doivent être nuls; mais cela n'est vrai que quand ξ_1 et ξ_2 (ou β_1 et β_2) sont assez petits pour qu'on puisse en négliger les carrés; ce seront donc seulement les termes de ψ_1 et ψ_2 qui sont du 1[er] degré en β_1 et β_2 qui seront nuls.

C. Q. F. D.

Soient:

$a\beta_1 + b\beta_2$ les termes du premier degré de ψ_1,

$c\beta_1 + e\beta_2$ les termes du premier degré de ψ_2.

Nous venons de voir que pour $\lambda = 0$

$$a = b = c = e = 0.$$

Soit encore pour $\lambda = 0$:

$$\frac{da}{d\lambda} = a', \qquad \frac{db}{d\lambda} = b', \qquad \frac{dc}{d\lambda} = c'. \qquad \frac{de}{d\lambda} = e'.$$

Je dis que

$$a' + e' = 0.$$

En effet l'équation en S

$$(a - S)(e - S) - bc = 0$$

admet pour racines: (cf. § 12)

$$S = 1 - e^{2\alpha k\pi}, \qquad S = 1 - e^{-2\alpha k\pi};$$

pour $\lambda = 0$, ces deux racines sont nulles; si λ est assez petit pour qu'on puisse en négliger le carré, elles seront égales à:

$$\pm\, 2k\pi \frac{d\alpha}{d\lambda}\lambda.$$

L'équation en S:

$$(a' - S)(e' - S) - b'c' = 0$$

aura donc pour racines

$$S = \pm\, 2k\pi \frac{d\alpha}{d\lambda}$$

et comme ces deux racines sont égales et de signe contraire on aura:

$$a' + e' = 0.$$

De plus a', e', b' et c' ne seront pas nuls à la fois en général. En effet cela ne pourrait avoir lieu que si $\frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{d\alpha}{d\mu}$ était nul. Or μ_0 est une quantité choisie de telle sorte que α (qui est une fonction de μ) soit commensurable avec $2i\pi$. Or $\frac{d\alpha}{d\mu}$ ne pourrait s'annuler pour toutes les valeurs commensurables de $\frac{\alpha}{2i\pi}$ qu'en s'annulant identiquement; alors α serait une constante (qui devrait d'ailleurs être nulle puisque $\alpha = 0$ pour $\mu = 0$) ce qui n'a pas lieu en général.

Nous avons vu que pour $\lambda = 0$ les termes du 1er degré de ψ_1 et de ψ_2 s'annulent identiquement. Supposons qu'il en soit de même des termes du 2d degré, du 3e degré, etc., du $m - 1$e degré, mais que les termes du me degré ne s'annulent pas identiquement dans ψ_1 et dans ψ_2 pour $\lambda = 0$. Soit θ_1 l'ensemble des termes du me degré de ψ_1 pour $\lambda = 0$; soit θ_2 l'ensemble des termes du me degré de ψ_2 pour $\lambda = 0$. Ainsi θ_1 et θ_2 sont deux polynômes homogènes du me degré en β_1 et β_2 et de ces deux polynômes l'un au moins ne s'annule pas identiquement.

Posons:

$$\psi_1 = a'\lambda\beta_1 + b'\lambda\beta_2 + \theta_1 + \omega_1,$$

$$\psi_2 = c'\lambda\beta_1 - a'\lambda\beta_2 + \theta_2 + \omega_2.$$

Alors ω_1 et ω_2 seront un ensemble de termes qui seront: ou bien du $(m + 1)$e degré au moins par rapport aux β, ou bien du second degré au moins par rapport aux β et du 1er degré au moins par rapport à λ, ou bien du 1er degré au moins par rapport aux β et du 2d degré au moins par rapport à λ.

Je me propose de démontrer que l'on peut tirer des équations (10) β_1 et β_2 en séries ordonnées suivant les puissances de $\lambda^{\frac{1}{m-1}}$ et dont tous les termes ne sont pas nuls.

Mais il faut d'abord que je démontre que l'on a identiquement:

$$\frac{d\theta_1}{d\beta_1} + \frac{d\theta_2}{d\beta_2} = 0.$$

En effet il existe un invariant intégral positif. Nous en concluons qu'il existe une intégrale

$$\iint \Phi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

qui a la même valeur pour une aire quelconque appartenant à la portion de surface sans contact $y_1 = 0$ et pour toutes ses conséquentes.

De plus la fonction Φ est positive. Donc $\Phi(0, 0)$ n'est pas nul; en multipliant la fonction Φ par un facteur convenable, nous pourrons donc toujours supposer:

$$\Phi(0, 0) = 1.$$

Mais le point:

$$\xi_1 = \beta_1 + \psi_1, \qquad \xi_2 = \beta_2 + \psi_2, \qquad y_1 = 2k\pi$$

est le k^e conséquent du point:

$$\xi_1 = \beta_1, \qquad \xi_2 = \beta_2, \qquad y_1 = 0.$$

On aura donc pour une aire quelconque:

$$\iint \Phi(\beta_1 + \psi_1, \beta_2 + \psi_2)(d\beta_1 + d\psi_1)(d\beta_2 + d\psi_2) = \iint \Phi(\beta_1, \beta_2) d\beta_1 d\beta_2$$

d'où l'identité:

$$(11) \qquad \Phi(\beta_1 + \psi_1, \beta_2 + \psi_2)\left[\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_1}\frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_2} - \frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_2}\frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_1}\right]$$
$$= \Phi(\beta_1, \beta_2).$$

Nous supposerons $\lambda = 0$, nous aurons donc:

$$\psi_1 = \theta_1 + \omega_1, \qquad \psi_2 = \theta_2 + \omega_2.$$

Les θ ne contiennent alors que des termes du m^e degré et les ω que des termes du $(m + 1)^e$ degré ou de degré supérieur.

