EXPRESSION COMPLÈTE ET SIGNIFICATION VÉRITABLE DE LA NUTATION INITIALE.

DÉMONSTRATION QUI EN RÉSULTE DE LA FLUIDITÉ INTÉRIEURE DU GLOBE. CONSÉQUENCES ANALYTIQUES DE CELLE-CI DANS LES FORMULES DE L'ASTRONOMIE.

PAR

F. FOLIE

À BRUXELLES.

Il est une question d'analyse que tous les géomètres qui se sont occupés de l'étude du mouvement de rotation de la terre ont correctement traitée depuis EULER, LAPLACE, BESSEL, POISSON, SERRET, etc., mais que les astronomes avaient négligée pendant longtemps.

C'est celle de la nutation qui provient des constantes arbitraires que l'intégration introduit dans les équations du mouvement de rotation de la terre, nutation qui serait nulle dans le cas seulement où la terre aurait tourné primitivement autour d'un axe principal.

BESSEL le premier, W. STRUVE ensuite, ont commencé à se préoccuper de cette question au point de vue astronomique.

Et PETERS a très exactement déterminé deux des constantes de cette nutation, au moyen de la série de ses observations sur la hauteur du pôle à Poulkova pendant les années 1841—1844. Plusieurs autres astronomes, parmi lesquels il faut citer surtout NYRÉN, DOWNING et, tout récemment, VAN DE SANDE BACKHUYZEN, ont réussi à déterminer également ces constantes avec une assez grande exactitude.

Seulement, depuis que la question de cette nutation, qu'on appelle quelquefois *eulérienne,* et que j'appellerai *initiale* parce qu'elle dépend des conditions initiales du mouvement de rotation de la terre, est entrée dans le domaine pratique, il est arrivé que les astronomes ne se sont plus préoccupés du caractère diurne attribué par tous les géomètres à cette nutation, et que quelques-uns ont même été jusqu'à contester ce caractère.

Il se manifeste cependant d'une manière tellement évidente dans les formules, que l'on a quelque peine à concevoir que des astronomes-géomètres aient pu l'oublier; aucun astronome même n'a songé à profiter du caractère diurne de cette nutation pour en déterminer les constantes, ce qui est cependant la voie la plus simple et la plus sûre, comme nous le verrons.

Laplace avait signalé très nettement ce caractère dans les termes suivants:

On voit que, si G (coefficient de la nutation initiale) *était sensible, on le reconnaîtrait par les variations journalières de la hauteur du pôle.*

C'est Oppolzer qui a, le premier, contredit cette assertion du grand géomètre, en mettant en lumière, du même coup, la raison pour laquelle les astronomes ont oublié le caractère diurne de la nutation initiale dans les déterminations qu'ils ont faites de celle-ci.

Après en avoir donné correctement les formules, l'astronome viennois détermine la position de l'axe instantané de rotation par rapport au petit axe de l'ellipsoïde terrestre, et conclut, très correctement aussi, en ces termes: »On voit donc que l'axe instantané de rotation décrit, autour de l'axe de la terre, une surface conique dont l'angle d'ouverture γ_0' est déterminé par

$$\sin \gamma_0' = \frac{m}{\omega_0};$$

le sens de la rotation est celui de la terre, puisque μ est positif; la révolution est complète après un temps $= \frac{2\pi}{\mu}$. Pour μ, on a posé précédemment:

$$\mu = n \frac{C - A}{A};$$

de sorte que, n représentant la vitesse angulaire de rotation de la terre, μ dépend essentiellement de la différence qui existe entre le rapport des moments d'inertie $(C:A)$ et l'unité. Dans la suite de nos recherches, nous aurons l'occasion de déduire ces coefficients des observations (comp. p. 182); le rayon étant pris comme unité, on trouve:

$$\mu = 0.0206141,$$

et pour la durée d'un tour

$$\frac{2\pi}{\mu} = 304.80 \text{ jours solaires moyens.»}$$

Après avoir parlé des déterminations de PETERS, NYRÉN et DOWNING, il ajoute: »Cependant, il découle de recherches antérieures sur les latitudes que, même dans le cas où ξ_0 et η_0 atteindraient de grandes valeurs, il n'en résulterait encore pour les latitudes que des variations périodiques d'une période d'environ 10 mois.»[1]

Il n'y aurait rien à objecter à cette affirmation (puisque OPPOLZER entend par latitude l'inclinaison de la verticale sur le plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation[2]) si elle ne semblait écrite pour contredire celle de LAPLACE que j'ai citée ci-dessus.

Et c'est bien dans ce sens que l'ont entendu plusieurs astronomes. M. RADAU a été jusqu'à dire que »l'expression de LAPLACE ne devait pas être prise au pied de la lettre»,[3] et TISSERAND lui-même a fait siennes les objections de M. RADAU contre ma manière de voir, qui est absolument celle de LAPLACE.[3]

C'est à l'occasion de mes recherches sur la *nutation diurne* que j'ai été amené à m'occuper de la *nutation initiale.* La période de la première est de 12^h, celle de la seconde, de 24^h presque exactement.

Il est impossible de déterminer la première si l'on ne connaît la seconde; mais celle-ci, au contraire, peut aisément se déterminer indépendamment de la première, comme on va le voir par l'expression même des formules auxquelles conduit l'intégration des équations du mouvement de rotation de la terre.

