Si, en même temps que β, γ est fonction de α:

$$\gamma = \psi(\alpha) \tag{19}$$

les 3 invariants du 4^{me} ordre sont fonctions de α; M' est définie par les équations (17) et (19). Ici, il y a une infinité de correspondances données par la seule relation

$$\alpha' = \alpha,$$

un point x_0, y_0 de M pouvant correspondre à tout point x', y' de M' satisfaisant à l'équation

$$\alpha'(x', y') = \alpha(x_0, y_0).$$[1]

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

Calcul des invariants. Formes réduites.

1. Le calcul des invariants peut être facilité souvent par l'application d'une nouvelle notion, celle de *forme réduite d'une multiplicité,* relativement à un groupe de LIE.

Considérons un élément particulier E_0 d'une multiplicité M, c'est-à-dire, un système de valeurs $z_1^{00}, \ldots, z_{\rho_0}^{00}, z_1^{10}, \ldots, z_{\rho_1}^{10}, \ldots, z_1^{K0}, \ldots, z_{\rho_K}^{K0}, \ldots,$ des variables indépendantes, des fonctions et de leurs dérivées; et re-

[1] Si l'on admet, ce qu'on verra dans la suite, que les invariants considérés sont les mêmes que ceux que l'on aurait, en prenant un ds^2 sous sa forme générale

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

on retrouve ici la solution du problème suivant: reconnaître si deux surfaces sont applicables. Cf. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces,* t. III, liv. VII, chap. II.

gardons un invariant comme une fonction de ces coordonnées, telle, que la même fonction des coordonnées d'un élément E_0', transformé de E_0, quand on soumet M à une transformation du groupe, ait la même valeur. Les coordonnées de E_0', étant définies par les relations:

$$(C^0) \quad z_i'^{K0} = \varpi_i^K(z_1^{00}, \ldots, z_{\rho_0}^{00}, \ldots, z_1^{K0}, \ldots, z_{\rho_K}^{K0}, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \ldots, \lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K) \atop {(K=1,3,\ldots) \quad (i=1,2,\ldots,\rho_K)}$$

où les λ sont des parametres arbitraires, on peut choisir ces paramètres de façon que certaines des coordonnées de E_0', $z_{\mu_0+1}'^{00}, \ldots, z_{\rho_0}'^{00}, z_{\mu_1+1}'^{10}, \ldots, z_{\rho_1}'^{10}, \ldots, z_{\mu_K+1}^{K0}, \ldots, z_{\rho_K}'^{K0}, \ldots$, prennent des valeurs fixes arbitraires, $c_{\mu_0+1}^0, \ldots, c_{\rho_0}^0, c_{\mu_1+1}^1, \ldots, c_{\rho_1}^1, \ldots, c_{\mu_K+1}^K, \ldots, c_{\rho_K}^K, \ldots$, pourvu au moins que, soit les coordonnées de E_0, soit ces constantes arbitraires, ne satisfassent pas à certaines équations invariantes: cette exception ne pourrait se présenter que soit dans le cas où M serait une *multiplicité particulière,* soit, dans le cas contraire, pour des points particuliers de M. Les autres coordonnées de E_0', sont alors complètement déterminées:

$$z_i'^{K0} = G_i^K(z_1^{00}, \ldots, z_{\rho_0}^{00}, \ldots, z_1^{K0}, \ldots, z_{\rho_K}^{K0}, c_{\mu_0+1}^0, \ldots, c_{\rho_0}^0, \ldots, c_{\mu_K+1}^K, \ldots, c_{\rho_K}^K) \atop {(K=1,2,\ldots) \quad (i=1,2,\ldots,\mu_K)}$$

et leurs valeurs, fonctions des coordonnées de E_0 sont les invariants cherchés. C'est, en effet, la marche que nous avons suivie pour former ces invariants. C'est ce qui résulte aussi de la remarque suivante.

Soit $\mathcal{E}_0$, l'élément transformé de E_0, *élément réduit,* caractérisé par les valeurs constantes $c_{\mu_0+1}^0, \ldots, c_{\rho_0}^0, \ldots, c_{\mu_K+1}^K, \ldots, c_{\rho_K}^K, \ldots$ de certaines de ses coordonnées. La transformation T qui donne

$$E_0 T = \mathcal{E}_0$$

est bien déterminée, et unique au moins dans un domaine fini; elle serait déterminée jusqu'à l'ordre K seulement, si les valeurs des constantes c n'étaient fixées que jusqu'à cet ordre K.

Soit E_0' un élément déduit de E_0 par une transformation quelconque $\mathfrak{T}$; il lui correspond un *élément réduit,* $\mathcal{E}_0'$, et une transformation, T', bien déterminée, telle que:

$$E_0' T' = \mathcal{E}_0'$$

On a donc:

$$E_0 \mathfrak{T}T' = \mathcal{E}'_0.$$

La transformation $\mathfrak{T}T'$ qui fait de E_0 un élément réduit doit donc se confondre avec T (au moins jusqu'à l'ordre K), et $\mathcal{E}'_0$ se confondre de même avec $\mathcal{E}_0$. Les coordonnées non arbitraires de $\mathcal{E}'_0$ ou $\mathcal{E}_0$ s'exprimant de la même manière en fonctions de celles de E'_0 pour le premier, de E_0 pour le second, ces fonctions sont donc bien des invariants.

Ceci montre en outre que, réciproquement, si à un élément E_0 de M correspond un élément réduit $\mathcal{E}_0$, de forme définie, et déduit de E_0 par une transformation *bien déterminée* du groupe, les coordonnées non arbitraires de $\mathcal{E}_0$ sont des invariants, fonctions des coordonnées de E_0. De plus, ces invariants qui, pour

$$z^0_{\mu_0+1} = c^0_{\mu_0+1}, \quad \ldots, \quad z^0_{\rho_0} = c^0_{\rho_0}, \qquad z^1_{\mu_1+1} = c^1_{\mu_1+1}, \quad \ldots, \quad z^1_{\rho_1} = c^1_{\rho_1}, \quad \ldots,$$

se réduisent à $z^0_1, \ldots, z^0_{\mu_0}, z^1_1, \ldots, z^1_{\mu_1}$ sont manifestement distincts: considérés comme solutions du système complet formé à l'aide des transformations infinitésimales, ils constituent un système de *solutions principales* de ce système complet.

Dans le cas où E_0 satisfait à une équation invariante qui ne permet plus la réduction à la forme $\mathcal{E}_0$, il en est de même des éléments transformés E'_0. Alors, il y aura une forme réduite nouvelle, distincte de la précédente, chacune des équations ou systèmes d'équations invariantes qui définissent les multiplicités particulières pouvant correspondre à une forme réduite bien déterminée. Par conséquent:

Théorème I. *A tout groupe de Lie, on peut faire correspondre, pour une multiplicité de dimensions données, un nombre limité de formes réduites, telles que tout élément E_0 d'une telle multiplicité puisse se mettre, à l'aide d'une transformation bien déterminée du groupe, sous l'une de ces formes réduites. Les coordonnées de l'élément réduit $\mathcal{E}_0$ sont, les unes, égales à des constantes fixes, les autres des invariants, fonctions des coordonnées de l'élément initial E_0.*

2. Par exemple, étant donnée une surface, on peut, en effectuant sur elle une transformation bien déterminée du groupe des mouvements:

$$p, \; q, \; r, \; yr - zq, \; zp - xr, \; xq - yp$$

transporter l'un quelconque de ses points à l'origine, son équation dans le voisinage de ce point étant:

$$z = \frac{a_{20}}{2}x^2 + \frac{a_{02}}{2}y^2 + \frac{a_{30}}{6}x^3 + \frac{a_{21}}{2}x^2y + \frac{a_{12}}{2}xy^2 + \frac{a_{03}}{6}y^3 + \dots .$$

