THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES D'UNE VARIABLE

(Premier Mémoire)

PAR

K. HENSEL

à BERLIN.

Traduit par M. G. Brincard à Paris.

§ 1. *Des fonctions rationnelles à une variable et des formes rationnelles homogènes.*

Toute fonction entière de x

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$$

à coefficients constants peut se mettre, comme on le sait, à une constante multiplicative près, sous la forme d'un produit de facteurs linéaires distincts ou égaux entre eux, en nombre égal à son degré en x; cette décomposition ne pouvant d'ailleurs se faire que d'une seule façon. On pourra donc écrire

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m),$$

les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ étant des nombres réels ou complexes qu'on pourra calculer avec telle approximation qu'on voudra.

On est donc conduit tout naturellement, par analogie avec la dénomination adoptée dans la théorie des nombres, à appeler les facteurs linéaires irréductibles $(x - \alpha_i)$ les facteurs premiers de la fonction $f(x)$. On peut aussi définir ceux-ci comme des fonctions entières de x qui n'ont qu'un seul zéro.

Dans ces considérations d'un ordre plus arithmétique toute constante a différente de zéro doit être regardée comme une unité de même qu'on le fait en arithmétique pour les quantités $+1$ et -1; et cela d'abord parce qu'elle ne peut être divisible par aucun facteur premier $(x-\alpha)$, ensuite parce que toute fonction entière de x reste entière quand on la divise par une constante, c'est à dire que toute fonction entière est divisible par une constante.

Toute fonction rationnelle de x peut se mettre sous la forme d'un quotient de deux fonctions entières de la même variable, à savoir:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}=\frac{a_0(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_m)}{b_0(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_n)},$$

où les m quantités $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$ sont distinctes des n valeurs $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ parce qu'on peut supposer le numérateur et le dénominateur débarrassés de leurs facteurs communs. Si on ne considère maintenant que des valeurs finies de la variable x, cette fonction fractionnaire

$$y=\frac{f(x)}{g(x)} \tag{1}$$

s'annulera seulement pour les zéros $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ des facteurs premiers du numérateur tandis qu'elle ne prendra des valeurs infinies que pour les zéros du dénominateur. Cette fonction ne possède donc pas d'autres zéros ni d'autres infinis que les zéros des facteurs premiers de son numérateur et de son dénominateur. En général cependant il n'en est plus ainsi quand la variable x peut prendre aussi des valeurs infinies ainsi que le cas se présente dans le théorie des courbes algébriques. C'est ainsi que pour de très grandes valeurs de x la fonction y considérée tend vers la valeur limite

$$\frac{a_0}{b_0}x^{m-n}=\frac{a_0}{b_0}\frac{1}{x^{n-m}},$$

donc pour $x=\infty$ la fonction y devient ou bien infinie ou bien nulle selon que $m>n$ ou que $m<n$; et dans les deux cas il faut compter $x=\infty$ comme infini ou comme zéro autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre $|m-n|$.

Toute fonction rationnelle de x possède donc autant de zéros que d'infinis et leur nombre est égal au plus grand des entiers m et n, qui désignent les degrés du numérateur et du dénominateur. Il résulte de là qu'un facteur linéaire $(x-\alpha)$ n'a en aucune façon le caractère d'une fonction première aussitôt que la variable x peut prendre des valeurs infinies; car il est vrai que $(x-\alpha)$ n'a qu'un zéro $x=\alpha$, mais il a encore un infini $x=\infty$; il ne diffère donc de la fraction

$$\frac{x-a}{x-\beta}$$

qu'en ce point, bien insignifiant d'ailleurs, à savoir: que cette dernière devient infinie pour la valeur *finie* $x=\beta$.

De ce qui précède il résulte qu'il n'existe aucune fonction de x, entière ou rationnelle, n'ayant qu'un zéro et ne possédant pas d'infini; une pareille fonction aurait seule le caractère d'une véritable fonction première. Il est cependant aisé de former une fonction première, si au lieu de considérer une seule fonction on en prend un faisceau.