En désignant par A, B, C ses moments d'inertie principaux écrits dans l'ordre ascendant, par θ l'inclinaison de l'axe de C, que j'appellerai

---

[1] OPPOLZER, *Traité de la détermination des orbites,* trad. PASQUIER, p. 151.

[2] l. c., p. 150.

[3] Bulletin astronomique. 1890.

axe géographique, sur l'axe de l'écliptique fixe, ou celle de l'équateur géographique sur l'écliptique fixe, par s_1 le sinus de cette inclinaison, par λ l'angle que l'intersection de ces deux plans fait avec l'axe vernal fixe, par φ l'angle que l'axe de A fait avec cette même intersection, le dernier angle φ étant compté dans le sens du mouvement de rotation, l'autre, λ, en sens inverse, j'ai déduit des équations du mouvement de rotation de la terre, en admettant d'abord que la vitesse angulaire n autour de l'axe géographique est constante:

$$\Delta\theta = -\gamma\left\{\sin(n\iota t + \varphi + \beta_0) - \frac{\varkappa}{2+\varkappa}\sin(n\iota t - \varphi + \beta_0)\right\}$$

$$+ \eta\{\cos 2\varphi\Sigma_1 + \sin 2\varphi\Sigma_2\} + N\Sigma_1',$$

$$s_1\Delta\lambda = -\gamma\left\{\cos(n\iota t + \varphi + \beta_0) + \frac{\varkappa}{2+\varkappa}\cos(n\iota t - \varphi + \beta_0)\right\}$$

$$+ \eta\{\cos 2\varphi\Sigma_2 - \sin 2\varphi\Sigma_1\} + N\Sigma_2' + p.$$

Dans ces expressions, γ et β_0 sont les constantes arbitraires; η, N, p des constantes dont il est superflu que nous donnions ici l'expression complète; il suffit que nous sachions qu'elles dépendent des moments d'inertie de la terre. ι et $\varkappa$ représentent respectivement $\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}$ et $\frac{1}{4}\frac{(B-A)(B+A-C)}{B(C-B)}$. Tous les géomètres ayant supposé $A=B$, ont omis les termes en $\varkappa$.

Les symboles Σ_1, Σ_1', Σ_2, Σ_2' désignent des fonctions déterminées, les deux premiers, des cosinus, les deux autres, des sinus des arguments ☊, ☉, ☾ etc.

φ est égal à $nt + L$, t désignant le temps sidéral de l'observation, L la longitude orientale du *premier méridien,* passant par l'axe du moment A.

$n\iota t + \varphi + \beta_0$ peut donc se remplacer par $n(1+\iota)t + L + \beta_0$, que nous écrirons simplement $It + \beta$.

Nous aurons ultérieurement de graves réserves à faire quant à la constance du facteur N, lorsqu'au lieu du mouvement de rotation de la terre, considérée comme un corps solide, nous nous occuperons de celui de son écorce, en supposant qu'elle se meut plus ou moins librement sur la partie superficielle fluide du noyau.

Avant d'aller plus loin, insistons sur la signification géométrique des formules précédentes.

Elles se rapportent, comme il vient d'être dit, à l'axe (axe du monde de LAPLACE) et à l'équateur géographiques, et non à l'axe et à l'équateur instantanés.

Ce dernier axe se déplace à la surface de la terre pendant une période qui, nous le verrons, est de 336.5 jours, et non de 305.

Le méridien *astronomique* est donc variable, comme BESSEL l'a déjà fait remarquer, tandis que le méridien *géographique* est fixe.

Mais ce n'est pas un méridien variable qui peut servir à définir l'heure, ni l'ascension droite.

Nous supposerons donc l'ascension droite et la déclinaison rapportées à l'équateur géographique. La hauteur du pôle sera aussi, pour nous comme pour LAPLACE, celle du pôle géographique; et, lorsque nous emploierons le terme de latitude, nous y ajouterons, pour éviter toute amphibologie, le qualificatif *astronomique,* attribuant ainsi à la latitude, le sens que lui a donné OPPOLZER.

Discutons maintenant les équations que nous venons de poser.

On y voit clairement indiqués quatre mouvements essentiellement différents de l'axe du monde:

le premier uniforme, provenant de la constante p, et appelé précession; les trois autres périodiques, appelés nutation d'une manière générale.

J'ai nommé ci-dessus *nutation initiale* le premier de ces mouvements, dont la période est presque exactement de 1 jour sidéral.

J'ai nommé *nutation diurne* le second, dont la période est de $^1/_2$ jour sidéral, et *nutation annuelle* enfin le troisième, qui se compose en réalité d'un grand nombre de mouvements dont les périodes sont d'un an, ou d'une fraction plus ou moins grande de l'année, et peuvent même aller jusqu'à 18 ans.

Faisant abstraction de la précession, nous allons rechercher comment on pourra le mieux déterminer les trois nutations qui viennent d'être définies.

Le mouvement de l'équateur, dû à ces trois nutations, a pour effet de produire des variations correspondantes dans l'ascension droite et la déclinaison des étoiles.

