BEWEIS DER EXISTENZ DES POTENTIALS

DAS AN DER GRENZE DES BETRACHTETEN RAUMES GEGEBENE WERTHE HAT

FÜR DEN FALL DASS DIESE GRENZE EINE ÜBERALL CONVEXE FLÄCHE IST[1]

VON

GUSTAV KIRCHHOFF.

Der in der Überschrift genannte Beweis soll dadurch geliefert werden, dass für das fragliche Potential ein Ausdruck gebildet wird, der es darstellt als herrührend von einer Doppelschicht von Massen an der Oberfläche des betrachteten Raumes. Die Bildung dieses Ausdrucks setzt nicht die Convexität der Oberfläche voraus; derselbe enthält aber eine unendliche Reihe und die Convergenz dieser zu beweisen ist mir nur unter der genannten Voraussetzung gelungen.

Es sei ds ein Element der Oberfläche, U der Werth, den das Potential in ihm haben soll, r der Abstand eines Punktes P im Raume

---

[1] Vor ungefähr sechs Jahren hatte ich die Freude KIRCHHOFF in Berlin zu begegnen. Bei dieser Gelegenheit stellte ich ihm meine Bitte, er möge die Acta mathematica mit seiner Collaboration beehren. KIRCHHOFF, der schon zu der Zeit von der Krankheit litt, die ihn ins frühzeitige Grab führte, bedauerte, nichts Anderes vorräthig zu haben, als den von uns hier gedruckten Aufsatz, der schon vor vielen Jahren von ihm verfasst worden war. Da Prof. C. NEUMANN in Leipzig denselben Gegenstand schon behandelt hatte, so zweifelte doch KIRCHHOFF an der Zweckmässigkeit, seine Arbeit zu veröffentlichen. Er übergab mir indessen das Recht, über die Abhandlung nach meinem eigenen Wunsche zu verfügen.

Ich fühle es jetzt als eine Pflicht, diese wissenschaftliche Leistung des grossen Physikers nicht in Vergessenheit verweilen zu lassen. Jede von ihm geschriebene Zeile hat unzweifelhaft ihren Werth.

SOPHIE KOWALEVSKI.

Acta mathematica. 14. Imprimé le 21 février 1890.

von ds, oder vielmehr von einem Punkte, der unendlich nahe an ds liegt, n ein unendlich kleines Stück der nach dem Innern des betrachteten Raumes gerichteten Normale von ds, V eine Funktion des Ortes von P, die definirt ist durch die Gleichung

$$V = \frac{1}{4\pi}\int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}(U + U_1 + U_2 + \ldots),$$

wo $U_1, U_2, \ldots$ auf gewisse Weise als Funktionen des Ortes von ds so bestimmt werden sollen, dass ihre Summe eine convergente Reihe bildet.

Wenn der Punkt P durch ein Element hindurchgeht, so ändert sich V sprungweise; es sollen V_i und V_a die Werthe von V auf der inneren und der äusseren Seite von ds bezeichnen; dann ist

$$V_i - V_a = U + U_1 + U_2 + \ldots.$$

Wenn es nun gelänge die Grössen $U_1, U_2, \ldots$ so zu bestimmen, dass

$$-V_a = U_1 + U_2 + \ldots$$

wäre, so würde hieraus

$$V_i = U$$

folgen und es würde V für Punkte im Innern des betrachteten Raumes das gesuchte Potential sein. Die genannte Forderung ist aber erfüllt, wenn man

$$U_1 = -\frac{1}{4\pi}\int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} U,$$

$$U_2 = -\frac{1}{4\pi}\int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} U_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

setzt und dabei der Anfangspunkt von r *ausserhalb* der Oberfläche, unendlich nahe an dem Punkte wählt, auf den die Zeichen $U_1, U_2, \ldots$ links von den Gleichheitszeichen sich beziehn.

Zu beweisen ist noch, dass bei diesen Festsetzungen die Reihe

$U + U_1 + U_2 + \dots$ convergirt. Zu diesem Zwecke soll nachgewiesen werden, dass wenn h eine ganze Zahl bedeutet und M_h den grössten, N_h den kleinsten unter allen Werthen von U_h, alle Werthe von U_{h+1} zwischen

$$\frac{M_h - N_h}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{M_h - N_h}{2}$$

liegen.