Soit u une constante arbitraire, la fraction

$$y=\frac{x}{x-u} \tag{2}$$

possède un seul zéro pour $(x=0)$ et un infini pour $(x=u)$. Faisons maintenant varier u, l'infini de y change de position tandis que son zéro reste fixe. Considérons donc le faisceau de fonctions qu'on obtient en donnant au paramètre u toutes les valeurs possibles; chacune aura un même zéro pour $(x=a)$, mais les infinis de ces fonctions seront tous différents.

Considérons l'équation (2) comme celle d'une courbe, u ayant reçu une valeur arbitraire, et posons

$$x-u=\xi, \qquad y-1=\eta;$$

elle se réduit à

$$\xi\eta=u$$

et représente une hyperbole dont les asymptotes $(\xi=0, \eta=0)$ sont parallèles aux axes; dont le centre a les coordonnées $x_0=u, y_0=1$ et dont les sommets se trouvent à une distance $\sqrt{2u}$ du centre. La branche inférieure de cette hyperbole passe par l'origine des coordonnées, quelle que soit la valeur du paramètre u, tandis que l'une de ses asymptotes $x=u$ se trouve variable avec u. Toutes les hyperboles du faisceau précédent, u étant un paramètre variable, se coupent donc à l'origine des coordonnées, ce point est donc le zéro commun de toute la série, tandis que deux hyperboles du faisceau n'ont pas le même infini. Quelle que soit donc la valeur particulière donnée à la variable x, on pourra toujours choisir u, et cela d'une infinité de manières, de façon que y ne devienne pas infini pour la valeur considérée, il suffit évidemment pour cela de prendre $u \gtrless x$.

C'est dans ce sens qu'on peut dire que la fonction $\frac{x}{x-u}$ pour u indéterminé n'a qu'un zéro fixe pour $(x = 0)$ et aucun infini fixe.

On reconnaît de même que toutes les fonctions du faisceau

$$y = \frac{1}{x-u} \tag{2 a}$$

ont un zéro fixe pour $(x = \infty)$, sans posséder un infini indépendant du paramètre. Car une fonction arbitraire de la série devient infinie pour $x = u$ seulement, c'est à dire pour une valeur de la variable qui change avec le paramètre lui-même. Si dans l'équation (2 a) on pose

$$x - u = \xi, \qquad y = \eta$$

l'équation de la courbe correspondante s'écrira:

$$\xi\eta = 1;$$

le faisceau est donc composé d'hyperboles équilatères, dont les asymptotes sont parallèles aux axes et dont les centres ont les coordonnées

$$x_0 = u, \qquad y_0 = 0.$$

L'axe des x étant une asymptote commune du faisceau toutes les courbes se coupent au point situé à l'infini sur cet axe; et, comme l'autre asymptote varie avec le paramètre u, deux hyperboles de la série n'auront jamais un infini commun.

C'est dans ce sens qu'on peut dire que la fonction $\frac{1}{x-u}$ possède un zéro fixe pour $(x = \infty)$ sans avoir d'infini fixe, u étant toujours considéré comme indéterminé.

Si l'on pose

$$x_1 = \frac{x}{x-u}, \qquad x_2 = \frac{1}{x-u}, \tag{2 b}$$

u représentant un paramètre indéterminé, on a deux fonctions qui ne possèdent des zéros fixes que pour $(x = 0)$ et pour $(x = \infty)$, et qui ne possèdent aucun infini fixe.

On voit de même que toute fonction linéaire et homogène de x_1 et x_2

$$\alpha' x_1 - \alpha'' x_2 = \frac{\alpha' x - \alpha''}{x - u}$$

possède, pour des valeurs indéterminées de u, un et un seul zéro fixe et aucun infini.