On sait que ces variations se déduisent des précédentes au moyen des formules:

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta) s_1 \frac{d\lambda}{dt} - \cos\alpha \operatorname{tg}\delta \frac{d\theta}{dt};$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \cos\alpha s_1 \frac{d\lambda}{dt} + \sin\alpha \frac{d\theta}{dt}.$$

Afin de ne pas sortir de notre sujet, nous supposerons ici que l'on peut se borner à intégrer en écrivant simplement

$$\Delta\alpha = (\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta) s_1 \Delta\lambda - \cos\alpha \operatorname{tg}\delta \Delta\theta,$$

$$\Delta\delta = \cos\alpha s_1 \Delta\lambda + \sin\alpha \Delta\theta,$$

ce qui est, en effet, d'une rigueur absolument suffisante en pratique quant à la nutation initiale, sur laquelle nous portons spécialement notre attention.

L'incorrection de ce procédé d'intégration, en ce qui concerne les termes annuels, disparaîtra dans la suite de cette exposition, parce que ces termes s'élimineront.

On pourra donc écrire la nutation complète en ascension droite et en déclinaison, en négligeant provisoirement les termes en x:

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha = {} & \gamma\{\cos\alpha \operatorname{tg}\delta \sin(It + \beta) - (\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)\cos(It + \beta)\} \\
& + \eta\{(\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)(\cos 2\varphi\Sigma_2 - \sin 2\varphi\Sigma_1) \\
& \qquad - \cos\alpha \operatorname{tg}\delta(\cos 2\varphi\Sigma_1 + \sin 2\varphi\Sigma_2)\} \\
& + N\{(\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)\Sigma_2' - \cos\alpha \operatorname{tg}\delta \Sigma_1'\}, \\
\Delta\delta = {} & -\gamma\cos(It + \beta - \alpha) + \eta\{\cos\alpha(\cos 2\varphi\Sigma_2 - \sin 2\varphi\Sigma_1) \\
& \qquad + \sin\alpha(\cos 2\varphi\Sigma_1 + \sin 2\varphi\Sigma_2)\} \\
& + N\{\cos\alpha\Sigma_2' + \sin\alpha\Sigma_1'\}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons profiter du caractère diurne de la nutation initiale, pour en déterminer les constantes, abstraction faite de toute erreur de réduction.

Commençons par le procédé dont PETERS et DOWNING ont fait usage pour déterminer celles de la variation de la latitude astronomique, qui sont, au fond, les mêmes que celles de la nutation initiale.

En désignant par Φ cette latitude, par δ la déclinaison apparente d'une étoile rapportée à l'équateur *astronomique,* par Z la distance zénitale observée, corrigée de la réfraction, ces astronomes ont écrit, pour le cas d'un passage supérieur

$$Z_s = \Phi - \delta$$

et pour le cas d'un passage inférieur

$$180^\circ - Z_i = \Phi + \delta,$$

et ils ont considéré la latitude astronomique comme une quantité variable déterminée, en fonction de la hauteur Φ_0 du pôle par

$$\Phi = \Phi_0 + \gamma \cos(nt + \beta).$$

Cette manière de voir est absolument correcte; mais elle a le tort de masquer complètement le caractère diurne de la nutation initiale, et elle explique que plusieurs astronomes aient pu nier ce caractère; elle présente, de plus, ce grave inconvénient théorique qu'il n'existe pas de formules correctes propres à déterminer la déclinaison rapportée à l'équateur *astronomique.* Celles de la mécanique céleste sont relatives, on vient de le voir, à l'équateur géographique.

OPPOLZER a bien démontré que l'on peut, *sans erreur sensible,* appliquer ces formules à l'équateur astronomique.

Mais, trop exclusivement pénétré de cette idée juste que c'est autour de l'axe instantané que tourne la terre, et non autour de l'axe géographique (axe du monde de LAPLACE), il a perdu de vue que c'est le méridien géographique *seul* qui peut servir à définir l'heure et l'ascension droite.

Pour être tout à fait logique, il eût dû chercher à définir celles-ci au moyen de la notion du méridien astronomique passant par l'axe instantané.

Mais alors il se fût aperçu que sa définition de l'heure sidérale ne concordait plus avec celle des astronomes, et l'eût certainement abandonnée. Car il ne se serait certes pas contenté de dire que les variations du méridien astronomique d'un jour à l'autre sont tellement faibles qu'on peut les négliger *sans erreur sensible.*

De négligence en négligence, que deviendrait donc l'exactitude mathématique que l'on est en droit d'exiger, autant qu'elle peut être atteinte, des formules de la mécanique céleste, de celles surtout qui sont relatives à l'invariabilité du jour sidéral?

Or les formules employées par tous les géomètres, même les plus récents, OPPOLZER seul excepté, et relatives à l'équateur et au méridien géographiques, sont absolument correctes.

Si l'on m'objecte, pour justifier OPPOLZER, qu'elles ne sont pas applicables aux observations astronomiques, puisque celles-ci sont souvent faites dans le méridien astronomique, je n'ai qu'une chose à répondre; c'est que les astronomes qui procèdent ainsi ont tort, et que les seules observations qui puissent conduire à des résultats corrects par l'emploi de formules correctes sont celles faites dans le méridien géographique, qui, étant fixe, peut être déterminé une fois pour toutes par une bonne série d'observations, et est le seul qui puisse définir et donner exactement l'heure sidérale.