Les coefficients de cette forme réduite sont les valeurs des invariants de la surface, en ce point; en particulier, a_{20} et a_{02} sont les inverses des deux rayons de courbure. Cette réduction se fait en transportant le trièdre des coordonnées, sur le trièdre formé par la normale à la surface, et ses deux directions principales en ce point. Elle tombe donc en défaut, dans le cas où ce trièdre s'évanouit, c'est-à-dire, soit lorsque la normale est tangente à la surface, soit lorsque les deux directions principales sont confondues: de là deux classes de *multiplicités particulières,* les unes, les développables circonscrites au cercle de l'infini, définies par l'équation invariante:

$$1 + p^2 + q^2 = 0,$$

les autres, les surfaces réglées dont les génératrices sont les droites isotropes, et dont l'équation est:

$$\begin{aligned}&[rpq(1+q^2) - 2s(1+p^2)(1+q^2) + tpq(1+p^2)]^2\\ &\quad + (1+p^2+q^2)[r(1+q^2) - t(1+p^2)]^2 = 0.\end{aligned}$$

3. La méthode peut être généralisée. Supposons qu'à l'aide d'une transformation du groupe, non pas nécessairement unique, cette fois, on puisse mettre un élément arbitraire E_0 de M sous une forme réduite $\mathcal{E}_0$, caractérisée par les valeurs fixes $c^0_{\nu_0+1}, \dots, c^0_{\rho_0}, c^1_{\nu_1+1}, \dots, c^1_{\rho_1}, \dots$ que prennent respectivement ses coordonnées $z^0_{\nu_0+1}, \dots, z^0_{\rho_0}, z^1_{\nu_1+1}, \dots, z^1_{\rho_1}, \dots$. Les autres coordonnées, $z^0_1, \dots, z^0_{\nu_0}, z^1_1, \dots, z^1_{\nu_1}, \dots$ de $\mathcal{E}_0$ sont fonctions des coordonnées de l'élément initial E_0, et les invariants cherchés sont fonctions de ces seules quantités. Pour les obtenir, il suffit d'achever la réduction de l'élément à une forme réduite bien déterminée, en tenant compte seulement des valeurs constantes déjà attribuées à certaines coordonnées. On posera donc, dans les équations (C^0):

$$\begin{aligned}&z'^{00}_{\nu_0+1} = z^{00}_{\nu_0+1} = c^0_{\nu_0+1}, \quad \dots, \quad z'^{00}_{\rho_0} = z^{00}_{\rho_0} = c^0_{\rho_0},\\ &z'^{10}_{\nu_1+1} = z^{10}_{\nu_1+1} = c^1_{\nu_1+1}, \quad \dots, \quad z'^{10}_{\rho_1} = z^{10}_{\rho_1} = c^1_{\rho_1},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

puis on achèvera de déterminer les paramètres λ, en attribuant à de nouvelles coordonnées $z'^{00}_{\mu_0+1}, \ldots, z'^{00}_{\nu_0}, z'^{10}_{\mu_1+1}, \ldots, z'^{10}_{\nu_1}, \ldots$ des valeurs constantes: on exprime ainsi les autres coordonnées $z'^{00}_1, \ldots, z'^{00}_{\mu_0}, z'^{10}_1, \ldots, z'^{10}_{\mu_1}, \ldots$ en fonction de $z^{00}_1, \ldots, z^{00}_{\nu_0}, z^{10}_1, \ldots, z^{10}_{\nu_1}, \ldots,$ et ces expressions sont les invariants cherchés; la transformation qui ramène E_0 à la dernière forme réduite est en effet unique.

4. Ce procédé est intéressant dans le cas où la forme intermédiaire $\mathcal{E}_0$ a elle-même pour coordonnées les invariants d'un sous-groupe du groupe proposé. On obtient alors les invariants du groupe général, exprimés en fonction de ceux du sous-groupe.

On peut arriver au même résultat à l'aide des transformations infinitésimales, la méthode s'appliquant d'ailleurs à un système complet quelconque d'équations linéaires aux dérivées partielles.

Soit donc un système complet

$$(1) \qquad X_1 f = 0, \quad \ldots, \quad X_h f = 0, \qquad X_{h+1} f = 0, \quad \ldots, \quad X_n f = 0$$

de n équations linéaires aux dérivées partielles, à r variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Nous supposons que les h premières forment elles-mêmes un système complet dont on connaît les solutions principales $x'_{h+1}, \ldots, x'_r$, qui se réduisent à $x_{h+1}, \ldots, x_r$, pour

$$x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_h = x_h^0.$$

Pour achever l'intégration de (1), nous prenons comme nouvelles variables $x_1, \ldots, x_h, x'_{h+1}, \ldots, x'_r$, et alors le système complet devient:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0,$$

$$(2) \qquad X_i f = X_i x'_{h+1} \frac{\partial f}{\partial x'_{h+1}} + X_i x'_{h+2} \frac{\partial f}{\partial x'_{h+2}} + \ldots + X_i x'_r \frac{\partial f}{\partial x'_r} = 0 \quad {\scriptstyle (i=h+1,\ldots,n)}$$

où les coefficients des dernières équations sont supposés exprimés en fonction de $x_1, \ldots, x_h, x'_{h+1}, \ldots, x'_r$. Si on résout les dernières équations, par rapport à $\frac{\partial f}{\partial x'_{h+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x'_n}$, par exemple, le système devient *jacobien*, de telle sorte que ses coefficients sont alors indépendants de $x_1, \ldots, x_h$. Le résultat de cette résolution ne change donc pas si on remplace dans (2), $x_1, \ldots, x_h$ par des constantes, en particulier par $x_1^0, \ldots, x_h^0$. Soit:

$$X_i x_k' = \varphi_{ik}(x_1, \ldots, x_h, x_{h+1}', \ldots, x_r') = \psi_{ik}(x_1, \ldots, x_h, x_{h+1}, \ldots, x_r).$$

Cette substitution donne identiquement:

$$\varphi_{ik}(x_1^0, \ldots, x_h^0, x_{h+1}', \ldots, x_r') = \psi_{ik}(x_1^0, \ldots, x_h^0, x_{h+1}', \ldots, x_r'),$$

et on remplace le système (2) par un système équivalent en substituant à tout coefficient $X_i x_k'$ l'expression $\psi_{ik}(x_1^0, \ldots, x_h^0, x_{h+1}', \ldots . x_r')$, laquelle s'obtient simplement en calculant $X_i x_k'$ en fonction de $x_1, \ldots, x_h, x_{h+1}, \ldots, x_r$, et y faisant ensuite:

$$x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_h = x_h^0, \qquad x_{h+1} = x_{h+1}', \quad \ldots, \quad x_r = x_r'.$$

Les dernières équations (2) forment alors un système complet par rapport aux seules variables $x_{h+1}', \ldots, x_r'$, dont les solutions sont les intégrales de (1), exprimées en fonction de $x_{h+1}', \ldots, x_r'$.

5. L'application de la méthode peut être facilitée dans certains cas. Elle consiste à effectuer sur l'élément intermédiaire $\mathcal{E}_0$, une transformation qui n'altère pas ses coordonnées constantes:

$$(3) \quad z_{\nu_0+1}^0 = c_{\nu_0+1}^0, \quad \ldots, \quad z_{\rho_0}^0 = c_{\rho_0}^0, \qquad z_{\nu_1+1}^1 = c_{\nu_1+1}^1, \quad \ldots, \quad z_{\rho_1}^1 = c_{\rho_1}^1, \quad \ldots$$

En général, la transformation générale jouissant de cette propriété dépend des autres coordonnées $z_1^{00}, \ldots, z_{\nu_0}^{00}, z_1^{10}, \ldots, z_{\nu_1}^{10}, \ldots$ de $\mathcal{E}_0$: dans le cas contraire, elle appartient nécessairement à un groupe Γ, sous-groupe du proposé G. Tout revient donc, dans ce cas, à faire une dernière réduction de la forme intermédiaire $\mathfrak{M}$, par une transformation de Γ, c'est-à-dire, à déterminer les invariants des multiplicités $\mathfrak{M}$, par rapport au groupe Γ.

C'est ce qui résulte aussi du raisonnement suivant. — Si S est la transformation générale de Γ, et T_0 une transformation particulière mettant une multiplicité donnée M sous la forme $\mathfrak{M}$, la transformation générale de G qui donne la même réduction est $T_0 S$. Tout invariant de

$\mathfrak{M}$ par rapport à Γ, exprimé en fonction des coordonnées de M, est alors nécessairement indépendant des arbitraires de cette transformation $T_0 S$, puisqu'il garde la même valeur, quelle que soit la multiplicité réduite $\mathfrak{M}$ à laquelle on ait ramené M; c'est donc une fonction bien déterminée des coordonnées de M, et, par suite, il constitue un invariant de M par rapport au groupe G.