Si donc on n'astreint la variable x à aucune condition, on voit qu'on peut, qu'on doit même, considérer ces formes linéaires et homogènes de x_1 et x_2 comme les véritables facteurs premiers des fonctions de x, et on peut, en effet, montrer très facilement que toute fonction rationnelle de x peut se décomposer d'une seule manière en ces formes linéaires.

Des deux équations (2 b) qui donnent x_1 et x_2 on est conduit immédiatement à l'identité:

$$x = \frac{x_1}{x_2}$$

qui donne ainsi la variable x sous la forme d'un quotient dont le numérateur s'annule seulement pour le zéro et dont le dénominateur s'annule seulement pour l'infini de la variable x.

Si maintenant on remplace x par cette valeur $\frac{x_1}{x_2}$ dans une fonction rationnelle arbitraire de x, entière ou fractionnaire, de la forme:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)},$$

multipliant numérateur et dénominateur par x_2^m, m étant l'exposant des deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$ le plus élevé, on obtient l'expression:

$$y = \frac{f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)} = \frac{a_0 x_1^m + a_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots + a_m x_2^m}{b_0 x_1^m + b_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots + b_m x_2^m},$$

où $f(x_1, x_2)$ et $g(x_1, x_2)$ représentent des fonctions homogènes et entières de degré m en x_1 et x_2 qui n'ont, comme $f(x)$ et $g(x)$, aucun facteur linéaire commun.

Chacune de ces deux fonctions peut, comme on le sait, être mise d'une et d'une seule façon sous la forme d'un produit de facteurs linéaires dont le nombre est égal à la dimension de f et de g (abstraction faite d'une constante multiplicative ou ce qui est la même chose d'une unité).

Cette décomposition effectuée, y s'écrira:

$$y = \frac{(\alpha_1' x_1 - \alpha_1'' x_2) \dots (\alpha_m' x_1 - \alpha_m'' x_2)}{(\beta_1' x_1 - \beta_1'' x_2) \dots (\beta_m' x_1 - \beta_m'' x_2)};$$

on voit alors que la fonction y ne s'annulera que dans le cas seul ou x prendra l'une des valeurs:

$$x = \frac{\alpha_i''}{\alpha_i'}, \qquad (i=1,2,3,\dots,m)$$

car alors, pour toute valeur de u, un des facteurs du numérateur s'annule et l'indéterminée u qui ne figure pas dans y peut toujours être déterminée de façon que pour chaque autre valeur de x aucun des facteurs du second membre ne puisse devenir nul ou infini. On reconnaît de même que y peut devenir infini dans le cas seul ou x prend une valeur égale à l'un des zéros du dénominateur, c'est à dire quand

$$x = \frac{\beta_i''}{\beta_i'}. \qquad (i=1,2,3,\dots,m)$$

Nous venons donc, en résumé, de représenter toute fonction rationnelle et arbitraire de x par le quotient de deux produits de facteurs premiers et nous avons vu que les facteurs du numérateur déterminent tous les zéros, ceux du dénominateur tous les infinis de la fonction. On reconnaît de suite que dans ce mode de représentation de y par le quotient de deux fonctions homogènes de x_1 et x_2, on ne considère uniquement que ses zéros, quantités indépendantes du paramètre u et par conséquent fixes, tandis que les infinis qui dépendent du paramètre u ne sauront figurer aucunement dans y, parce que y est indépendant de u. Aussi dans ce qui va suivre allons-nous nous occuper seulement des zéros fixes de ces formes.

Toute fonction rationnelle pouvant se mettre sous la forme du quotient de deux formes entières de (x_1, x_2), nous n'aurons à examiner que les formes entières et homogènes du type

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^m + a_1 x_1^{m-1} x_2 + \dots + a_m x_2^m$$

et dans celles-ci il suffira de considérer leurs zéros fixes indépendants de u.

Toute forme entière peut être décomposée explicitement et d'une seule façon en un produit de formes linéaires et homogènes en nombre égal à son degré d'homogénéité et leurs zéros sont également les zéros fixes de la forme homogène. Une forme homogène et *entière* ne possède aucun infini.