Donc, puisque les formules de la nutation se rapportent à l'axe du monde, et non à l'axe instantané de rotation, on doit écrire, d'une manière absolument rigoureuse, en appelant δ_m la déclinaison de l'étoile rapportée à la position moyenne de l'équateur géographique pour l'instant de l'observation, dans le cas d'un passage supérieur, puisqu'alors $nt = \alpha$ et $It + \beta - \alpha = nt + \beta$:

$$\begin{aligned} Z_s = \Phi_0 - \delta_m &+ \gamma \cos(nt + \beta) \\ &- \eta\{(\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)(\cos 2\varphi\Sigma_2 - \sin 2\varphi\Sigma_1) \\ &\qquad\qquad - \cos\alpha \operatorname{tg}\delta(\cos 2\varphi\Sigma_1 + \sin 2\varphi\Sigma_2)\} \\ &- N\{(\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)\Sigma_2' - \cos\alpha \operatorname{tg}\delta\Sigma_1'\}; \end{aligned}$$

et, dans le cas d'un passage inférieur, pour lequel $nt = \pi + \alpha$:

$$\begin{aligned} 180^\circ - Z_i &= \Phi_0 + \delta_m + \gamma\cos(nt + \beta) \\ &+ \eta\{(\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)(\cos 2\varphi\Sigma_2 - \sin 2\varphi\Sigma_1) - \cos\alpha \operatorname{tg}\delta(\cos 2\varphi\Sigma_1 + \sin 2\varphi\Sigma_2)\} \\ &+ N\{(\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)\Sigma_2' - \cos\alpha \operatorname{tg}\delta\Sigma_1'\}. \end{aligned}$$

Au sujet des termes de la nutation diurne, nous ferons remarquer d'abord que, puisqu'ils ont pour argument principal 2φ, la variation de cet argument, d'un passage supérieur au passage inférieur consécutif, ou vice versa, est sans conséquence, puisqu'il aura augmenté de 2π.

Et quant aux autres arguments, soit de la nutation, soit de l'aberration, on peut admettre, sans erreur sensible, qu'ils n'ont pas subi de variation d'un passage à l'autre; on pourra, du reste, effectuer rigoureusement le calcul pour les étoiles voisines du pôle; mais nous pouvons passer sur ce détail.

Cela posé, si l'on fait la demi-somme des deux équations précédentes, on obtient simplement

$$\frac{Z_s - Z_i}{2} + 90^\circ = \Phi_0 + \gamma \cos(nt + \beta).$$

Posant $\Phi_0 = \Phi_0' + z$, Φ_0' désignant la hauteur du pôle adoptée, z sa correction; et $\frac{Z_s - Z_i}{2} + 90^\circ - \Phi_0' = r$, on aura

$$r = z + \gamma \cos(nt + \beta),$$

ou, en faisant

$$\gamma \sin\beta = x, \qquad \gamma \cos\beta = y:$$

$$r = z + y \cos nt - x \sin nt,$$

équations d'où l'on pourra déduire, au moyen d'une série d'observations de passages supérieurs et inférieurs consécutifs, les inconnues z, y, x, donc γ et β, *indépendamment de toute erreur de réduction et même de position de l'étoile.*

Nous indiquerons ultérieurement quelques résultats que cette méthode nous a fournis.

Mais auparavant, il importe de montrer qu'on peut avantageusement faire usage également du caractère diurne de la nutation initiale, pour déterminer ses constantes au moyen des ascensions droites des étoiles, procédé dont il n'avait pas encore été fait usage.

Nous pourrons nous borner ici à considérer les seuls termes de la nutation initiale, le raisonnement que nous avons fait précédemment quant à tous les autres termes de réduction au lieu apparent étant applicable également dans ce cas-ci.

A l'ascension droite apparente, telle que les astronomes la calculent habituellement en négligeant la nutation initiale, il faut donc ajouter pour un passage supérieur,

$$\Delta\alpha_s = \gamma\{\cos\alpha \operatorname{tg}\delta \sin(nt + \alpha + \beta) - (\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)\cos(nt + \alpha + \beta)\}$$
$$= \gamma\{\operatorname{tg}\delta \sin(nt + \beta) - \cot\varepsilon \cos(nt + \alpha + \beta)\};$$

et, pour un passage inférieur, puisque It augmente de π:

$$\Delta\alpha_i = -\gamma\{\operatorname{tg}\delta \sin(nt + \beta) - \cot\varepsilon \cos(nt + \alpha + \beta)\}.$$

Comme les autres termes de réduction sont égaux, à très peu près, pour deux passages consécutifs, il existera, du chef de la nutation initiale, entre les ascensions droites observées à ces deux passages, une différence [1]

$$\Delta^2\alpha = \pm\, 2\gamma \cot\varepsilon\{\operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\delta \sin(nt + \beta) - \cos(nt + \alpha + \beta)\}.$$

On prendra le signe + ou le signe —, selon que le premier passage observé sera supérieur ou inférieur.

Faisant $2\gamma \cot\varepsilon \sin\beta = x$, $2\gamma \cot\varepsilon \cos\beta = y$, et désignant par τ le facteur $\operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\delta$, on aura

$$\pm\, \Delta^2\alpha = u\{\tau\cos nt + \sin(nt + \alpha)\} + v\{\tau \sin nt - \cos(nt + \alpha)\} = gu + hv.$$

Cette équation, appliquée à une série d'observations de deux passages supérieur et inférieur consécutifs, permettra de déterminer u et v, d'où γ et β.

C'est par cette application aux séries des ascensions droites de la Polaire observées par Struve à Dorpat que j'ai commencé mes déterminations.

J'ai dit ci-dessus qu'elles ont été faites à l'occasion de mes recherches sur la nutation diurne.