Réciproquement, tout invariant de M par rapport au groupe G, exprimé en fonction des coordonnées d'une multiplicité $\mathfrak{M}$, donne évidemment un invariant de $\mathfrak{M}$ par rapport au groupe Γ, et les invariants distincts sont les mêmes, toute relation qu'il y a entre eux sous la forme $\mathfrak{M}$, subsistant quand on revient à la forme M.

Par exemple, un ds^2,

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2 \tag{4}$$

peut toujours, à l'aide d'une transformation convenable du groupe G:

$$x' = X(x, y), \qquad y' = Y(x, y),$$

où X et Y sont des fonctions arbitraires de x et y, se mettre sous la forme:

$$ds^2 = 2\lambda dx dy \tag{5}$$

et la transformation générale de G qui conserve cette forme réduite de ds^2, est indépendante de λ et constitue un sous-groupe Γ de G:

$$x' = \Xi(x), \qquad y' = H(y),$$

où Ξ est une fonction arbitraire de x seulement, et H de y seulement. Tout invariant de la forme (5) par rapport au groupe Γ donne donc un un invariant de la forme (4) par rapport au groupe G; et on obtient tous ces derniers invariants de cette manière.

CHAPITRE II.

Invariants d'une surface par rapport aux transformations conformes et aux transformations projectives de l'espace.

1. Appliquons ces principes à la recherche des invariants d'une surface, définie par une fonction z de x et y, par rapport au groupe G_{10} des *transformations conformes* de l'espace:

$$(G_{10})\quad \boxed{\begin{array}{c} p\,,\ q\,,\ r\,,\ zq-yr\,,\ xr-yp\,,\ yp-xq, \\ U,\ 2xU-(x^2+y^2+z^2)p\,,\ 2yU-(x^2+y^2+z^2)q\,,\ 2zU-(x^2+y^2+z^2)r \end{array}}$$

avec:

$$U = xp + yq + zr.$$

Les six premières transformations forment le groupe G_6 des mouvements de l'espace; à l'aide d'une transformation de ce groupe, on peut, avons-nous vu, transporter un point quelconque de la surface à l'origine, l'équation de la surface ayant la forme:

$$(1)\qquad z = \frac{a_{20}x^2 + a_{02}y^2}{2} + \frac{a_{30}}{6}x^3 + \frac{a_{21}}{2}x^2y + \frac{a_{12}}{2}xy^2 + \frac{a_{03}}{6}y^3 + \ldots$$

où les coefficients sont les valeurs des invariants du groupe G_6, au point considéré. Ceci devient impossible dans deux cas particuliers, définis chacun par une équation invariante, qui est aussi *équation invariante* de G_{10}. Nous laisserons ces deux cas de côté.

La transformation conforme n'altérant pas les lignes de courbure, la transformation générale de G_{10} qui n'altère pas la forme de l'équation (1) est indépendante des coefficients de (1). Elle forme effectivement un groupe G_4, celui des 4 dernières transformations de G_{10}. Sa transformation infinitésimale est:

$$\delta x = [2x(ax + by + cz + h) - a(x^2 + y^2 + z^2)]\,\delta t,$$
$$\delta y = [2y(ax + by + cz + h) - b(x^2 + y^2 + z^2)]\,\delta t,$$
$$\delta z = [2z(ax + by + cz + h) - c(x^2 + y^2 + z^2)]\,\delta t,$$

où a, b, c, h sont des paramètres arbitraires.

L'équation (1) étant:

$$z = f(x, y),$$

l'équation de la surface transformée est:

$$z - \delta z = f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}\delta x - \frac{\partial f}{\partial y}\delta y,$$

ou, en s'arrêtant aux termes du premier ordre en δt:

$$z = f(x, y) + \delta t\left\{2(ax + by + cf + h)\left(f - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left. + (x^2 + y^2 + f^2)\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} - c\right)\right\}.$$

D'après cela, la transformation infinitésimale des coefficients de (1) est:

$$\delta a_{20} + (2ha_{20} + 2c)\,\delta t = 0, \qquad \delta a_{02} + (2ha_{02} + 2c)\,\delta t = 0,$$
$$\delta a_{30} + 4ha_{30}\,\delta t = 0, \qquad \delta a_{03} + 4ha_{03}\,\delta t = 0,$$
$$\delta a_{21} + [4ha_{21} + 2b(a_{20} - a_{02})]\,\delta t = 0, \qquad \delta a_{12} + [4ha_{12} + 2a(a_{02} - a_{20})]\,\delta t = 0.$$

Elle met en évidence 1° une *équation invariante* du second ordre:

$$a_{20} - a_{02} = 0.$$

2° *deux invariants* du troisième ordre:

$$\frac{a_{30}}{(a_{20} - a_{02})^2}, \qquad \frac{a_{03}}{(a_{20} - a_{02})^2}.$$

L'équation invariante exprime que *la transformation conforme change un ombilic en ombilic.* Quand elle est satisfaite, les deux invariants du 3^{me} ordre n'ont plus de sens.

Pour avoir la signification de ces invariants, déterminons, dans le voisinage de l'origine, les rayons de courbure de la surface. Ils sont donnés par l'équation:

$$\rho^2(s^2-rt)+\rho\sqrt{1+p^2+q^2}\,[r(1+q^2)+t(1+p^2)-2spq]-(1+p^2+q^2)^2=0,$$

qui, aux termes du second ordre près, se réduit ici à:

$$-\rho^2 rt+\rho(r+t)-1=0,$$

ce qui donne pour chacun des rayons de courbure:

$$\rho_1=\frac{1}{r}=\frac{1}{a_{20}}-\frac{a_{30}x+a_{21}y}{a_{20}^2}+\dots$$

$$\rho_2=\frac{1}{t}=\frac{1}{a_{02}}-\frac{a_{12}x+a_{03}y}{a_{02}^2}+\dots.$$

Désignons par s_1 l'arc de la ligne de courbure suivant laquelle la sphère osculatrice de rayon ρ_1 touche la surface, par s_2 celui de la seconde ligne de courbure. On a:

$$s_1=x+\dots\qquad s_2=y+\dots$$

et, par suite, à l'origine, on a:

$$a_{20}=\frac{1}{\rho_1},\qquad a_{02}=\frac{1}{\rho_2},$$

$$a_{30}=-\frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial\rho_1}{\partial s_1},\qquad a_{03}=-\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial\rho_2}{\partial s_2},\qquad a_{21}=-\frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial\rho_1}{\partial s_2},\qquad a_{12}=-\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial\rho_2}{\partial s_1},$$

et les deux invariants obtenus sont, au signe près:

$$\frac{\rho_2^2\dfrac{\partial\rho_1}{\partial s_1}}{(\rho_1-\rho_2)^2},\qquad \frac{\rho_1^2\dfrac{\partial\rho_2}{\partial s_2}}{(\rho_1-\rho_2)^2}.$$

La même méthode conduit à 5 invariants du 4^{me} ordre, dont le calcul est, jusqu'à présent, sans intérêt.

2. On peut, de la même manière, construire les invariants d'une surface par rapport au *groupe des transformations projectives.* On peut, en effet, décomposer les transformations du groupe en sous-groupes s'emboîtant les uns dans les autres, suivant ce tableau:

$$\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{p\,,\,q\,,\,r}\quad xr\quad yr}\quad xq\quad yp\quad xp-yq}\quad xp+yq\quad zr}\quad zp\quad zq} \\ xU-zq\qquad yU-zp\qquad zU}$$

A chacun de ces groupes correspond, comme on le verra, une forme réduite bien déterminée, la transformation générale du groupe suivant qui n'altère pas les caractères de cette forme réduite, étant indépendante des coefficients qui y figurent.

1°. D'abord, une transformation du groupe $\boxed{p\,,\,q\,,\,r}$, permet de transporter un point quelconque $x_0\,,y_0\,,z_0$ de la surface à l'origine, ce qui met son équation sous la forme:

$$z = z_{10}x + z_{01}y + \dots + \frac{z_{hk}}{h!\,k!}x^h y^k + \dots \tag{2}$$

où z_{hk} représente la valeur, en ce point, de la dérivée $\frac{\partial^{h+k}z}{\partial x^h \partial y^k}$.