Il résulte de là que la différence:

$$\Phi(\beta_1 + \psi_1, \beta_2 + \psi_2) - \Phi(\beta_1, \beta_2)$$

ne contient que des termes du m^e degré au moins par rapport à β_1 et à β_2. Si l'on convient de négliger les termes du m^e degré et de degré supérieur, on pourra écrire:

$$\Phi(\beta_1 + \psi_1, \beta_2 + \psi_2) = \Phi(\beta_1, \beta_2).$$

On aura, en négligeant toujours les termes du m^e degré:

$$\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_1} = 1 + \frac{d\theta_1}{d\beta_1}, \qquad \frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_2} = 1 + \frac{d\theta_2}{d\beta_2},$$
$$\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_2} = \frac{d\theta_1}{d\beta_2}, \qquad \frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_1} = \frac{d\theta_2}{d\beta_1}$$

et

$$\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_1}\frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_2} - \frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_2}\frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_1} = 1 + \frac{d\theta_1}{d\beta_1} + \frac{d\theta_2}{d\beta_2},$$

de sorte qu'en identifiant dans l'identité (11) tous les termes de degré inférieur à m, on arrive à la relation:

$$\Phi(\beta_1, \beta_2)\left(\frac{d\theta_1}{d\beta_1} + \frac{d\theta_2}{d\beta_2}\right) = 0.$$

Dans le premier membre cette relation, nous ne devons conserver que les termes de degré $m - 1$ au plus de sorte qu'il reste:

$$\frac{d\theta_1}{d\beta_1} + \frac{d\theta_2}{d\beta_2} = 0.$$

C. Q. F. D.

Posons:

$$\lambda = \pm \eta^{m-1}, \qquad \beta_1 = \gamma_1 \eta, \qquad \beta_2 = \gamma_2 \eta;$$

on voit que θ_1 et θ_2 deviennent divisibles par η^m et ω_1 et ω_2 par η^{m+1}, de sorte qu'on peut poser:

$$\theta_1 = \eta^m \theta_1', \qquad \theta_2 = \eta^m \theta_2', \qquad \omega_1 = \eta^{m+1}\omega_1', \qquad \omega_2 = \eta^{m+1}\omega_2',$$

d'où:

$$\phi_1 = \pm \eta^m(a'\gamma_1 + b'\gamma_2) + \eta^m \theta_1' + \eta^{m+1}\omega_1',$$
$$\phi_2 = \pm \eta^m(c'\gamma_1 - a'\gamma_2) + \eta^m \theta_2' + \eta^{m+1}\omega_2',$$

de sorte que nos équations (10) peuvent être remplacées par les suivantes:

$$(12) \qquad \begin{aligned} &\pm (a'\gamma_1 + b'\gamma_2) + \theta_1' + \eta\omega_1' = 0, \\ &\pm (c'\gamma_1 - a'\gamma_2) + \theta_2' + \eta\omega_2' = 0. \end{aligned}$$

Je dis qu'on peut tirer de ces équations γ_1 et γ_2 en séries ordonnées suivant les puissances de η et sans que ces séries soient identiquement nulles.

En vertu du théorème IV, § 2, il nous suffit pour cela d'établir:

1°. Que les équations (12), quand on y fait $\eta = 0$, admettent au moins un système de solutions réelles:

$$\gamma_1 = \gamma_1^0, \qquad \gamma_2 = \gamma_2^0.$$

2°. Que si l'on fait:

$$\eta = 0, \qquad \gamma_1 = \gamma_1^0, \qquad \gamma_2 = \gamma_2^0$$

le déterminant fonctionnel des premiers membres des deux équations (12) par rapport à γ_1 et γ_2 n'est pas nul.

Cela revient à dire que, pour les équations (12) réduites par la supposition de $\eta = 0$, la solution

$$\gamma_1 = \gamma_1^0, \qquad \gamma_2 = \gamma_2^0$$

doit être une solution simple.

Mais en vertu des théorèmes V et VI du § 2 et de leurs corollaires, on peut encore développer γ_1 et γ_2 suivant les puissances de η, quand même cette solution serait multiple, pourvu que l'ordre de multiplicité soit impair.

Nous sommes donc conduits à envisager les équations:

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\pm (a'\gamma_1 + b'\gamma_2) + \theta_1' = 0, \\ &\pm (c'\gamma_1 - a'\gamma_2) + \theta_2' = 0 \end{aligned}$$

et nous devons chercher à démontrer que ces équations admettent au moins une solution réelle d'ordre impair.

De ces équations nous pouvons tirer la suivante:

$$(14) \qquad (a'\gamma_1 + b'\gamma_2)\theta_2' - (c'\gamma_1 - a'\gamma_2)\theta_1' = 0$$

qui est homogène et dont on pourra par conséquent tirer le rapport $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$.

Il est clair que θ_1' et θ_2' sont formés avec γ_1 et γ_2 comme θ_1 et θ_2 avec β_1 et β_2; on aura donc:

$$\frac{d\theta_1'}{d\gamma_1} + \frac{d\theta_2'}{d\gamma_2} = 0.$$

Cela prouve qu'il existe un polynôme f homogène et de degré $m + 1$ en γ_1 et γ_2 et qui est tel que:

$$\theta_1' = \frac{df}{d\gamma_2}, \qquad \theta_2' = -\frac{df}{d\gamma_1}.$$

De même si nous posons:

$$f_1 = \frac{1}{2}(b'\gamma_2^2 + 2a'\gamma_1\gamma_2 - c'\gamma_1^2)$$

il vient:

$$a'\gamma_1 + b'\gamma_2 = \frac{df_1}{d\gamma_2}, \qquad c'\gamma_1 - a'\gamma_2 = -\frac{df_1}{d\gamma_1}$$

de sorte que l'équation (14) peut s'écrire:

$$\frac{df_1}{d\gamma_2}\frac{df}{d\gamma_1} - \frac{df_1}{d\gamma_1}\frac{df}{d\gamma_2} = 0.$$

Considérons l'expression:

$$H = \frac{f^2}{f_1^{m+1}}.$$

Elle est homogène et de degré 0 par rapport à γ_1 et γ_2; elle ne dépend donc que du rapport $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$. Je dis que le dénominateur f_1 ne peut jamais s'annuler.

En effet l'équation:

$$(a' - S)(e' - S) - b'c' = 0$$

doit avoir ses deux racines imaginaires, d'où:

$$a'e' - b'c' = -a'^2 - b'c' < 0$$

d'où:

$$a'^2 + b'c' > 0,$$

ce qui prouve que la forme quadratique f_1 est définie. L'expression H ne peut donc jamais devenir infinie. Elle admettra donc au moins un maximum. Pour ce maximum on devra avoir:

$$\frac{df_1}{d\gamma_2}\frac{df}{d\gamma_1} - \frac{df_1}{d\gamma_1}\frac{df}{d\gamma_2} = 0.$$

Ainsi l'équation (14) admet au moins une racine réelle. Elle sera en général simple. En tout cas, elle sera toujours d'ordre impair, car un maximum ne peut correspondre qu'à une racine d'ordre impair.