Celle-ci, dont je crois avoir démontré l'existence (Annuaire de l'observatoire de Bruxelles pour 1890) n'est possible que si la terre se compose d'une écorce solide se mouvant plus ou moins librement sur un noyau fluide, au moins à sa surface.

---

[1] Afin d'abréger, nous avons négligé ici les 12^h dont le t de la seconde observation diffère de celui de la première, ce qui est sans conséquence. Il est fort aisé, du reste, de tenir compte de cette différence.

Telle était donc, pour moi, la constitution de la terre.

Mais alors, c'est du mouvement de l'écorce, et non du mouvement du globe, que le géomètre doit s'occuper; et les moments d'inertie A, B, C sont ceux de la première, non ceux du second.

Or dans les mouvements à très longue période, l'écorce et le noyau sont solidaires, comme l'a démontré M. RONKAR.[1]

Mais pour tous les autres termes, il n'en est plus ainsi.

Le mouvement de l'écorce s'effectuant en une période qui ne diffère que de $\frac{1}{300}$ environ de celle du mouvement du noyau, il en résulte un mouvement relatif de celle-là sur celui-ci d'une période de 300 jours environ.

Mais, pour une période d'aussi courte durée, on ne peut pas calculer A, B, C pour l'écorce comme pour le noyau.

Aussi avais-je déjà émis des doutes dans le volume de l'Annuaire cité ci-dessus, p. 300, sur l'exactitude de la période de 305 jours calculée, par les astronomes, dans l'hypothèse d'une terre solide.

Afin de me mettre, autant que possible, à l'abri de l'erreur probable sur la période, c'est à dire sur la valeur de $n\iota$, qui doit être connue pour pouvoir résoudre les équations, j'ai pris trois séries d'observations faites pendant les mois de mars, avril et mai seulement des années 1823—24—25.

Elles ont fourni des résultats fort satisfaisants qui me confirmèrent dans mes doutes sur l'exactitude de la période de 305 jours, à laquelle correspondrait un accroissement annuel de β égal à 428°, tandis que je trouvais un accroissement supérieur d'assez peu à 360°.

Une série analogue d'observations de PREUSS, en 1838, a corroboré ces doutes, et m'a permis d'établir la véritable valeur de l'accroissement annuel de β, qui est de 390°.5, ce qui répond à une période de 336.5 jours moyens.

Fait surprenant, ce nouvel accroissement faisait merveilleusement concorder entre elles les déterminations de β faites par PETERS, NYRÉN

---

[1] RONKAR, *Sur l'influence du frottement et des actions mutuelles intérieures dans les mouvements périodiques d'un système,* t. 2 des Mémoires couronnés, publiés par l'Académie royale de Belgique. 1888.

et Downing au moyen de très longues séries d'observations, tandis que toutes ces valeurs étaient discordantes si l'on partait de l'accroissement universellement admis de 428°.

Mes valeurs de la constante γ (0″.08 en moyenne) concordaient également fort bien avec celles qui avaient été trouvées par Peters, Downing, Nyrén et Backhuyzen au moyen des variations de la latitude astronomique.

Mais, comme il ne s'agissait pas ici seulement de la solution d'une question astronomique plus ou moins importante, mais de la solution de cette question autrement grave: la terre est-elle solide, ou non? je ne me suis pas borné aux déterminations précédentes; j'ai appliqué également, aux couples d'observations de la latitude faites par Peters, les formules exposées ci-dessus.

Voici les résultats que m'ont fournies différentes séries, le centième de seconde étant pris pour unité.

			x	y	Poids
1° avril—juin	1842	Or. 1er avril	— 48.8	49.2	60
2° juillet—sept.	»	» 1er juillet	15.4	— 35.4	51
3° mars—avril	1843	» 1er mars	— 35.0	33.1	32
4° sept.—déc.	»	» 1er sept.	— 108.7	75.9	22
5° mars—mai	1844	» 1er avril	41.0	— 15.5	17

Comme l'angle β ne varie pas suffisamment dans l'étendue d'une même série pour qu'on puisse le déterminer d'une manière satisfaisante au moyen de celle-ci, nous combinerons la première série (la plus longue) avec chacune des autres, en supposant que l'angle β subisse l'accroissement annuel que nous avons déterminé de 390°.5.

Si l'on désigne par x et y les valeurs des inconnues, trouvées par l'une quelconque des séries 2°—5°, et ramenées au 1er avril 1842, par A l'accroissement de l'angle β de cette première origine à celle de la série considérée, par x_n, y_n les valeurs pour cette dernière origine, on aura très simplement

$$x = x_n \cos A - y_n \sin A,$$

$$y = x_n \sin A + y_n \cos A.$$

L'application de ces équations à chacunes des séries 2°—5° a donné

	x	y	poids
2°	33.4	19.3	51
3°	—33.8	34.2	32
4°	123.2	—48.9	22
5°	33.4	28.3	17

Et de ces valeurs, combinées respectivement avec les valeurs

1°	—48.8	49.2	60

on tire enfin, en calculant maintenant β par $\operatorname{tg}\beta = \frac{x}{y}$:

—11.3	35.5	111	342°.7
—43.6	44.0	92	315 .2
— 6.66	22.9	82	353 .4
—30.6	44.6	77	325 .5.

On voit, dans la concordance des valeurs de β entre elles, la confirmation de l'exactitude et de la constance de la période que nous avons assignée à la nutation initiale.

A peine est-il besoin d'ajouter que l'application de la période de 305 jours, ou de l'accroissement annuel correspondant de 428°, eût conduit à des résultats absolument discordants.