2°. $\boxed{xr\quad yr}$. En posant:

$$z' = z - z_{10}x - z_{01}y$$

on obtient la forme réduite:

$$z = \frac{z_{20}}{2}x^2 + z_{11}xy + \frac{z_{02}}{2}y^2 + \dots + \frac{z_{hk}}{h!\,k!}x^h y^k + \dots. \tag{3}$$

On voit par là que tout invariant est indépendant de $x\,,y\,,z$, et des dérivées premières $z_{10}\,,z_{01}$.

3°. $\boxed{xq \quad yp \quad xp - yq}$. On détermine la transformation:

$$\begin{aligned} x &= lx' + my', \\ y &= l_1x' + m_1y', \end{aligned} \qquad (lm_1 - ml_1 = 1)$$

de façon à annuler les termes en x'^2 et y'^2. On pose donc:

$$l_1 = \lambda l, \qquad m_1 = \mu m,$$

λ et μ étant les racines de l'équation:

$$z_{20} + 2z_{11}u + z_{02}u^2 = 0,$$

ce qui tombe en défaut, lorsque ces racines sont égales, c'est-à-dire, pour:

$$z_{11}^2 - z_{20}z_{02} = 0,$$

équation invariante des *surfaces développables.*

Si on écrit l'équation (3):

$$z = \frac{1}{2}\varphi_2(x, y) + \frac{1}{1.2.3}\varphi_3(x, y) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots p}\varphi_p(x, y) + \ldots,$$

φ_p étant une fonction homogène de degré p, l'équation devient, par la transformation

$$z = \sum_{p \geqq 2} \frac{1}{1.2\ldots p}\varphi_p(lx' + my', l_1x' + m_1y')$$

ou

$$z = \sum_{h+k \geqq 2} \frac{a_{hk}}{h!\,k!} l^h m^k x'^h y'^k$$

en posant:

$$\begin{aligned} a_{hk} &= \frac{h!}{(h+k)!}[\varphi'_{h+k,x}(1, \lambda) + \mu\varphi'_{h+k,y}(1, \lambda)]_{(k)} \\ &= \frac{k!}{(h+k)!}[\varphi'_{h+k,x}(1, \mu) + \lambda\varphi'_{h+k,y}(1, \mu)]_{(h)}. \end{aligned}$$

Dans cette forme, l et m satisfont à la relation:

$$lm(\mu - \lambda) = 1.$$

On achève de les déterminer en égalant entre eux les coefficients de x'^3 et y'^3, ce qui donne:

$$\alpha_{30} l^3 = \alpha_{03} m^3,$$

d'où:

$$l = \alpha_{03}^{\frac{1}{6}} \alpha_{30}^{-\frac{1}{6}} (\mu - \lambda)^{-\frac{1}{2}}, \qquad m = \alpha_{30}^{\frac{1}{6}} \alpha_{03}^{-\frac{1}{6}} (\mu - \lambda)^{-\frac{1}{2}},$$

ce qui tombe en défaut dans le cas où l'une des quantités α_{30} et α_{03} est nulle, c'est-à-dire lorsque les équations:

$$z_{20} + 2z_{11} u + z_{02} u^2 = 0,$$
$$z_{30} + 3z_{21} u + 3z_{12} u^2 + z_{03} u^3 = 0,$$

ont une racine commune. C'est le cas des *surfaces réglées.*

Sauf dans ces deux cas d'exception, l'équation se met donc sous la forme:

$$(4) \quad \begin{aligned} z = {} & \frac{a_{11}}{\mu - \lambda} xy + \frac{\alpha_{30}^{\frac{1}{2}} \alpha_{03}^{\frac{1}{2}}}{(\mu - \lambda)^{\frac{3}{2}}} \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2(\mu - \lambda)^{\frac{3}{2}}} \left(\alpha_{03}^{\frac{1}{6}} \alpha_{30}^{-\frac{1}{6}} \alpha_{21} x^2 y + \alpha_{30}^{\frac{1}{6}} \alpha_{03}^{-\frac{1}{6}} \alpha_{12} x y^2 \right) \\ & + \sum_{h+k \geq 4} \frac{\alpha_{30}^{\frac{k-h}{6}} \alpha_{03}^{\frac{h-k}{6}}}{(\mu - \lambda)^{\frac{h+k}{2}}} \frac{a_{hk}}{h!\,k!} x^h y^k. \end{aligned}$$

4°. $\boxed{xp + yq \quad zr}$. La transformation

$$x = \sigma x', \qquad y = \sigma y', \qquad z' = \tau z,$$

permet, en prenant:

$$\tau \sigma^2 \frac{a_{11}}{\mu - \lambda} = 1, \qquad \tau \sigma^3 \frac{\alpha_{03}^{\frac{1}{2}} \alpha_{30}^{\frac{1}{2}}}{(\mu - \lambda)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

d'amener les coefficients de xy et $\frac{x^3 + y^3}{6}$ à être égaux à l'unité, les cas d'exception étant encore ceux qui viennent d'être signalés. De là la forme réduite:

$$(5)\qquad z = xy + \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{a_{21}}{2} x^2 y + \frac{a_{12}}{2} xy^2 + \sum_{h+k \geq 4} \frac{a_{hk}}{h!\,k!} x^h y^k = \varphi(x, y)$$

avec

$$a_{hk} = \alpha_{11}^{h+k-3} \alpha_{03}^{1-\frac{h+2k}{3}} \alpha_{30}^{1-\frac{2h+k}{3}} \alpha_{hk}.$$

5°. $\boxed{zp \quad zq}$. L'équation de la surface

$$z = \varphi(x, y)$$

devient, par la transformation infinitésimale précédente:

$$z = \varphi(x, y) - \left[fz \frac{\partial \varphi}{\partial x} - gz \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] \delta t$$

où f et g sont des constantes arbitraires; ou, aux termes du second ordre en δt, près:

$$z = \varphi(x, y) - \varphi(x, y)\left(f\frac{\partial \varphi}{\partial x} + g\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\delta t,$$

ce qui donne, pour les coefficients $a_{21}, a_{12}, \ldots$ la transformation infinitésimale:

$$\begin{aligned}
&\delta a_{21} + 2g\,\delta t = 0, && \delta a_{12} + 2f\,\delta t = 0,\\
&\delta a_{40} + 4g\,\delta t = 0, && \delta a_{04} + 4f\,\delta t = 0,\\
&\delta a_{31} + (4f + 6g a_{21})\,\delta t = 0, && \delta a_{13} + (4g + 6f a_{12})\,\delta t = 0,
\end{aligned}$$

$$\delta a_{22} + 6(f a_{21} + g a_{12})\,\delta t = 0.$$

Elle correspond aux transformations finies:

$$\begin{aligned}
&a'_{21} = a_{21} - 2g', && a'_{12} = a_{12} - 2f',\\
&a'_{40} = a_{40} - 4g', && a'_{04} = a_{04} - 4f',\\
&a'_{31} = a_{31} - 6g' a_{21} - 4f' + 6g'^2, && a'_{13} = a_{13} - 6f' a_{12} - 4g' + 6f'^2,
\end{aligned}$$

$$a'_{22} = a_{22} - 6(f' a_{21} + g' a_{12}) + 12 f' g'.$$

En prenant

$$g' = \frac{a_{21}}{2}, \qquad f' = \frac{a_{12}}{2},$$

on met l'équation de la surface sous la forme:

$$z = xy + \frac{x^3 + y^3}{6} + \sum_{h+k \geqq 4} \frac{A_{hk}}{h!\,k!} x^h y^k \tag{6}$$

où les coefficients A constituent les *invariants de la surface par rapport au groupe des transformations linéaires,* les premiers coefficients ayant en particulier les valeurs suivantes:

$$A_{40} = a_{40} - 2a_{21}, \qquad A_{04} = a_{04} - 2a_{12},$$

$$A_{31} = a_{31} - \frac{3}{2}a_{21}^2 - 2a_{12}, \qquad A_{13} = a_{13} - \frac{3}{2}a_{12}^2 - 2a_{21},$$

$$A_{22} = a_{22} - 3a_{12}a_{21}.$$

6°. $\boxed{xU - zq \quad yU - zp \quad zU}$. Enfin, la transformation infinitésimale projective la plus générale qui n'altère pas la forme réduite (6):

$$z = \phi(x, y)$$

est indépendante des coefficients A. Elle forme donc un groupe et a pour expression:

$$\delta x = [x(lx + my + nz) - mz]\,\delta t, \qquad \delta y = [y(lx + my + nz) - lz]\,\delta t,$$
$$\delta z = z(lx + my + nz)\,\delta t,$$

où l, m, n sont des coefficients arbitraires. Elle transforme la surface (6) en la suivante:

$$z - \delta z = \phi(x, y) - \frac{\partial\phi}{\partial x}\delta x - \frac{\partial\phi}{\partial y}\delta y,$$

ou, aux termes près du second ordre en δt:

$$z = \phi(x, y) + \delta t\left\{(lx + my + n\phi)\left(\phi - x\frac{\partial\phi}{\partial x} - y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \phi\left(m\frac{\partial\phi}{\partial x} + l\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right\}.$$