Nous avons tiré de l'équation (14) le rapport $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$; nous pouvons donc poser:

$$\gamma_1 = \delta_1 u, \qquad \gamma_2 = \delta_2 u,$$

δ_1 et δ_2 étant des quantités connues.

Il nous reste maintenant à déterminer u. Pour cela dans la première des équations (13) je remplace γ_1 et γ_2 par $\delta_1 u$ et $\delta_2 u$, il vient:

$$\theta_1' = u^m \theta_1'', \qquad \theta_2' = u^m \theta_2'',$$

θ_1'' étant formé avec δ_1 et δ_2 comme θ_1' avec γ_1 et γ_2; d'où:

$$(15) \qquad \pm (a'\delta_1 + b'\delta_2) + \theta_1'' u^{m-1} = 0.$$

Cette équation doit déterminer u; si m est pair elle aura une racine réelle; si m est impair (et c'est d'ailleurs ce qui arrivera en général) elle aura deux racines réelles, ou pas de racine réelle; elle aura deux racines réelles si θ_1'' et $\pm (a'\delta_1 + b'\delta_2)$ sont de signe contraire; mais on peut toujours grâce au double signe $\pm$, s'arranger pour qu'il en soit ainsi.

L'équation (15) admet donc au moins une racine réelle. De plus cette racine est simple. Il n'y aurait d'exception que si

$$a'\delta_1 + b'\delta_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_1'' = 0.$$

Mais dans ce cas on remplacerait l'équation (15) par la suivante:

$$\pm (c'\delta_1 - a'\delta_2) + \theta_2'' u^{m-1} = 0.$$

Il n'y aurait donc plus de difficulté que si on avait à la fois:

$$a'\delta_1 + b'\delta_2 = c'\delta_1 - a'\delta_2 = 0$$

ou bien

$$\theta_1'' = \theta_2'' = 0.$$

La première circonstance ne peut pas se produire, à cause de l'inégalité:

$$a'^2 + b'c' > 0.$$

La seconde circonstance pourrait au contraire se présenter. Il peut se faire que l'équation (14) admette une racine telle que $\theta_1' = \theta_2' = 0$. Mais je dis que dans ce cas l'équation (14) admettra encore au moins une racine pour laquelle cette circonstance ne se produira pas.

En effet on a identiquement:

$$mf = \gamma_2 \theta_1' - \gamma_1 \theta_2'.$$

Si donc:

$$\theta_1' = \theta_2' = 0$$

on aura $f = 0$ et puisque f_1 n'est jamais nul

$$H = 0.$$

Il peut se faire en effet que l'expression H admette o comme maximum ou comme minimum. Mais cette expression n'est pas identiquement nulle puisque θ_1' et θ_2' ne sont pas tous deux identiquement nuls; de plus elle reste toujours finie; elle devient donc soit positive, soit négative; si elle devient positive, elle aura un maximum positif et différent de o; si elle devient négative elle aura un minimum négatif et différent de o.

Ainsi l'équation (14) admet toujours au moins une racine réelle d'ordre impair telle que θ_1'' et θ_2'' ne s'annulent pas à la fois.

Donc les équations (13) ont au moins une solution réelle d'ordre impair.

Donc on peut trouver des séries qui ne sont pas identiquement nulles, qui sont développables suivant les puissances fractionnaires positives de $\mu - \mu_0$ et qui satisfont aux équations (10) quand on les substitue à β_1 et β_2.

Donc il existe un système de solutions périodiques de période $2k\pi$ qui pour $\mu = \mu_0$ se confondent avec la solution

$$x_1 = \varphi_1(y_1), \qquad x_2 = \varphi_2(y_1).$$

Ce sont les solutions périodiques du 2e genre.

§ 21. *Divergence des séries de M. Lindstedt.*

Je voudrais terminer l'exposé des résultats généraux de ce mémoire en appelant particulièrement l'attention sur les conclusions négatives qui en découlent. Ces conclusions sont pleines d'intérêt, non seulement parce qu'elles font mieux ressortir l'étrangeté des résultats obtenus, mais parce qu'elles peuvent, en vertu précisément de leur nature négative, s'étendre immédiatement aux cas plus généraux, tandis que les conclusions positives ne peuvent se généraliser sans une démonstration spéciale.

Je me propose d'abord de démontrer que les séries proposées par M. LINDSTEDT ne sont pas convergentes; mais je veux auparavant rappeler en quoi consiste la méthode de M. LINDSTEDT. Je l'exposerai, il est vrai, avec des notations différentes de celles qu'avait adoptées ce savant astronome, car je désire, pour plus de clarté, conserver celles dont j'ai fait usage plus haut.

Mettons les équations de la dynamique sous la même forme que dans la seconde partie du présent mémoire et écrivons:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

F sera une fonction donnée des quatre variables x_1, x_2, y_1 et y_2 et nous aurons:

$$F = F_0 + \mu F_1.$$

F_0 sera une fonction de x_1 et de x_2, indépendante de y_1 et de y_2; μ sera un coefficient très petit, de sorte que μF_1 sera la *fonction perturbatrice.*

C'est en effet sous cette forme que se présentent les problèmes de la dynamique et en particulier les problèmes de la mécanique céleste.

Si μ était nul, x_1 et x_2 seraient des constantes. Si μ n'est pas nul mais très petit, et qu'on appelle ξ_1 et ξ_2 les valeurs initiales de x_1 et de x_2, les différences $x_1 - \xi_1$ et $x_2 - \xi_2$ seront du même ordre de grandeur que μ.

Si donc nous appelons n_1 et n_2 les valeurs de $-\frac{dF_0}{dx_1}$ et de $-\frac{dF_0}{dx_2}$ pour $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, les différences:

$$-\frac{dF_0}{dx_1} - n_1 \quad \text{et} \quad -\frac{dF_0}{dx_2} - n_2$$

seront du même ordre de grandeur que μ, ce qui nous permettra de poser:

$$-\frac{dF_0}{dx_1} - n_1 = \mu\varphi_1(x_1, x_2),$$

$$-\frac{dF_0}{dx_2} - n_2 = \mu\varphi_2(x_1, x_2),$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions de x_1 et de x_2 qui ne sont pas très grandes.