Bei dem Beweise dieser Behauptung hat man zu benutzen, dass

$$ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$$

die scheinbare Grösse des Elementes ds von dem Anfangspunkte, P, von r aus gesehn, negativ oder positiv genommen ist, je nachdem die von P durch ds gezogene Linie bei ds in den betrachteten Raum hinein oder aus ihm hinaus tritt. Liegt P ausserhalb dieses Raumes, und denkt man sich einen Kegel, der seine Spitze in P hat und die Oberfläche berührt, so theilt die Berührungslinie die Oberfläche in zwei Theile, von denen der eine die Elemente enthält für die $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ negativ ist, die andere diejenigen, für die $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ positiv ist. Über den letzten ausgedehnt, sei das Integral

$$\int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \theta;$$

über den ersten ausgedehnt ist es dann $= -\theta$. Ist, wie vorausgesetzt, die Oberfläche überall convex, so kann θ den Werth 2π nicht überschreiten, es nähert sich dieser Grenze aber bis auf unendlich Kleines, wenn P der Oberfläche unendlich nahe kommt. Bei beliebiger Lage von P ist θ gleich der Öffnung des genannten Kegels und dieser Kegel geht in eine Ebene über, wenn P an die Oberfläche heranrückt.

Wenn man in dem Ausdrucke, welcher den Werth von U_{h+1} angiebt, in demjenigen Theile, in dem $-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ positiv ist, M_h für U_h und in demjenigen, in dem $-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ negativ ist, N_h für U_h setzt, so vergrössert man seinen Werth; der veränderte Werth ist aber, wenn P ein beliebiger äusserer Punkt ist,

$$\frac{\theta}{4\pi}(M_h - N_h)$$

und, wenn P der Oberfläche unendlich nahe ist,

$$\frac{1}{2}(M_h - N_h).$$

Es folgt daraus

$$U_{h+1} < \frac{M_h - N_h}{2}.$$

Eine analoge Betrachtung ergiebt offenbar

$$U_{h+1} > -\frac{M_h - N_h}{2};$$

damit ist die Richtigkeit der obigen Behauptung dargethan.

Es kann hiernach M_{h+1} nicht grösser als $\frac{M_h - N_h}{2}$ und N_{h+1} nicht kleiner als $-\frac{M_h - N_h}{2}$ sein; es können diese Grenzen aber erreicht werden. Damit M_{h+1} gleich $\frac{M_h - N_h}{2}$ werde, muss U_h in einem unendlich kleinen Theile der Oberfläche, in dem der Punkt liegt, für den $U_{h+1} = M_{h+1}$ ist, $= M_h$, in allen übrigen Punkten der Oberfläche aber $= N_h$ sein. Nur in dem Falle, dass ein endlicher Theil der Oberfläche, in dem der Punkt liegt auf den M_{h+1} sich bezieht, eine Ebene ist, findet eine Ausnahme hiervon in so fern statt, als für alle Punkte dieses Theiles, die in endlicher Entfernung von jenem Punkte sich befinden, U_h beliebige Werthe haben kann. Damit $N_{h+1} = -\frac{M_h - N_h}{2}$ werde, muss U_h in einem unendlich kleinen Theile der Oberfläche, in dem der Punkt liegt, für den $U_{h+1} = N_{h+1}$ ist, $= N_h$, in allen übrigen Punkten der Oberfläche $= M_h$ sein. (Ausnahme die der vorher genannten analog ist.) Diesen beiden Bedingungen kann gleichzeitig nicht genügt werden, auch nicht bis auf unendlich kleine Abweichungen; eine der beiden Grössen M_{h+1}, N_{h+1} muss daher von ihrer

Grenze oder beide müssen von ihren Grenzen um Endliches abweichen; in jedem Falle muss also $M_{h+1} - N_{h+1}$ um etwas endliches kleiner sein als $M_h - N_h$. Da diese beiden Differenzen positiv sind, so muss es hiernach eine von der Gestalt der Oberfläche abhängige Grösse ε geben, die ein positiver echter Bruch und um etwas Endliches kleiner als 1 ist, die die Eigenschaft hat, dass

$$M_{h+1} - N_{h+1} \quad \text{zwischen } 0 \text{ und } \quad \varepsilon(M_h - N_h)$$

liegt.[1]

Nennt man M den grössten, N den kleinsten der gegebenen Werthe von U, so liegt hiernach

$$M_h - N_h \quad \text{zwischen } 0 \text{ und } \quad \varepsilon^h(M - N)$$

und also

$$U_{h+1} \quad \text{zwischen} \quad \pm \varepsilon^h \frac{M - N}{2}.$$

Auf bekannte Weise folgt hieraus die Convergenz der Reihe

$$U + U_1 + U_2 + \dots.$$

---

[1] Es könnte scheinen, als ob ε, ausser von der Gestalt der Oberfläche, auch von den Werthen von M_h und N_h abhänge. Dem ist aber nicht so, wie man leicht einsieht. Wenn man nämlich U_h durch $\alpha U_h + \beta$, wo α, β Constanten bedeuten, ersetzte, so würde auch U_{h+1} in $\alpha U_{h+1} + \beta$ übergehen; es würde also

$$\frac{M_{h+1} - N_{h+1}}{M_h - N_h}$$

ungeändert bleiben. Dadurch aber dass man über die Constanten α und β passend verfügt, kann man M_h und N_h auf beliebig gegebene Werthe reduzieren.

Der Redaktions-Sekretär. (E. PHRAGMÉN.)