La transformation infinitésimale des A qui en résulte est:

$$\delta A_{40} + 4l\,\delta t = 0, \qquad \delta A_{04} + 4m\,\delta t = 0,$$
$$\delta A_{31} - 2m\,\delta t = 0, \qquad \delta A_{13} - 2l\,\delta t = 0,$$
$$\delta A_{22} + 4n\,\delta t = 0,$$

ce qui correspond à la transformation finie:

$$A'_{40} = A_{40} - 4l', \qquad A'_{04} = A_{04} - 4m',$$
$$A'_{31} = A_{31} + 2m', \qquad A'_{13} = A_{13} + 2l',$$
$$A'_{22} = A_{22} - 4n'.$$

En prenant:

$$m' = -\frac{A_{31}}{2}, \qquad l' = -\frac{A_{13}}{2}, \qquad n' = \frac{A_{22}}{4},$$

l'équation de la surface se met sous la forme:

$$(7) \qquad z = xy + \frac{1}{6}(x^3 + y^3) + \frac{1}{24}(\mathfrak{A}_{40}x^4 + \mathfrak{A}_{04}y^4) + \sum_{h+k\geqq 5} \frac{\mathfrak{A}_{hk}}{h!\,k!} x^h y^k,$$

où les $\mathfrak{A}$ constituent les invariants de la surface par rapport au groupe projectif général. En particulier, on a deux invariants du 4^{me} ordre, qui ont pour expressions:

$$\mathfrak{A}_{40} = A_{40} + 2A_{13} = a_{40} + 2a_{13} - 6a_{21} - 3a_{12}^2$$
$$= \alpha_{03}^{-\frac{4}{3}} \alpha_{30}^{-\frac{5}{3}} (\alpha_{11}\alpha_{03}\alpha_{40} + 2\alpha_{11}\alpha_{30}\alpha_{13} - 6\alpha_{30}\alpha_{03}\alpha_{21} - 3\alpha_{30}\alpha_{12}^2),$$
$$\mathfrak{A}_{04} = A_{04} + 2A_{31} = a_{04} + 2a_{31} - 6a_{12} - 3a_{21}^2$$
$$= \alpha_{30}^{-\frac{4}{3}} \alpha_{03}^{-\frac{5}{3}} (\alpha_{11}\alpha_{30}\alpha_{04} + 2\alpha_{11}\alpha_{03}\alpha_{31} - 6\alpha_{03}\alpha_{30}\alpha_{12} - 3\alpha_{03}\alpha_{21}^2).$$

3. On peut donner de ces deux invariants, l'interprétation suivante. Comparons la surface proposée à une *surface anharmonique:*

$$P_1^{\lambda_1} P_2^{\lambda_2} P_3^{\lambda_3} P_4^{\lambda_4} = 1 \qquad (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0)$$

où les P sont des fonctions linéaires indépendantes de x, y, z. Une telle surface, par une transformation projective convenable, peut se mettre sous la forme:

$$z = x^a y^b.$$

Elle dépend de 15 constantes arbitraires, et admet un groupe à deux paramètres de transformations projectives

$$\boxed{xp + azr, \qquad yq + bzr}$$

de sorte qu'elle admet *deux invariants,* lesquels sont précisément les constantes a et b. Effectivement, déterminons pour cette surface $z = x^a y^b$, les valeurs, en un point quelconque x et y, des deux invariants A_{40} et A_{04}.

Ici, on a:

$$z_{ij} = a(a-1)\ldots(a-i+1)b(b-1)\ldots(b-j+1)x^{a-i}y^{b-j},$$

de sorte que z_{ij} est de degré $a-i$ en x, $b-j$ en y. L'équation en u est:

$$\frac{a(a-1)}{x^2} + \frac{2ab}{xy}u + \frac{b(b-1)}{y^2}u^2 = 0,$$

de sorte que λ et μ sont de degré -1 en x et $+1$ en y. L'expression:

$$\alpha_{p0} = \varphi_p(1, \lambda) = z_{p0} + pz_{p-1,1}\lambda + \ldots$$

est de degré $a-p$ en x et b en y; et, pour une raison analogue, α_{hk} est de degré $a-h-k$ en x et b en y. Il en résulte que A_{40} et A_{04} sont de degré zéro en x et y, c'est-à-dire, qu'ils dépendent bien de a et b seulement.

Ceci montre qu'en tout point d'une surface quelconque S, il est en général possible de trouver une *surface anharmonique* Σ (plus précisement, un nombre limité de telles surfaces), qui soit osculatrice avec S, jusqu'aux éléments du 4^me^ ordre. Les valeurs des deux invariants de S en ce point s'expriment en fonction des deux invariants de cette surface anharmonique Σ.

On a laissé de côté, dans cette analyse, deux classes de surfaces, les *surfaces développables* et les *surfaces réglées.* Les invariants des premières se ramènent à ceux des courbes gauches et ont été complètement déterminés par HALPHEN.[1]

[1] *Sur les invariants différentiels des courbes gauches,* Journal de l'école polytechnique, 47^e^ cahier.

CHAPITRE III.

Equation $y'' = a_0 y'^3 - a_1 y'^2 + b_1 y' - b_0$.

1. L'équation

(1) $$y'' = a_0 y'^3 - a_1 y'^2 + b_1 y' - b_0$$

où a_0, a_1, b_1, b_0 sont des fonctions de x et y, a la propriété de conserver la même forme par une transformation ponctuelle quelconque. En particulier, si on considère x comme fonction de y, elle se transforme en:

$$x'' = b_0 x'^3 - b_1 x'^2 + a_1 x' - a_0,$$

ce qui revient à substituer les a aux b, et inversement, en même temps que l'on change x en y et inversement.

La transformation infinitésimale effectuée sur x et y, est ici:

2) $$\delta x = -\xi \delta t, \qquad \delta y = -\eta \delta t,$$

où ξ et η sont des fonctions arbitraires de x et y. Elle donne:

(3) $$\frac{\delta y'}{\delta t} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + y'^2 \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$\frac{\delta y''}{\delta t} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + y'\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right) - y'^2\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right)$$
$$+ y'^3 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + y''\left(2\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} + 3y'\frac{\partial \xi}{\partial y}\right).$$

La transformation infinitésimale des coefficients a et b est alors donnée par l'identité:

$$-\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + y'\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right) - y'^2\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right) + y'^3 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$
$$+ (a_0 y'^3 - a_1 y'^2 + b_1 y' - b_0)\left(2\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} + 3y'\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)$$
$$-(3a_0 y'^2 - 2a_1 y' + b_1)\left[-\frac{\partial \eta}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + y'^2 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right]$$
$$-\frac{\delta a_0}{\delta t} y'^3 + \frac{\delta a_1}{\delta t} y'^2 - \frac{\delta b_1}{\delta t} y' + \frac{\delta b_0}{\delta t} = 0,$$

ce qui donne:

$$\frac{\delta a_0}{\delta t} = \quad a_0\left(2\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)-a_1\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2},$$

$$\frac{\delta a_1}{\delta t} = -3a_0\frac{\partial\eta}{\partial x}+a_1\frac{\partial\eta}{\partial y}-2b_1\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\delta b_0}{\delta t} = \quad b_0\left(2\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)-b_1\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\delta b_1}{\delta t} = -3b_0\frac{\partial\xi}{\partial y}+b_1\frac{\partial\xi}{\partial x}-2a_1\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}.$$