Les équations du mouvement s'écrivent alors:

$$\frac{dx_1}{dt} = \mu \frac{dF_1}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \mu \frac{dF_1}{dy_2},$$

$$\frac{dy_1}{dt} = n_1 + \mu\left(\varphi_1 - \frac{dF_1}{dx_1}\right), \qquad \frac{dy_2}{dt} = n_2 + \mu\left(\varphi_2 - \frac{dF_1}{dx_2}\right).$$

Supposons maintenant que x_1, x_2, y_1, y_2 au lieu d'être regardés *directement* comme des fonctions de t soient regardés comme des fonctions de deux variables:

$$w_1 \quad \text{et} \quad w_2$$

et que l'on pose:

$$w_1 = \lambda_1 t + \varpi_1, \qquad w_2 = \lambda_2 t + \varpi_2.$$

ϖ_1 et ϖ_2 seront des constantes d'intégration arbitraires; λ_1 et λ_2 seront des constantes que la suite du calcul déterminera complètement.

Les équations du mouvement deviennent alors:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\lambda_1 \frac{dx_1}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dx_1}{dw_2} - \mu \frac{dF_1}{dy_1} = 0, \\ &\lambda_1 \frac{dx_2}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dx_2}{dw_2} - \mu \frac{dF_1}{dy_2} = 0, \\ &\lambda_1 \frac{dy_1}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dy_1}{dw_2} - n_1 - \mu\left(\varphi_1 - \frac{dF_1}{dx_1}\right) = 0, \\ &\lambda_1 \frac{dy_2}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dy_2}{dw_2} - n_2 - \mu\left(\varphi_2 - \frac{dF_1}{dx_2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Posons maintenant:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \mu^3 x_1^3 + \ldots, \\ x_2 &= x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \mu^3 x_2^3 + \ldots, \\ y_1 - w_1 &= \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_2 - w_2 &= \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1 &= \lambda_1^0 + \mu \lambda_1^1 + \mu^2 \lambda_1^2 + \ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_2 &= \lambda_2^0 + \mu \lambda_2^1 + \mu^2 \lambda_2^2 + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Je suppose que les coefficients λ_i^k sont des constantes et que les coefficients y_i^k et x_i^k sont des séries trigonométriques ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples de w_1 et de w_2.

Je supposerai d'ailleurs comme je l'ai toujours fait jusqu'ici que F_1 est une série trigonométrique dépendant des sinus et cosinus des multiples de y_1 et de y_2 et que les coefficients de cette série sont des fonctions holomorphes de x_1 et de x_2.

Dans ces conditions, si dans les premiers membres des équations (1) je substitue à la place de $\lambda_1, \lambda_2, y_1, y_2, x_1$ et x_2 leurs valeurs (2), j'aurai quatre fonctions développées suivant les puissances croissantes de μ et il est clair que les coefficients des diverses puissances de μ seront des séries ordonnées suivant les lignes trigonométriques des multiples de w_1 et w_2.

J'appelle:

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_1' \quad \text{et} \quad \Phi_2'$$

ces quatre fonctions.

Cela posé, le théorème de M. Lindstedt consiste en ceci:

Il est possible, quelque grand que soit q, de déterminer les $2q + 2$ constantes

$$\lambda_1^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_1^q,$$

$$\lambda_2^0, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_2^q,$$

et les $4q$ séries trigonométriques:

$$x_1^0, \ldots, x_1^q,$$

$$x_2^0, \ldots, x_2^q,$$

$$y_1^1, \ldots, y_1^q,$$

$$y_2^1, \ldots, y_2^q,$$

de façon à annuler dans

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_1' \quad \text{et} \quad \Phi_2'$$

les termes indépendants de μ et les coefficients des q premières puissances de μ, de façon, en d'autres termes, à satisfaire aux équations du mouvement aux quantités près de l'ordre de μ^{q+1}.

On trouve d'abord:

$$\lambda_1^0 = n_1, \qquad \lambda_2^0 = n_2, \qquad x_1^0 = \xi_1 + \omega_1, \qquad x_2^0 = \xi_2 + \omega_2,$$

ω_1 et ω_2 étant des constantes d'intégration que nous supposerons de l'ordre de μ.

Supposons que l'on ait déterminé par un calcul préalable:

$$\lambda_i^0, \lambda_i^1, \ldots, \lambda_i^{q-1},$$
$$x_i^0, x_i^1, \ldots, x_i^{q-1},$$
$$y_i^1, \ldots, y_i^{q-1},$$

et que l'on se propose de déterminer

$$\lambda_1^q, \lambda_2^q, x_1^q, x_2^q, y_1^q, y_2^q.$$

Pour cela, écrivons que le coefficient de μ^q est nul dans Φ_1, Φ_2 et Φ_1', Φ_2'.

Il vient:

$$(3) \qquad \begin{aligned} n_1 \frac{dx_1^q}{dw_1} + n_2 \frac{dx_1^q}{dw_2} &= X_1, \\ n_1 \frac{dx_2^q}{dw_1} + n_2 \frac{dx_2^q}{dw_2} &= X_2, \\ n_1 \frac{dy_1^q}{dw_1} + n_2 \frac{dy_1^q}{dw_2} + \lambda_1^q &= Y_1, \\ n_1 \frac{dy_2^q}{dw_1} + n_2 \frac{dy_2^q}{dw_2} + \lambda_2^q &= Y_2, \end{aligned}$$

X_1, X_2, Y_1 et Y_2 étant des fonctions connues.

X_1, X_2, Y_1 et Y_2 sont des séries trigonométriques en w_1 et w_2.

Pour que l'intégration des équations (3) soit possible, il faut:

1° que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, ce qu'il est toujours permis de supposer.

2° que dans les séries trigonométriques X_1 et X_2, les termes tout connus soient nuls. Il en est effectivement ainsi, mais la démonstration de ce fait important est délicate et ne saurait trouver place ici; je me borne à dire qu'elle doit être fondée sur l'emploi des invariants intégraux.

3° que dans les séries trigonométriques Y_1 et Y_2 les termes tout connus se réduisent à λ_1^q et λ_2^q; comme λ_1^q et λ_2^q sont deux inconnues, nous déterminerons ces inconnues par cette condition.

L'intégration des équations (3) est alors possible. Leur intégration introduira quatre constantes arbitraires. A chaque approximation nouvelle, nous aurons ainsi quatre constantes d'intégration de plus; nous leur donnerons des valeurs quelconques et nous ne conserverons d'autres constantes arbitraires que ω_1, ω_2, ϖ_1 et ϖ_2.