Les précédents s'écartent encore quelque peu de celui que PETERS a déduit de l'ensemble de ses observations. Mais il faut considérer que les séries que nous avons employées sont peu nombreuses, que la détermination des latitudes est bien moins propre que celle des ascensions droites à la détermination d'une quantité aussi faible que la nutation initiale, que celle-ci enfin n'est pas encore connue d'une manière complète, comme il sera dit ci-dessous.

Les séries des observations consécutives de GYLDÉN et de NYRÉN étaient beaucoup moins nombreuses encore. Aussi n'ont-elles pas donné un résultat satisfaisant, quant à la détermination de l'angle β. Par contre, la combinaison de tous leurs couples d'observations nous a conduit à une valeur de γ égale à 0''.09, qui diffère bien peu de celle que nous avons trouvée par les observations des passages de la Polaire de STRUVE.

Comparons maintenant les meilleures déterminations qui ont été faites de l'angle β aux résultats que fournit l'application de notre période.

Ces valeurs sont naturellement toutes ramenées à Poulkova.

Origine		Observations	Autorité	β observée	β calculée	O—C
1er janv.	1824	Polaire (Dorpat)	F. F.	151°.2		
»	1842	Latitude (Poulkova)	PETERS	341°.6	340°.2	1°.4
»	1850	Pr. vert. (Poulkova)	NYRÉN	224°	224°.2	—0°.2
»	1872	Latitude (Greenw.)	DOWNING	175°.2	175°.2	0°.0

On peut donc actuellement considérer deux des constantes de la nutation initiale comme exactement déterminées. Ces constantes sont

$$\gamma = 0''.08; \qquad \beta = 4^\circ \text{ (1890.0 Poulkova)}.$$

Et, de plus, la non-solidité de la terre est démontrée.

Ces résultats ont été établis, comme on vient de le voir, grâce surtout au caractère diurne de cette nutation, qui avait été laissé dans l'oubli par les astronomes, et qui a permis de la déterminer indépendamment de toutes les erreurs de réduction.

Tout n'est pas dit encore, toutefois, sur la nutation initiale. Et il est très possible que mes recherches ultérieures sur ce sujet me conduisent à démontrer *à priori* l'existence de la nutation diurne.

Jusqu'ici elle ne peut être considérée que comme très probable.

La fluidité intérieure superficielle du globe n'entraîne, en effet, la nécessité de la nutation diurne que si $\frac{B-A}{C}$ est assez différent de zéro pour l'écorce, fait qu'on ne pourrait affirmer.

Mais si l'on peut le démontrer autrement que par la détermination même des constantes de la nutation diurne, l'existence de celle-ci sera prouvée à priori. Or, comme je l'ai dit ci-dessus, il existe dans l'expression de la nutation initiale un second terme, qui à été négligé par tous les astronomes, et que j'ai commencé par négliger moi-même, quoiqu'il figure dans mes formules comme dans celles de LAPLACE.[1]

[1] Voici la note que j'ai insérée à ce sujet dans mon Traité des réductions stellaires: Dans la pratique, on est astreint à poser $x = 0$, vu l'ignorance où l'on se trouve quant à la valeur de $B - A$, qui est certainement très petite.

C'est à la négligence de ce terme, me suis-je dit, que sont dues peut être les discordances que j'ai signalées ci-dessus dans les résultats déduits des séries d'observations de PETERS, de GYLDÉN et de NYRÉN.

Et je me propose de rechercher ultérieurement si ces discordances ne disparaîtront pas en faisant usage de l'expression complète de la nutation initiale, au lieu de se borner à n'en considérer que le premier terme.

Si l'on désigne par l et m les vitesses angulaires de l'écorce terrestre autour des axes des moments A et B, les parties de ces vitesses qui proviennent des conditions initiales du mouvement seront

$$l = \alpha_1 \cos(n\iota t + \beta_1),$$

$$m = \alpha_1 \sqrt{\frac{Aa}{Bb}} \sin(n\iota t + \beta_1),$$

n étant la vitesse angulaire autour de l'axe de C, supposée constante, ι, a et b représentant respectivement $\sqrt{\frac{ab}{AB}}$, $C - A$ et $C - B$.

Bornons-nous à considérer ici la variation qui en résulte en obliquité:

$$\frac{d\theta}{dt} = - l \cos\varphi + m \sin\varphi,$$

où φ est $nt + L$, et L la longitude du premier méridien, passant par l'axe du moment A; nous trouverons, en posant $\sqrt{\frac{Aa}{Bb}} = 1 + x$:

$$\frac{d\theta}{dt} = - \alpha_1 \left\{ \left(1 + \frac{x}{2}\right) \sin(n\iota t + nt + \beta_1 + L) - \frac{x}{2} \sin(n\iota t - nt + \beta_1 - L) \right\}.$$

La présence de nt montre que $\frac{d\theta}{dt}$ change de signe d'un passage supérieur au passage inférieur consécutif dans le méridien *géographique*.

Occupons-nous donc seulement du passage supérieur; nous ferons $nt = \alpha$, et, de plus, $\beta_1 + L = \beta$, d'où $\beta_1 - L = \beta - 2L$, ce qui donnera

$$\frac{d\theta}{dt} = - \alpha_1 \left\{ \left(1 + \frac{x}{2}\right) \sin(n\iota t + \alpha + \beta) - \frac{x}{2} \sin(n\iota t - \alpha + \beta - 2L) \right\}.$$

On n'a fait usage jusqu'ici que du premier terme de cette expression, en négligeant x.