Le calcul des accroissements des dérivées φ_x et φ_y d'une fonction φ de x et y se fait à l'aide des formules:

$$\frac{\delta\varphi_x}{\delta t}=\frac{d}{dx}\frac{\delta\varphi}{\delta t}+\varphi_x\frac{\partial\xi}{\partial x}+\varphi_y\frac{\partial\eta}{\partial x},\qquad \frac{\delta\varphi_y}{\delta t}=\frac{d}{dy}\frac{\delta\varphi}{\delta t}+\varphi_x\frac{\partial\xi}{\partial y}+\varphi_y\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Pour les éléments du 1^er^ ordre, on obtient ainsi:

$$\frac{\delta a_{0x}}{\delta t}=\frac{\partial^3\xi}{\partial x\partial y^2}+\cdots,\qquad \frac{\delta a_{0y}}{\delta t}=\frac{\partial^3\xi}{\partial y^3}+\cdots,$$

$$\frac{\delta b_{0y}}{\delta t}=\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial y}+\cdots,\qquad \frac{\delta b_{0x}}{\delta t}=\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\cdots,$$

$$\frac{\delta a_{1x}}{\partial t}=\frac{\partial^3\eta}{\partial x\partial y^2}-2\frac{\partial^3\xi}{\partial x^2\partial y}+\cdots,\qquad \frac{\delta a_{1y}}{\delta t}=\frac{\partial^3\eta}{\partial y^3}-2\frac{\partial^3\xi}{\partial x\partial y^2}+\cdots,$$

$$\frac{\delta b_{1y}}{\delta t}=\frac{\partial^3\xi}{\partial x^2\partial y}-2\frac{\partial^3\eta}{\partial x\partial y^2}+\cdots,\qquad \frac{\delta b_{1x}}{\delta t}=\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}-2\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial y}+\cdots.$$

On est conduit à poser:

$$\alpha_1=a_{1y}+2a_{0x},\qquad 3\alpha=a_{1x}+2b_{1y},$$
$$\beta_1=b_{1x}+2b_{0y},\qquad 3\beta=b_{1y}+2a_{1x}$$

et à substituer aux dérivées de a_1 et b_1, les quantités $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ et leurs dérivées, pour lesquelles on a:

$$\frac{\delta\alpha_1}{\delta t}=\frac{\partial^3\eta}{\partial y^3}+\cdots,\qquad \frac{\delta\alpha}{\delta t}=-\frac{\partial^3\eta}{\partial x\partial y^2}+\cdots,$$

$$\frac{\delta\beta_1}{\delta t}=\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}+\cdots,\qquad \frac{\delta\beta}{\delta t}=-\frac{\partial^3\xi}{\partial x^2\partial y}+\cdots.$$

Il suffit même, pour avoir tous les éléments d'ordre supérieur, de considérer seulement les dérivées de a_{0y} et α_1 par rapport à y seulement, celles de b_{0x} et β_1 par rapport à x seulement, en considérant simultanément toutes les dérivées des autres éléments du premier ordre, $a_{0x}, b_{0y}, \alpha, \beta$.

Ceci montre que, dans tout invariant, les dérivées d'ordre supérieur figurent seulement sous la forme des dérivées d'une des deux expressions:

$$l = a_{0x^2} + \beta_y = \frac{\partial^2 a_0}{\partial x^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 a_1}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 b_1}{\partial y^2},$$

$$m = b_{0y^2} + \alpha_x = \frac{\partial^2 b_0}{\partial y^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 b_1}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}$$

et on pourra, à partir du 3^{me} ordre, considérer seulement les dérivées de a_{0x} par rapport à y, celles de b_{0y} par rapport à x, et introduire l et m et leurs dérivées.

On a:

$$\begin{aligned}\frac{\delta l}{\delta t} = \quad & a_0\left(2\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}\right) - a_1\frac{\partial^3\xi}{\partial x^2\partial y} - 2a_0\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial y} + \frac{2}{3}a_1\frac{\partial^3\eta}{\partial x\partial y^2} - \frac{4}{3}b_1\frac{\partial^3\xi}{\partial x\partial y^2} \\ & - b_0\frac{\partial^3\xi}{\partial y^3} + \frac{1}{3}b_1\frac{\partial^3\xi}{\partial x\partial y^2} - \frac{2}{3}a_1\frac{\partial^3\eta}{\partial x\partial y^2} + \dots \\ = & - a_0\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3} - a_1\frac{\partial^3\xi}{\partial x^2\partial y} - b_1\frac{\partial^3\xi}{\partial x\partial y^2} - b_0\frac{\partial^3\xi}{\partial y^3} + \dots\end{aligned}$$

d'où il résulte que, dans tout invariant, les quantités l et m ne figurent que par les combinaisons:

$$h = l + a_0\beta_1 - a_1\beta + b_1 a_{0x} + b_0 a_{0y},$$

$$k = m + b_0\alpha_1 - b_1\alpha + a_1 b_{0y} + a_0 b_{0x},$$

expressions que l'on peut maintenant substituer à l et m.

Le calcul complet des accroissements de h et k donne:

$$(4) \qquad \begin{aligned}\frac{\delta h}{\delta t} &= h\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + 2\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) - k\frac{\partial\xi}{\partial y}, \\ \frac{\delta k}{\delta t} &= k\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} + 2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) - h\frac{\partial\eta}{\partial x},\end{aligned}$$

résultat remarquable, en ce sens que les dérivées du second ordre de ξ et η n'y figurent pas.

On pourrait achever la détermination des invariants, en prolongeant la transformation infinitésimale (4) aux dérivées de h et k; puis, en ajoutant à chacune de ces dérivées des fonctions linéaires de $a_{0x}, b_{0y}, a_{0y}, b_{0x}, \alpha_1, \beta_1, \alpha$ et β, on peut faire disparaître, dans l'expression de leurs transformations infinitésimales, les dérivées du 3^{me} ordre de ξ et η. Le calcul est rendu pratiquement facile, eu égard à notre remarque (3^{me} partie, ch. I), sur l'intégration progressive des systèmes complets.

On obtient ainsi 6 invariants du 4^{me} ordre, et, en général, $2(n-1)$ du $n^{\text{ième}}$ ordre, lesquels peuvent être exprimés en fonctions linéaires des $2(n-1)$ dérivées du $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre de h et k.

Nous suivrons une autre marche. Il résulte des équations (4), qu'il y a une équation différentielle du 1^{er} ordre, invariablement attachée à la proposée, car, si l'on combine avec (4) les formules:

$$\frac{\delta}{\delta t}dx = -\frac{\partial\xi}{\partial x}dx - \frac{\partial\xi}{\partial y}dy, \qquad \frac{\delta}{\delta t}dy = -\frac{\partial\eta}{\partial x}dx - \frac{\partial\eta}{\partial y}dy$$

on trouve l'équation *invariante:*

$$hdy - kdx = 0. \tag{5}$$

Il en résulte que l'on peut, par une transformation du groupe, annuler h; il suffit de prendre pour nouvelle variable indépendante, une fonction x_1 de x et y satisfaisant à:

$$h\frac{\partial x_1}{\partial x} + k\frac{\partial x_1}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

en laissant y fixe: cela, sous la seule condition que x_1 ne se réduise pas à une simple fonction de y, c'est-à-dire, que l'on n'ait pas:

$$k = 0.$$

Dans ce cas, il suffit d'intervertir x et y, pour réaliser immédiatement la condition $h = 0$.

Ce calcul tomberait en défaut, dans le cas où on aurait simultanément:

$$h = 0, \qquad k = 0. \tag{7}$$

On a ainsi un *système invariant d'équations;* lorsqu'il est satisfait, nos calculs précédents montrent que l'équation (1) n'admet pas d'invariants. Il en est ainsi, en particulier, pour l'équation

$$y'' = 0,$$

de sorte que le système (7) exprime les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (1) puisse se ramener par une transformation ponctuelle à l'équation précédente. On sait comment, dans ce cas, M. Lie a ramené l'intégration de cette équation (1), à celle d'une équation linéaire du 3^{me} ordre.[1]

Quant à la transformation générale (2) qui laisse invariante l'équation $h = 0$, elle est définie, d'après (4), par:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0.$$

Elle est bien indépendante des nouveaux coefficients de l'équation, et engendre un groupe, savoir:

$$x_1 = X(x), \qquad y_1 = Y(x, y) \tag{8}$$

ou, avec les transformations infinitésimales:

$$\delta x = -\xi(x)\delta t, \qquad \delta y = -\eta(x, y)\delta t \tag{8'}$$

où X et ξ sont des fonctions arbitraires de x seulement, Y et η des fonctions arbitraires de x et y.