Ainsi les séries de M. LINDSTEDT sont des séries trigonométriques en w_1 et w_2; elles sont développées suivant les puissances de μ et aussi suivant les puissances des deux constantes ω_1 et ω_2.

Ces séries d'après le théorème de M. LINDSTEDT, satisfont *formellement* aux équations du mouvement. Si donc elles étaient uniformément convergentes, elles nous donneraient l'intégrale générale de ces équations.

Je dis que cela n'est pas possible.

En effet supposons qu'il en soit ainsi et que nos séries convergent uniformément pour toutes les valeurs du temps et pour les valeurs suffisamment petites de μ, de ω_1 et de ω_2.

Il est clair que λ_1 et λ_2 sont aussi des séries ordonnées suivant les puissances de μ, ω_1 et ω_2. Pour certaines valeurs de ω_1 et ω_2 le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ est commensurable. Les solutions particulières qui répondent à ces valeurs des constantes d'intégration sont alors des solutions périodiques.

Nous avons vu plus haut que toute solution périodique admet un certain nombre *d'exposants caractéristiques.* Voyons comment on peut calculer ces exposants quand on possède l'intégrale générale des équations données.

Soit:

$$x_1 = \psi_1(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2), \qquad x_2 = \psi_2(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2),$$

$$y_1 = \psi_1'(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2), \qquad y_2 = \psi_2'(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2)$$

cette intégrale générale.

Supposons qu'en donnant à ω_1, ω_2, ϖ_1 et ϖ_2 des valeurs déterminées ω_1^0, ω_2^0, ϖ_1^0, ϖ_2^0, les fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_1', ψ_2' deviennent périodiques en t. Pour avoir les exposants caractéristiques de la solution périodique ainsi obtenue, nous formerons les seize dérivées partielles:

$$\frac{dx_1}{d\omega_1}, \frac{dx_2}{d\omega_1}, \frac{dy_1}{d\omega_1}, \frac{dy_2}{d\omega_1},$$

$$\frac{dx_1}{d\varpi_1}, \frac{dx_2}{d\varpi_1}, \frac{dy_1}{d\varpi_1}, \frac{dy_2}{d\varpi_1},$$

$$\frac{dx_1}{d\omega_2}, \frac{dx_2}{d\omega_2}, \frac{dy_1}{d\omega_2}, \frac{dy_2}{d\omega_2},$$

$$\frac{dx_1}{d\varpi_2}, \frac{dx_2}{d\varpi_2}, \frac{dy_1}{d\varpi_2}, \frac{dy_2}{d\varpi_2}$$

et nous y ferons ensuite

$$\omega_1 = \omega_1^0, \qquad \omega_2 = \omega_2^0, \qquad \varpi_1 = \varpi_1^0, \qquad \varpi_2 = \varpi_2^0.$$

Alors $\frac{dx_1}{d\omega_1}$ par exemple prendra la forme suivante:

$$\frac{dx_1}{d\omega_1} = e^{\alpha_1 t}\theta_0(t) + e^{\alpha_2 t}\theta_2(t) + e^{\alpha_3 t}\theta_3(t) + e^{\alpha_4 t}\theta_4(t),$$

les α étant des constantes et les θ des fonctions périodiques.

Les α sont alors les exposants caractéristiques cherchés.

Appliquons cette règle au cas qui nous occupe. Nous avons:

$$x_1 = \varphi_1(\omega_1, \omega_2, w_1, w_2),$$

φ_1 étant périodique en w_1 et en w_2.

Il vient alors:

$$\frac{dx_1}{d\varpi_1} = \frac{d\varphi_1}{dw_1}, \qquad \frac{dx_1}{d\omega_1} = \frac{d\varphi_1}{d\omega_1} + \left(\frac{d\lambda_1}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_1} + \frac{d\lambda_2}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_2}\right)t.$$

Les trois fonctions:

$$\frac{d\varphi_1}{dw_1}, \frac{d\varphi_1}{d\omega_1} \quad \text{et} \quad \frac{d\lambda_1}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_1} + \frac{d\lambda_2}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_2}$$

sont périodiques en w_1 et w_2 et par conséquent en t.

On trouverait pour $\frac{dx_1}{d\varpi_2}$ et $\frac{dx_1}{d\omega_2}$ des expressions analogues.

Cela prouve que les exposants caractéristiques sont nuls.

Donc, *si les séries de M. Lindstedt étaient convergentes, tout les exposants caractéristiques seraient nuls.*

Dans quel cas en est-il ainsi?

Nous avons vu plus haut la manière de calculer les exposants caractéristiques (§§ 10 et 12).

Dans ce dernier paragraphe nous avons vu que les exposants caractéristiques relatifs aux équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF_0}{dy_i} + \mu \frac{dF_1}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_i} - \mu \frac{dF_1}{dx_i}$$

pouvaient se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$; nous avons appris à former l'équation qui donne le coefficient α_1 de $\sqrt{\mu}$.

Rappelons comment se forme cette équation:

Nous avions posé dans le paragraphe cité

$$C_{ik}^0 = -\frac{d^2F_0}{dx_i dx_k}, \qquad B_{ik}^2 = \frac{d^2F_1}{dy_i dy_k}.$$

Dans ces dérivées secondes on suppose x_1 et x_2 remplacés par x_1^0 et x_2^0, pendant que y_1 et y_2 sont remplacés par $n_1t + \varpi_1$, $n_2t + \varpi_2$.[1] C_{ik}^0 est donc une constante et B_{ik}^2 une fonction périodique de t. J'appelle b_{ik} le terme tout connu de cette fonction périodique.