Mais x est-il négligeable?

Nous ne le pensons pas.

Le développement de son expression donne

$$A(C - A) = B(C - B)\{1 + 2x + x^2\},$$

d'où

$$(B - A)(B + A - C) = 2B(C - B)x\left(1 + \frac{x}{2}\right),$$

et

$$2x\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{B - A}{C - B}\left\{1 - \frac{C - A}{B}\right\}.$$

Or, nous ne pensons pas que la fraction $\frac{B - A}{C - B}$ soit insensible, pour l'écorce terrestre surtout.

Si elle ne l'est pas, il y a lieu de rechercher quel est le second terme de la nutation initiale, dont aucun astronome ne s'est occupé.

Et si l'observation donne, pour ce second terme, une valeur appréciable, peut-être alors les discordances signalées ci-dessus disparaîtront-elles, mais surtout l'existence de la nutation diurne sera prouvée à priori.

Les coefficients η et N de la nutation diurne et de la nutation annuelle qui figurent ci-dessus, p. 368, sont entre eux dans le rapport

$$\frac{\eta}{N} = \frac{(B - A)(B + A - C)}{(B + A)(B - A + C)},$$

ou, puisque

$$(B - A)(B + A - C) = 2B(C - B)x\left(1 + \frac{x}{2}\right),$$

dans le rapport

$$\frac{\eta}{N} = 2x\left(1 + \frac{x}{2}\right)\frac{B(C - B)}{(B + A)(C + B - A)}.$$

Si donc $2x\left(1 + \frac{x}{2}\right)$ est appréciable dans la nutation initiale, $\frac{\eta}{N}$ le sera également.

Et, comme le mouvement de l'écorce est beaucoup plus indépendant de celui du noyau dans la nutation diurne que dans la nutation initiale, la première sera sensible si x l'est dans la seconde.

A ceci ne se bornent pas les conséquences analytiques de la fluidité intérieure du globe.

Et l'on va voir de combien de points, restés jusqu'ici obscurs, rend compte cette circonstance, dont aucun géomètre ne s'était encore occupé.

Mais auparavant, il est nécessaire que nous exposions d'abord, d'une manière un peu plus détaillée que nous ne l'avons fait ci-dessus, les résultats auxquels l'analyse est arrivée dans l'étude des mouvements périodiques d'un système de points matériels soumis à des forces extérieures en même temps qu'au frottement et aux actions mutuelles de ces points les uns sur les autres.

Ces résultats, établis par M. RONKAR,[1] sont les suivants:

Dans un semblable système,

1° les mouvements à très longue période s'effectuent comme si tous les points étaient solidaires;

2° les mouvements à très courte période, comme si tous ces points étaient indépendants les uns des autres;

3° dans les mouvements à période intermédiaire, il n'y a ni indépendance ni solidarité absolues entre les différents points du système.[2]

Appliquons ces résultats au globe terrestre supposé constitué d'un noyau solide recouvert d'une couche fluide, et celle-ci d'une écorce également solide.

La précession, qui est un mouvement à très longue période, s'effectuera comme si la terre était solide; c'est-à-dire que les moments d'inertie A, B, C, qui entrent dans l'expression de sa constante, seront ceux de la terre entière.

La nutation diurne, dont la période est d'un demi jour sidéral seulement, s'effectuera à peu près comme si l'écorce était indépendante du noyau; c'est-à-dire que les moments A_1, B_1, C_1 qui entrent dans l'expression de sa constante, seront ceux de l'écorce solide. Quant à la nutation initiale, la question doit être examinée de plus près.

Cette nutation consiste en un mouvement de l'axe géographique du

[1] RONKAR *Sur l'influence du frottement et des actions mutuelles intérieures dans les mouvements périodiques d'un système,* t. 2 des Mémoires couronnés, publiés par l'Acad. roy. de Belgique. 1888.

[2] Ce point capital est corroboré par la haute autorité de Sir W. THOMSON, qui a dit:

»En la supposant rigide, l'écorce entraînerait complètement le noyau dans les oscillations à longues périodes, telles que la précession; mais les nutations à courte période (notamment celles de six mois et de quatorze jours) seraient fort altérées si non dénaturées.» (TISSERAND, Méc. Cél. t. 2, p. 480.)

monde, composé de deux parties dont les périodes sont respectivement $\frac{2\pi}{n(1+\iota)}$ et $\frac{2\pi}{n(1-\iota)}$.

En même temps donc que la terre effectue son mouvement de rotation autour de l'axe instantané en une période égale à $\frac{2\pi}{n}$, l'axe géographique a un double mouvement dont les périodes diffèrent très peu de celle-ci. Il en résulte chaque jour un faible déplacement du pôle géographique par rapport au pôle instantané; ou, puisque le pôle géographique peut être considéré comme fixe sur la terre, on peut dire que le pôle instantané se déplace autour de celui-ci, et nous avons vu que l'observation assigne a ce mouvement une période de 336.5 jours moyens.

Telle est donc, en réalité, la période du mouvement relatif de l'écorce sur le noyau dans la nutation initiale, quoique la période du mouvement absolu qu'elle produit soit d'un jour sidéral environ.

Cette période de 336.5 jours approche très fort de celle des termes de la nutation qui dépendent de la simple longitude du soleil.