Au lieu de représenter les formes $f(x_1, x_2)$ par les fonctions (x_1, x_2) avec les zéros fixes (o) et (∞), on peut choisir deux autres formes linéaires

$$\xi_1 = \alpha' x_1 - \alpha'' x_2,$$
$$\xi_2 = \beta' x_1 - \beta'' x_2,$$

avec les zéros $\frac{\alpha''}{\alpha'}$ et $\frac{\beta''}{\beta'}$; ceux-ci ne devront cependant pas coïncider, c'est à dire que les formes ξ_1 et ξ_2 ne doivent pas être équivalentes. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que le déterminant

$$\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''$$

soit différent de zéro. S'il en est ainsi, les deux équations précédentes pourront être résolues sous la forme

$$x_1 = \gamma'\xi_1 - \gamma''\xi_2,$$
$$x_2 = \delta'\xi_1 - \delta''\xi_2,$$

et en faisant cette substitution une forme homogène $f(x_1, x_2)$ se transformera en une autre forme de (ξ_1, ξ_2) de degré égal. Si on pose $\frac{\xi_1}{\xi_2} = \xi$, la fonction ξ aura comme zéro fixe $\left(x = \frac{\alpha''}{\alpha'}\right)$ et comme infini fixe $\left(x = \frac{\beta''}{\beta'}\right)$ et s'écrira

$$\xi = \frac{\alpha' x_1 - \alpha'' x_2}{\beta' x_1 - \beta'' x_2} = \frac{\alpha' x - \alpha''}{\beta' x - \beta''}.$$

ξ se trouve donc être dans ce cas une fraction dont les deux termes sont des fonctions linéaires de x.

La transformation linéaire et homogène de (x_1, x_2) correspond donc entièrement à la transformation fractionnaire et linéaire la plus générale de x.

Si on considère maintenant une forme homogène et *fractionnaire* de (x_1, x_2):

$$F(x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)},$$

nous entendrons par son degré d'homogénéité ou seulement son degré m la différence des degrés de son numérateur et de son dénominateur. Soit donc t une variable arbitraire on aura

$$F(tx_1, tx_2) = t^m F(x_1, x_2)$$

et le nombre m est alors égal au nombre des zéros fixes de F diminué de celui des infinis fixes.

De cette définition du *degré* il résulte immédiatement que toutes les formes homogènes de degré zéro et celles-là seulement sont complètement indépendantes du paramètre u: elles n'ont donc *uniquement* que des zéros et des infinis fixes. La seconde partie de cette proposition est évidente; pour démontrer la première il suffit de faire $m = 0$ et $t = \frac{1}{x_2}$ dans l'équation précédente; on obtient alors

$$F\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right) = F(x, 1) = F(x_1, x_2),$$

ce qui montre de suite que toute forme homogène de degré zéro ne dépend que de x et aucunement de u et que l'on obtient son expression en x, en remplaçant x_1 par x et x_2 par l'unité.

Une autre conséquence de cette proposition est la suivante. On peut mettre dans une classe toutes les formes homogènes de même degré; les formes d'une même classe présentent alors cette propriété tout à fait caractéristique: à savoir que le quotient de deux d'entre elles est égal à une fonction de x *seul* indépendant du paramètre u et ne possède par suite ni zéros ni infinis variables.

En ce qui concerne cette »équivalence relative» des formes on peut remarquer ici en passant, que les propositions qui s'appliquent ici s'énoncent mot pour mot comme celles qui ont trait aux questions analogues dans la théorie supérieure des nombres, toutefois le nombre des classes des formes non équivalentes est évidemment dans ce cas infini puisque le degré d'une forme peut être égal à tout nombre positif ou négatif.