Posons ensuite:

$$e_{11} = b_{11}C_{11}^0 + b_{12}C_{21}^0, \qquad e_{21} = b_{21}C_{11}^0 + b_{22}C_{21}^0,$$

$$e_{12} = b_{11}C_{12}^0 + b_{12}C_{22}^0, \qquad e_{22} = b_{21}C_{12}^0 + b_{22}C_{22}^0.$$

L'équation qui nous donne α_1 s'écrira alors:

$$\begin{vmatrix} e_{11} - \alpha_1^2 & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} - \alpha_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que cette équation ait toutes ses racines nulles, il faudrait que l'on eût:

$$e_{11} + e_{22} = 0$$

[1] Inutile de rappeler ici que ces valeurs de x_1^0, x_2^0, n_1, n_2 sont celles qui correspondent à la solution périodique étudiée; ce ne sont pas celles dont nous avons fait usage plus haut dans l'exposé de la méthode de M. LINDSTEDT. Le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est donc commensurable.

et

$$b_{11}C_{11}^0 + 2b_{12}C_{12}^0 + b_{22}C_{22}^0 = 0. \tag{4}$$

Or on a comme je l'ai démontré dans le paragraphe cité

$$n_1 b_{11} + n_2 b_{12} = n_1 b_{21} + n_2 b_{22} = 0.$$

Il faut donc pour que l'identité (4) ait lieu ou bien que:

$$b_{11} = 0 \tag{5}$$

ou bien que:

$$n_2^2 C_{11}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_1^2 C_{22}^0 = 0. \tag{6}$$

Occupons-nous d'abord de la relation (5). Si nous faisons dans la fonction perturbatrice F_1

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \qquad y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2$$

F_1 deviendra une fonction périodique de t. Supposons cette fonction périodique développée en série trigonométrique, et soit ψ le terme tout connu; ψ sera une fonction périodique de ϖ_1 et ϖ_2 et il viendra:

$$b_{ik} = \frac{d^2\psi}{d\varpi_i d\varpi_k}.$$

Nous devrons donc avoir:

$$\frac{d^2\psi}{d\varpi_1^2} = 0. \tag{7}$$

Nous pourrons toujours supposer que l'origine du temps a été choisi de telle sorte que ϖ_2 soit nul et que ψ soit fonction périodique de ϖ_1 seulement.

De plus la relation (7) devrait être (si les séries de M. Lindstedt convergeaient) satisfaite identiquement. Et en effet si l'on admettait la convergence de ces séries, il y aurait une infinité de solutions périodiques correspondant à chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$.

Si la relation (7) est une identité et si ψ est une fonction périodique, cette fonction devra se réduire à une constante.

Voyons ce que cela veut dire:

La fonction perturbatrice F_1 étant périodique par rapport à y_1 et à y_2 pourra s'écrire:

$$F_1 = \Sigma A_{m_1 m_2} \cos(m_1 y_1 + m_2 y_2) + \Sigma B_{m_1 m_2} \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2),$$

les m_1 et les m_2 étant des entiers, pendant que $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ sont des fonctions données de x_1 et de x_2.

On aura alors

$$\psi = \mathrm{S} A^0_{m_1 m_2} \cos(m_1 \varpi_1 + m_2 \varpi_2) + \mathrm{S} B^0_{m_1 m_2} \sin(m_1 \varpi_1 + m_2 \varpi_2),$$

la sommation représentée par le signe S s'étendant à tous les termes tels que

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = 0,$$

et $A^0_{m_1 m_2}$ et $B^0_{m_1 m_2}$ représentant ce que deviennent $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ quand on y remplace x_1 et x_2 par x_1^0 et x_2^0.

Comme les termes périodiques doivent disparaître de ψ, on aura

$$A^0_{m_1 m_2} = B^0_{m_1 m_2} = 0.$$

Ainsi les coefficients $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ du développement de la fonction perturbatrice doivent s'annuler quand on y donne à x_1 et à x_2 des valeurs telles que:

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = 0.$$

Ou bien encore on doit pouvoir donner au rapport $\frac{n_1}{n_2}$ des valeurs commensurables sans introduire dans la fonction perturbatrice F_1 des termes séculaires.

Il est clair qu'il n'en est pas ainsi dans le cas particulier du problème des trois corps que nous avons examiné et qu'on n'y peut donner au rapport des moyens mouvements une valeur commensurable sans introduire dans la fonction perturbatrice des termes séculaires.

Passons maintenant à la condition (6) qui peut s'écrire

$$\left(\frac{dF_0}{dx_2}\right)^2 \frac{d^2F_0}{dx_1^2} - 2\frac{dF_0}{dx_1}\frac{dF_0}{dx_2}\frac{d^2F_0}{dx_1 dx_2} + \left(\frac{dF_0}{dx_1}\right)^2 \frac{d^2F_0}{dx_2^2} = 0.$$

Elle exprime que la courbe

$$F_0(x_1, x_2) = \text{const.}$$

a un point d'inflexion au point $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$.

Comme cette condition doit être remplie pour toutes les valeurs de x_1^0 et de x_2^0 qui correspondent à un rapport $\frac{n_1}{n_2}$ commensurable, la courbe $F_0(x_1, x_2) = \text{const.}$ devra se réduire à un système de droites.

C'est un cas particulier que nous laisserons de côté; car il est évident que rien de pareil n'arrive dans le problème des trois corps.

Ainsi, *dans le cas particulier du problème des trois corps que nous avons étudié et par conséquent aussi dans le cas général, les séries de M. Lindstedt ne convergent pas uniformément pour toutes les valeurs des constantes arbitraires d'intégration qu'elles contiennent.*

§ 22. *Non-existence des intégrales uniformes.*

Reprenons nos équations de la dynamique avec deux degrés de liberté:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \qquad (i=1,2)$$

Ces équations admettent une intégrale:

$$F = \text{const.}$$

Cette intégrale F est une fonction analytique et uniforme de x_1, x_2, y_1, y_2 et μ; périodique de période 2π par rapport à y_1 et à y_2.

Je me propose de démontrer qu'il n'existe pas d'autre intégrale jouissant des mêmes propriétés.

Soit en effet:

$$\Phi = \text{const.}$$

une autre intégrale analytique uniforme par rapport aux x, aux y et à μ et périodique par rapport aux y.

Soit:

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad y_1 = \varphi_3(t), \qquad y_2 = \varphi_4(t)$$

une solution périodique (de période T) de nos équations différentielles.

Soit:

$$x_1 = \varphi_1(t) + \xi_1, \quad x_2 = \varphi_2(t) + \xi_2, \quad y_1 = \varphi_3(t) + \xi_3, \quad y_2 = \varphi_4(t) + \xi_4.$$

Soit β_i la valeur de ξ_i pour $t = 0$; soit $\beta_i + \psi_i$ la valeur de ξ_i pour $t = T$; nous savons que les ψ sont développables suivant les puissances croissantes des β. Considérons l'équation en S:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} - S & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \frac{d\psi_1}{d\beta_3} & \frac{d\psi_1}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} - S & \frac{d\psi_2}{d\beta_3} & \frac{d\psi_2}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_3}{d\beta_1} & \frac{d\psi_3}{d\beta_2} & \frac{d\psi_3}{d\beta_3} - S & \frac{d\psi_3}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_4}{d\beta_1} & \frac{d\psi_4}{d\beta_2} & \frac{d\psi_4}{d\beta_3} & \frac{d\psi_4}{d\beta_4} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Les racines de cette équation sont égales à

$$e^{\alpha T} - 1,$$

les α étant les exposants caractéristiques; deux de ces racines sont donc nulles, et dans le cas particulier du problème des trois corps que nous traitons, les deux autres racines doivent être différentes de 0.