Tous les astronomes et géomètres, même dans les Traités les plus récents, l'ont calculée dans l'hypothèse d'une terre solide, et l'ont donnée comme égale à $\frac{2\pi}{n}\frac{A}{C-A} = 305$ jours sidéraux, en adoptant pour $\frac{A}{C-A}$ la valeur qui résulte des constantes de la précession et de la nutation.

Or, comme nous l'avons dit ci-dessus, si dans le mouvement de précession et peut-être dans celui qui dépend du noeud de la Lune, l'écorce peut être considérée comme solidaire avec le noyau, il n'en est pas de même dans les mouvements à période intermédiaire.

Pour ces derniers les valeurs $\frac{A'}{C'}, \frac{B'}{C'}$ sont intermédiaires entre les valeurs $\frac{A}{C}, \frac{B}{C}$ trouvées pour la terre entière et les valeurs $\frac{A_1}{C_1}, \frac{B_1}{C_1}$ applicables à l'écorce seule, c'est-à-dire aux mouvements à très courte période, comme la nutation diurne.

L'observation m'a démontré que, dans le mouvement relatif d'une période de 11 mois produit par la nutation initiale, $\frac{A'}{C'-A'} = 336.5$ jours moyens $= 337.4$ jours sidéraux. On a donc

$$\frac{C'-A'}{A'} = \frac{C-A}{A}.\frac{305}{337.4} = 0.9\frac{C-A}{A}.$$

Or ce coefficient $\frac{C-A}{A}$, que nous avons représenté ci-dessus par N, figure dans tous les termes de la précession et de la nutation. Pour la première il peut se calculer en rapportant A et C à la terre entière, et nous admettrons qu'il en est de même pour le second.

Mais nous venons de voir qu'il n'en est plus de même pour des termes d'une période de 11 mois; à plus forte raison pour ceux d'une période de 6 mois, d'un mois et moins encore.

Tous les termes solaires et lunaires de la nutation, que les astronomes ont calculés au moyen de la valeur $\frac{C-A}{A}$ rapportée à la terre solide, sont donc fautifs.

Il n'est pas possible actuellement à la théorie de déterminer dans quel rapport $\frac{C-A}{A}$ doit être modifié pour ces différents termes, et c'est à l'observation que s'impose cette recherche excessivement laborieuse.

S'il est permis de conclure par analogie, le coefficient des termes annuels de la nutation devra être réduit de 0.1 de sa valeur; mais quant aux termes en $2\odot$, la réduction sera peut être encore plus considérable.

Tirons maintenant quelques conséquences frappantes des prémisses que nous venons de poser.

Rappelons d'abord que les astronomes n'ont encore tenu aucun compte, dans leurs réductions, de la nutation initiale, dont la période est, pour les observations méridiennes, de 336.5 jours moyens, c'est-à-dire approche d'assez près de l'année;

qu'ils ont employé un coefficient fautif pour les termes solaires de la nutation (en laissant ici de côté les erreurs sur les termes lunaires, et en admettant qu'elles se compensent dans une longue série d'observations);

qu'ils n'ont tenu aucun compte de la nutation diurne, qui renferme également des termes solaires appréciables.

Quelle confiance avoir, dès lors, dans les déterminations de la constante de l'aberration? Quoi d'étonnant si l'on ne trouve pas, dans ces déterminations, la concordance qu'il serait permis d'attendre d'observations et de réductions bien faites, et si elles ont conduit presque toutes à des parallaxes négatives?

Tout est donc à reprendre à nouveau en astronomie: la théorie du mouvement de rotation de *l'écorce terrestre* en tenant compte du frottement et des réactions intérieures du noyau, et les formules de rotation qui en découlent.

La théorie n'en sera pas faite avant quelques années;[1] et les observations, réduites selon les principes que nous venons d'exposer, dans l'hypothèse de la fluidité intérieure du globe, pourront conduire plus tôt à des résultats satisfaisants.

Elles nous ont déjà démontré cette fluidité intérieure en opposant à la période théorique de 305 jours, calculée dans l'hypothèse de la solidité du globe, une période de 336.5 jours,[2] et elles ont, par là même, établi, avec une probabilité très grande, l'existence de la nutation diurne.

Elles me conduiront peut être très prochainement à la démonstration à priori de cette existence par celle d'un second terme de la nutation initiale, négligé par tous les astronomes, parce qu'ils ont fait $B = A$.

Et il nous sera permis de regretter que, dans les traités même les plus récents, on ait omis d'examiner au moins, d'une manière approfondie, l'influence que l'hypothèse de la fluidité intérieure du globe pourrait avoir sur les coefficients des termes de la nutation, malgré les travaux que nous avons publiés sur ce sujet,[3] et qu'on ait même cru pouvoir contester l'existence de la nutation diurne, en en calculant le coefficient comme si la terre était solide!

Bruxelles, 23 juin 1891.

---

[1] Cette question vient d'être mise au concours par l'Académie de Belgique.

[2] Des recherches subséquentes m'ont conduit à admettre une période de 398 jours, qui s'écarte davantage encore de la valeur théorique.

[3] *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde.* 1888.
Traité des réductions stellaires. 1888.
Annuaires de l'observatoire royal de Bruxelles. 1888—1891.
Bulletin de l'Académie royale de Belgique. 1885—1891.
Astronomische Nachrichten. 1889—1890.
Bulletin Astronomique. 1890.