L'équation (1) étant mise sous une nouvelle forme pour laquelle on a $h = 0$, tout revient maintenant à calculer les invariants de ses coefficients par rapport au groupe (8) ou (8'), lequel donne:

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{\delta a_0}{\delta t} &= a_0\left(2\frac{\partial \eta}{\partial y} - \xi'\right), & \frac{\delta b_0}{\delta t} &= b_0\left(2\xi' - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) - b_1\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \\ \frac{\delta a_1}{\delta t} &= -3a_0\frac{\partial \eta}{\partial x} + a_1\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}, & \frac{\delta b_1}{\delta t} &= b_1\xi' - 2a_1\frac{\partial \eta}{\partial x} + \xi'' - 2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

---

[1] Lie, Archives norvégiennes, 1883, *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten,* III.

On rencontre une première *équation invariante,* d'ordre zéro:

$$a_0 = 0$$

et tout revient, dans le cas où elle est satisfaite, à étudier la transformation (9) par rapport aux trois fonctions a_1, b_1, b_0. Nous laisserons de côté ce cas particulier pour ne nous attacher qu'au cas général.

En prolongeant la transformation (9) au premier ordre, on fait apparaître les dérivées du 3^{me} ordre de ξ et η, d'où il résulte que, dans un invariant du 1^{er} ordre, les dérivées du premier ordre figurent seulement sous l'une des formes a_{0x}, a_{0y} et:

$$\beta = \frac{1}{3}(b_{1y} + 2a_{1x})$$

pour lesquelles on a:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta a_{0y}}{\delta t} &= a_{0y}\left(3\frac{\partial\eta}{\partial y} - \xi'\right) + 2a_0\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2},\\
\frac{\delta a_{0x}}{\delta t} &= 2a_{0x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + a_{0y}\frac{\partial\eta}{\partial x} + a_0\left(2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} - \xi''\right),\\
\frac{\delta\beta}{\delta t} &= -2a_{0x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \beta\left(\xi' + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right) - 2a_0\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

En combinant ceci avec (9), on est conduit à poser, pour faire disparaître les dérivées du second ordre de ξ et η:

$$a'_{0y} = a_{0y} - 2a_0a_1, \qquad a'_{0x} = a_{0x} + a_0b_1, \qquad \beta' = \beta + 2a_0b_0$$

et on a:

$$(10)\qquad \begin{aligned}
\frac{\delta a'_{0y}}{\delta t} &= a'_{0y}\left(3\frac{\partial\eta}{\partial y} - \xi'\right) + 6a_0^2\frac{\partial\eta}{\partial x},\\
\frac{\delta a'_{0x}}{\delta t} &= 2a'_{0x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + a'_{0y}\frac{\partial\eta}{\partial x},\\
\frac{\delta\beta'}{\delta t} &= -2a'_{0x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \beta'\left(\xi' + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right),
\end{aligned}$$

transformations auxquelles j'ajouterai, pour avoir les paramètres différentiels, les suivantes, où φ est supposé être un invariant:

$$\frac{\delta\varphi_x}{\delta t} = \varphi_x \xi' + \varphi_y \frac{\partial\eta}{\partial x}, \qquad \frac{\delta\varphi_y}{\delta t} = \varphi_y \frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

En rapprochant ceci de la première équation (9), on trouve un *invariant du premier ordre:*

$$B = \frac{a_0}{\left(a'_{0x} - \frac{a'^2_{0y}}{12a_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\beta' + \frac{a'_{0x} a'_{0y}}{3a_0^2} - \frac{a'^3_{0y}}{54a_0^4}\right)$$

et deux *paramètres différentiels:*

$$\Delta_x \varphi = \frac{a_0}{a'^2_{0x} - \frac{a'_{0y}}{12a_0^2}} \left(\varphi_x - \frac{a'_{0y}}{6a_0^2}\varphi_y\right), \qquad \Delta_y \varphi = \frac{\varphi_y}{\left(a'_{0x} - \frac{a'^2_{0y}}{12a_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour le second ordre, on rencontre, en prolongeant la transformation (9), les 6 dérivées du 4^me ordre de ξ et η, lesquelles donnent 6 équations distinctes, de sorte que les 9 dérivées du second ordre de a_1, b_1, b_0 figurent dans tout invariant par 3 de leurs combinaisons. Nous prendrons pour ces combinaisons, $\Delta_x B$, $\Delta_y B$, qui sont des invariants et k, qui donne:

$$\frac{\delta k}{\delta t} = k\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} + 2\xi'\right). \tag{11}$$

Quant aux dérivées de a_0, il suffit d'en considérer deux seulement, en vertu de la relation $h = 0$. Nous poserons:

$$a'_{0y^2} = \frac{\partial}{\partial y} a'_{0y} = a_{0y^2} - 2a_0 a_{1y} - 2a_1 a_{0y},$$

$$a'_{0xy} = \frac{\partial}{\partial y} a'_{0x} = a_{0xy} + a_0 b_{1y} + b_1 a_{0y},$$

et on a:

$$\frac{\delta}{\delta t} a'_{0y^2} = a'_{0y^2}\left(4\frac{\partial \eta}{\partial y} - \xi'\right) + 3a'_{0y}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + 12a_0(a'_{0y} + 2a_0 a_1)\frac{\partial \eta}{\partial x} + 6a_0^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\delta}{\delta t} a'_{0xy} = 3a'_{0xy}\frac{\partial \eta}{\partial y} + a'_{0y^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + 2a'_{0x}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + a'_{0y}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}.$$

Ceci conduit à poser:

$$a''_{0y^2} = a'_{0y^2} - 3a_1 a'_{0y} + 3a_0^2 b_1,$$

$$a''_{0xy} = a'_{0xy} - 2a_1 a'_{0x} + \frac{1}{2} b_1 a'_{0y},$$

et on a:

$$\frac{\delta}{\delta t} a''_{0y^2} = a''_{0y^2}\left(4\frac{\partial \eta}{\partial y} - \xi'\right) + 21 a_0 a'_{0y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + 3a_0^2 \xi'',$$

$$\frac{\delta}{\delta t} a''_{0xy} = 3a''_{0xy}\frac{\partial \eta}{\partial y} + a''_{0y^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + 6a_0 a'_{0x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} a'_{0y}\xi''.$$

Les termes en ξ'' interviennent ici, de sorte qu'il faut introduire l'expression:

$$a''_{0xy} - \frac{a'_{0y} a''_{0y^2}}{6a_0^2}$$

qui donne:

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(a''_{0xy} - \frac{a'_{0y} a''_{0y^2}}{6a_0^2}\right) = 3\left(a''_{0xy} - \frac{a'_{0y} a''_{0y^2}}{6a_0^2}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} + \left(6a_0 a'_{0x} - \frac{7}{2}\frac{a'^2_{0y}}{a_0}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

et cette formule, combinée avec (9), (10) et (11) conduit à deux nouveaux *invariants du second ordre:*

$$C = \frac{a_0^2}{\left(a'_{0x} - \frac{a'^2_{0y}}{12a_0^2}\right)^{\frac{5}{2}}} k$$

et

$$D = \frac{1}{\left(a'_{0x} - \frac{a'^2_{0y}}{12a_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(a''_{0xy} - \frac{a'_{0y} a''_{0y^2}}{6a_0^2} - \frac{a'_{0x} a'_{0y}}{a_0} + \frac{a'^3_{0y}}{4a_0^3}\right),$$

de sorte qu'il y a 4 *invariants du second ordre:*

$$\Delta_x B\,,\ \Delta_y B\,,\ C\,,\ D.$$

On voit en outre que la transformation infinitésimale (9), prolongée au second ordre, conduit en considérant les dérivées des premier, second, troisième et 4^{me} ordre de ξ et η à des équations qui sont *indépendantes.* Elles restent, a fortiori, indépendantes, lorsqu'on prolonge ensuite la transformation à l'ordre suivant; les 7 dérivées du 5^{me} ordre de ξ et η donnent en outre, de par la manière dont elles figurent dans la transformation, des équations indépendantes entre elles et des précédentes; et comme il faut ajouter comme nouvelles variables les 12 dérivées du 3^{me} ordre de a_1, b_1, b_0, et les 2 dérivées a_{0y^3}, a_{0xy^2} de a_0, on obtient ainsi 7 invariants du 3^{me} ordre. Plus généralement pour l'ordre n, on a encore pour déterminer les invariants, un système complet d'équations *indépendantes,* lequel comprend $n + 4$ équations de plus que le système d'ordre $n - 1$, et $3(n + 1) + 2 = 3n + 5$ variables de plus; ce qui donne donc, à partir de $n = 3$, $2n + 1$ invariants distincts du $n^{ième}$ ordre.