Je remarque d'abord que nous avons:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{dF}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\beta_i} + \frac{dF}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\beta_i} + \frac{dF}{dy_1}\frac{d\psi_3}{d\beta_i} + \frac{dF}{dy_2}\frac{d\psi_4}{d\beta_i} &= 0, \\ \frac{d\Phi}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\beta_i} + \frac{d\Phi}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\beta_i} + \frac{d\Phi}{dy_1}\frac{d\psi_3}{d\beta_i} + \frac{d\Phi}{dy_2}\frac{d\psi_4}{d\beta_i} &= 0. \end{aligned} \qquad (i=1,2,3,4)$$

Dans les dérivées de F et de Φ, x_1, x_2, y_1 et y_2 doivent être remplacées par $\varphi_1(T)$, $\varphi_2(T)$, $\varphi_3(T)$, $\varphi_4(T)$.

On peut en conclure ou bien que l'on a:

$$(2) \qquad \frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{d\Phi}{dx_1}} = \frac{\frac{dF}{dx_2}}{\frac{d\Phi}{dx_2}} = \frac{\frac{dF}{dy_1}}{\frac{d\Phi}{dy_1}} = \frac{\frac{dF}{dy_2}}{\frac{d\Phi}{dy_2}}$$

ou bien que le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β est nul ainsi que tous ses mineurs du 1^er^ ordre.

D'autre part on a, en désignant pas $\varphi_i'(t)$ la dérivée de $\varphi_i(t)$:

$$(3)\qquad \frac{d\psi_i}{d\beta_1}\varphi_1'(0)+\frac{d\psi_i}{d\beta_2}\varphi_2'(0)+\frac{d\psi_i}{d\beta_3}\varphi_3'(0)+\frac{d\psi_i}{d\beta_4}\varphi_4'(0)=0, \qquad (i=1,2,3,4)$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\frac{dF}{dx_1}\varphi_1'(0)+\frac{dF}{dx_2}\varphi_2'(0)+\frac{dF}{dy_1}\varphi_3'(0)+\frac{dF}{dy_2}\varphi_4'(0)=0,\\ &\frac{d\Phi}{dx_1}\varphi_1'(0)+\frac{d\Phi}{dx_2}\varphi_2'(0)+\frac{d\Phi}{dy_1}\varphi_3'(0)+\frac{d\Phi}{dy_2}\varphi_4'(0)=0. \end{aligned}$$

De ces équations on peut conclure par un calcul très simple dont on trouvera plus loin le détail que si les équations (2) ne sont pas satisfaites:

ou bien on aura:

$$(5)\qquad \varphi_1'(0)=\varphi_2'(0)=\varphi_3'(0)=\varphi_4'(0)=0;$$

ou bien l'équation en S aura trois racines nulles (les quatre racines devraient même être nulles, puisque les exposants caractéristiques sont deux à deux égaux et de signe contraire).

Or nous savons que l'équation en S n'a que deux racines nulles; d'autre part les équations (5) ne peuvent être satisfaites que pour certaines solutions périodiques très particulières (je veux dire pour celles qui sont étudiées dans la Mécanique céleste de Laplace, livre X, chapitre VI) et où le troisième corps décrit comme les deux premiers une circonférence.

Les équations (2) devront donc être satisfaites. Elle devront l'être pour:

$$x_1=\varphi_1(T),\qquad x_2=\varphi_2(T),\qquad y_1=\varphi_3(T),\qquad y_2=\varphi_4(T).$$

Mais comme l'origine du temps est restée arbitraire, elles devront l'être également quel que soit t pour:

$$x_1=\varphi_1(t),\qquad x_2=\varphi_2(t),\qquad y_1=\varphi_3(t),\qquad y_2=\varphi_4(t).$$

En d'autres termes, elles le seront pour tous les points de toutes les solutions périodiques. Je dis maintenant que ces équations sont satisfaites identiquement. Posons par exemple:

$$f=\frac{d\Phi}{dx_2}\frac{dF}{dx_1}-\frac{d\Phi}{dx_1}\frac{dF}{dx_2}.$$

Il est clair que f sera encore une fonction analytique et uniforme; on aura $f = 0$ pour tous les points de toutes les solutions périodiques. Je veux établir que f est identiquement nul; pour cela je vais montrer que l'on a identiquement pour $\mu = 0$:

$$0 = f = \frac{df}{d\mu} = \frac{d^2 f}{d\mu^2} = \ldots .$$

En effet considérons une solution périodique quelconque du 1^er^ genre; soit:

$$x_1 = \varphi_1(t, \mu), \qquad x_2 = \varphi_2(t, \mu), \qquad y_1 = \varphi_3(t, \mu), \qquad y_2 = \varphi_4(t, \mu)$$

cette solution; les fonctions φ seront développables suivant les puissances de μ et quand μ tendra vers 0, elles tendront respectivement vers:

$$x_1^0,\ x_2^0,\ n_1 t + \varpi_1,\ n_2 t + \varpi_2.$$

(x_1^0 et x_2^0 étant des constantes telles que $\frac{n_1}{n_2}$ soit commensurable et ϖ_1 et ϖ_2 les quantités définies dans le § 11). Tant que μ n'est pas nul on aura:

$$f[\varphi_1(t, \mu), \varphi_2(t, \mu), \varphi_3(t, \mu), \varphi_4(t, \mu)] = 0.$$

Mais la fonction f étant analytique et par conséquent continue, on aura encore pour $\mu = 0$ (bien que pour $\mu = 0$ les exposants caractéristiques s'annulent):

$$f(x_1^0, x_2^0, n_1 t + \varpi_1, n_2 t + \varpi_2) = 0.$$

Mais si l'on considère un système quelconque de valeurs de x_1 et de x_2 on pourra toujours trouver un système x_1^0 et x_2^0 qui en différera aussi peu que l'on voudra et qui correspondra à une valeur commensurable de $\frac{n_1}{n_2}$. Soit alors:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

λ_1 et λ_2 étant deux entiers premiers entre eux. Nous choisirons t de façon que:

$$n_1 t + \varpi_1 = y_1 + 2k\pi. \qquad (k \text{ entier})$$

On aura alors:

$$n_2 t + \varpi_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(y_1 + 2k\pi - \varpi_1) + \varpi_2.$$

Si nous posons:

$$n_2 t + \varpi_2 = y_2^0 + 2k'\pi \qquad (k' \text{ entier})$$

on devra avoir:

$$f(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0.$$

Etant donnée une valeur quelconque de y_2, on peut choisir les entiers k et k' de telle façon que la différence $y_2 - y_2^0$ soit plus petite en valeur absolue que $\frac{2\pi}{\lambda_1}$. Mais nous pouvons toujours choisir x_1^0 et x_2^0 de façon que ce système de valeurs diffère aussi peu que l'on veut de x_1 et de x_2, et que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ tout en étant commensurable soit tel que le nombre entier λ_1 soit aussi grand que l'on veut. Par conséquent, étant donné un système quelconque de valeurs de x_1, x_2, y_1 et y_2 on pourra trouver un système de valeurs qui en différera aussi peu qu'on voudra et pour lequel f sera nul. Comme la fonction f est analytique elle devra donc être identiquement nulle pour $\mu = 0$.

Cela posé, comme

$$f[\varphi_i(t, \mu)] = 0$$

quels que soient t et μ; il vient, pour tous les points de la solution périodique:

$$\frac{df}{d\mu} + \frac{df}{dx_1}\frac{d\varphi_1}{d\mu} + \frac{df}{dx_2}\frac{d\varphi_2}{d\mu} + \frac{df}{dy_1}\frac{d\varphi_3}{d\mu} + \frac{df}{dy_2}\frac{d\varphi_4}{d\mu} = 0.$$

Cette relation sera vraie en particulier pour

$$\mu = 0, \qquad x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \qquad y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2.$$

Mais, quand μ est nul, f est identiquement nulle, par conséquent ses dérivées par rapport aux x et aux y sont nulles. On a donc:

$$\frac{df}{d\mu} = 0$$

pour $\mu = 0, x_i = x_i^0, y_i = n_i t + \varpi_i$; et on en conclurait comme plus haut que $\frac{df}{d\mu}$ est identiquement nul pour $\mu = 0$.

On démontrerait de la même manière que $\frac{d^2f}{d\mu^2}$, et les autres dérivées de f par rapport à μ sont nulles pour $\mu = 0$.

Donc la fonction f est identiquement nulle et les équations (2) sont des identités.

Mais, s'il en est ainsi, cela veut dire que Φ est une fonction de F, et que les deux intégrales Φ et F ne sont pas distinctes.

Nos équations ne comportent donc pas d'autre intégrale analytique et uniforme que $F = \text{const.}$

Quand je dis que ces équations n'admettent pas d'intégrale uniforme, je ne veux pas dire seulement qu'elles n'ont pas d'intégrale qui reste analytique et uniforme pour toutes les valeurs de x, de y et de μ.

Je veux dire qu'en dehors de l'intégrale F, ces équations n'admettent pas d'intégrale qui reste analytique, uniforme (et périodique de y_1 et y_2) pour toutes les valeurs de y_1 et de y_2 et pour les valeurs suffisamment petites de μ, quand x_1 et x_2 parcourent un domaine quelconque, si petit d'ailleurs que soit ce domaine.

On sait que Bruns a démontré qu'en dehors des intégrales connues, le problème des trois corps n'admet pas d'intégrale algébrique. Ce résultat se trouve donc conformé par une voie entièrement différente.

J'ai annoncé plus haut que les équations (1), (3) et (4) entraînent forcément une des trois conséquences suivantes: ou bien les équations (2) sont satisfaites, ou bien ce sont les équations (5), ou bien l'équation en S a au moins trois racines nulles.

En effet formons la matrice suivante à 4 lignes et 5 colonnes

$$(6) \qquad \left\| \frac{d\psi_i}{d\beta_1} \; \frac{d\psi_i}{d\beta_2} \; \frac{d\psi_i}{d\beta_3} \; \frac{d\psi_i}{d\beta_4} \; \varphi_i'(0) \right\|. \qquad (i=1,2,3,4)$$

Si les équations (1) et (4) sont satisfaites sans que les équations (2) le soient, nous devons conclure que tous les déterminants obtenus en supprimant dans cette matrice deux colonnes et une ligne sont nuls.

Si maintenant l'on fait subir à x_1, x_2, y_1 et y_2 un changement linéaire de variables, les ψ et les β subiront ce même changement linéaire et la matrice (6) pourra être simplifiée.

On peut toujours supposer qu'on a choisi ce changement linéaire de telle sorte que

$$\frac{d\psi_i}{d\beta_k} = 0 \qquad \text{pour } i < k.$$

Alors les produits trois à trois des quatre quantités

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1}, \frac{d\psi_2}{d\beta_2}, \frac{d\psi_3}{d\beta_3}, \frac{d\psi_4}{d\beta_4}$$

sont tous nuls, d'où il suit que deux au moins de ces quantités sont nulles. On peut toujours supposer que le changement linéaire a été choisi de telle sorte que ce soient $\frac{d\psi_3}{d\beta_3}$ et $\frac{d\psi_4}{d\beta_4}$ qui soient nuls.

Si en outre une des deux quantités $\frac{d\psi_1}{d\beta_1}$ et $\frac{d\psi_2}{d\beta_2}$ est encore nulle, l'équation en S aura trois racines nulles.

Si au contraire aucune de ces deux quantités n'est nulle, les équations (3) permettent de conclure que

$$\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0.$$

En supprimant dans la matrice (6) la 3^e^ et la 4^e^ colonne et la 3^e^ ligne, ou bien la 3^e^ et la 4^e^ colonne et la 4^e^ ligne, il vient:

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1}\frac{d\psi_2}{d\beta_2}\varphi_3'(0) = \frac{d\psi_1}{d\beta_1}\frac{d\psi_2}{d\beta_2}\varphi_4'(0) = 0;$$

ce qui ne peut avoir lieu que si

$$\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0,$$

c'est à dire si les équations (5) sont satisfaites; ou bien si

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\psi_2}{d\beta_2} = 0,$$

c'est à dire si l'équation en S a trois racines nulles.

C. Q. F. D.