Or, dans les 4 invariants du second ordre, D, $\Delta_y B$, $\Delta_x B$, C figurent respectivement les expressions a_{0y^2}, β_y, β_x et k, chacune d'elles entrant dans l'invariant correspondant, sans figurer dans ceux qui le précèdent. La même remarque pourra s'appliquer aux invariants du 3^{me} ordre, qu'on en déduira à l'aide des paramètres différentiels, $\Delta_y D$, $\Delta_x D$, $\Delta_{y^2} B$, $\Delta_{xy} B$, $\Delta_{x^2} B$, $\Delta_y C$, $\Delta_x C$ relativement aux expressions: a_{0y^3}, a_{0xy^2}, β_{y^2}, β_{xy}, β_{x^2}, k_y, k_x; et ainsi de suite, de sorte que l'on obtient ainsi pour l'ordre n, en ne considérant que les dérivées a_{0y^n} et $a_{0xy^{n-1}}$ de a_0:

$$2 + n + n - 1 = 2n + 1$$

invariants distincts, c'est-à-dire tous les invariants cherchés.

2. Considérons, par exemple, une équation:

$$y'' = a_0 y'^3 - a_1 y'^2 + b_1 y' - b_0, \tag{12}$$

dont les coefficients seraient fonctions d'une seule variable, x ou y.

Dans ce cas, si l'invariant B n'est pas constant, tous les invariants du second ordre s'expriment en fonction de B:

$$(13) \quad \Delta_y B = f_1(B), \qquad \Delta_x B = f_2(B), \qquad C = f_3(B), \qquad D = f_4(B),$$

et réciproquement, toute équation dont les invariants satisfont à ces relations (13) peut se ramener à la forme (12).

Si B était constant et égal à B_0, sans que C et D, C par exemple, le soient tous les deux, les équations homologues de (12) sont définies par les relations:

$$(14) \quad B = B_0, \qquad D = \varphi_1(C), \qquad \Delta_y C = \varphi_2(C), \qquad \Delta_x C = \varphi_3(C).$$

Si enfin, B, C et D sont tous les trois constants, et égaux à B_0, C_0, D_0 les relations:

$$(15) \qquad B = B_0, \qquad C = C_0, \qquad D = D_0$$

suffisent pour définir les équations homologues de (12).

Réciproquement, je dis qu'une équation (1) dont les invariants satisfont à un système de relations ayant l'une des formes (13), (14), (15), c'est-à-dire, qui a un invariant distinct au plus, est homologue d'une équation de la forme (12) où les coefficients sont fonctions d'une seule variable.

Regardons, en effet, dans le système (13), ou (14), ou (15), a_0, a_1, b_1, b_0 comme fonctions d'une seule variable x, ou y; on obtient ainsi un système de 4 équations différentielles ordinaires au plus par rapport à 4 inconnues; et toute solution de ces équations donne des valeurs de a_0, a_1, b_1, b_0, fonctions d'une seule variable, qui répondent à la question.

Voici, comment, dans le cas général, on pourra ramener une pareille équation à la forme (12). Ayant annulé la quantité h, à l'aide d'une nouvelle variable x_1, prenons comme nouvelle fonction y_1, l'invariant B lui-même:

$$y_1 = B$$

ou encore C ou D, pourvu que l'invariant choisi ne se réduise pas à une fonction de x_1 seulement. Cela revient à mettre l'équation (1) sous une forme réduite:

$$y_1'' = A_0 y_1'^3 - A_1 y_1'^2 + B_1 y_1' - B_0,$$

qui ne se conserve que par les transformations du groupe:

$$\delta x_1 = -\xi(x_1)\delta t.$$

Cette transformation donne:

$$\delta A_0 = -A_0 \xi' \delta t, \qquad \delta B_0 = 2 B_0 \xi' \delta t,$$

$$\delta A_1 = 0, \qquad \delta B_1 = (B_1 \xi' + \xi'')\delta t,$$

puis

$$\delta \frac{\partial A_0}{\partial x_1} = -A_0 \xi'' \delta t, \qquad \delta \frac{\partial A_0}{\partial y_1} = -\frac{\partial A_0}{\partial y_1} \xi' \delta t,$$

$$\delta \frac{\partial B_1}{\partial y_1} = \frac{\partial B_1}{\partial y_1} \xi' \delta t,$$

et admet donc pour invariants, les expressions:

$$A_1 , \; B_0 A_0^2 , \; \frac{1}{A_0} \frac{\partial A_0}{\partial y_1} , \; \frac{\partial A_0}{\partial x_1} + A_0 B_1 , \; A_0 \frac{\partial B_1}{\partial y_1}.$$

Ces invariants, calculés avec les variables primitives, x et y, donnent des invariants de l'équation proposée et par suite sont tous des fonctions de B, c'est-à-dire de y_1. On aura donc, en désignant par des Y des fonctions de y_1 seulement, et par des X des fonctions de x_1 seulement:

$$A_1 = Y_1$$

puis:

$$A_0 = Y_0 X_0,$$

$$B_0 = \frac{Y_2}{Y_0^2 X_0^2},$$

$$B_1 = \frac{1}{Y_0 X_0}(Y_3 - Y_0 X_0').$$

Avec les variables x_1 et y_1, l'équation proposée est donc de la forme:

$$y_1'' = Y_0 X_0 y_1'^3 - Y_1 y'^2 + \frac{1}{Y_0 X_0}(Y_3 - Y_0 X_0')y' - \frac{Y_2}{Y_0^2 X_0^2}$$

ou, comme on sait:

$$x_1'' = \frac{Y_2}{Y_0^2 X_0^2} x_1'^3 - \frac{1}{Y_0 X_0}(Y_3 - Y_0 X_0')x_1'^2 + Y_1 x_1' - Y_0 X_0 .$$

En prenant comme nouvelle variable x, une fonction x_2 de x_1 seulement, on a:

$$x_2' = \frac{dx_2}{dx_1} x_1'$$

et

$$x_2'' = \frac{dx_2}{dx_1} x_1'' + \frac{d^2 x_2}{dx_1^2} x_1'^2$$

et cette équation devient:

$$x_2'' = \frac{Y_2}{Y_0^2 X_0^2}\frac{dx_2}{dx_1} x_1'^3 - \left[\frac{1}{Y_0 X_0}(Y_3 - Y_0 X_0')\frac{dx_2}{dx_1} - \frac{d^2 x_2}{dx_1^2}\right] x_1'^2$$

$$+ Y_1 \frac{dx_2}{dx_1} x_1' - Y_0 X_0 \frac{dx_2}{dx_1}.$$

Il suffit alors de prendre la fonction x_2 de x_1, telle que l'on ait:

$$\frac{dx_2}{dx_1} X_0 = 1$$

d'où

$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} X_0 + \frac{dx_2}{dx_1} X_0' = 0,$$

pour que l'équation devienne:

$$x_2'' = \frac{Y_2}{Y_0^2} x_2'^3 - \frac{Y_3}{Y_0} x_2'^2 + Y_1 x_2' - Y_0$$

où les coefficients sont bien fonctions de y_1 seulement.

On voit que la réduction à cette forme se fait à l'aide de deux quadratures successives, la première pour déterminer x_1, en fonction de x et y, la seconde pour déterminer x_2 en fonction de x_1.

L'intégration de l'équation proposée s'achève par l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, de la forme:

$$\frac{du}{dx} = A_0 u^3 - A_1 u^2 + B_1 u - A_0$$

où les coefficients A sont fonctions de x, suivie ensuite d'une nouvelle quadrature.