§ 2. *Des fonctions algébriques et des formes homogènes algébriques.*

Soit y une fonction algébrique de x, d'ordre n, y sera donné par une équation irréductible de degré n dont les coefficients rationnels (entiers ou fractionnaires) sont des fonctions de x. Si on divise cette équation par le coefficient de y^n on obtient une équation de la forme suivante:

$$(1) \qquad f(y, x) = y^n + A_1(x)y^{n-1} + A_2(x)y^{n-2} + \ldots + A_n(x) = 0$$

où les n coefficients $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ sont des fonctions rationnelles de x. Faisons de suite la supposition que les coefficients sont déjà mis sous une forme réduite et que par conséquent pour aucun d'eux il n'y aura un diviseur commun au numérateur et au dénominateur.

A chaque valeur $(x = a)$ correspondent n valeurs $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de y que l'on saura calculer avec une approximation donnée en se servant de l'équation

$$(1\,\mathrm{a}) \qquad f(y, a) = y^n + A_1(a)y^{n-1} + \ldots + A_n(a) = 0.$$

Ces valeurs ne seront toutes finies (a ayant par hypothèse une valeur finie) que dans le cas seul ou aucun des n coefficients $A_i(a)$ n'est infini, c'est à dire dans le cas seul ou le facteur linéaire $(x - a)$ ne figure au dénominateur d'aucune des fractions $A_1(x), \ldots, A_n(x)$. Pour $x = \infty$ au contraire les n valeurs de y n'auront une valeur finie que si cette valeur de x n'est un infini pour aucun de ces coefficients; que si, par conséquent, dans tous ces coefficients, le dénominateur se trouve être au moins de degré égal à celui du numérateur.

Considérons maintenant toutes les fonctions rationnelles z de x et y, où y se trouve lié à la variable indépendante x par l'équation (1). Celles-ci constituent alors un domaine dont les membres se reproduisent par les opérations élémentaires de calcul, puisque la somme et la différence, le produit et le quotient de telles fonctions reproduit une fonction de même espèce. L'ensemble de ces fonctions appartient d'après RIEMANN[1]

[1] *Théorie des fonctions abéliennes,* § 12.

à une seule et même *classe* de fonctions algébriques; elles constituent d'après KRONECKER »un genre de fonctions algébriques» que l'on peut caractériser par le symbole $G(y, x)$.

Considérons donc une quelconque des fonctions z de ce genre, on pourra toujours la mettre sous la forme

$$z = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}, \tag{2}$$

φ et ψ désignant des fonctions entières de x et y. Nous ferons dès le début une première hypothèse: c'est que le dénominateur de l'expression (2) n'est pas divisible par la fonction irréductible $f(y, x)$ sans que ce facteur se trouve également au numérateur; car alors z prendrait des valeurs infinies pour toute valeur de x. Dès lors on sait qu'on peut toujours mettre z d'une et d'une seule façon sous la forme d'une fonction entière de y de degré moindre que n à coefficients représentés par des fonctions rationnelles de x. Donc toutes les fonctions z du genre $G(y, x)$ et celles-là seulement pourront se mettre sous la forme

$$z = u_0 + u_1 y + \ldots + u_{n-1} y^{n-1}, \tag{2 a}$$

les coefficients $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ étant des fonctions rationnelles de la variable indépendante x.

Toute fonction z satisfait donc, tout comme y, à une équation algébrique de degré n,

$$z^n + \mathfrak{B}_1(x) z^{n-1} + \ldots + \mathfrak{B}_n(x) = 0 \tag{3}$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x mises sous forme réduite. Pour obtenir cette équation de la façon la plus simple on ramène les n produits

$$z, zy, \ldots, zy^{n-1}$$

à être de degré $(n - 1)$ en y au moyen de l'équation (1). Des n équations linéaires dont l'expression générale est

$$zy^{i-1} = \sum_{k=1}^{k=n} u_{ik} y^{k-1}, \qquad [i=1, 2, \ldots, n] \tag{4}$$

où les n^2 coefficients u_{ik} sont des fonctions linéaires et homogènes de

$u_0, \ldots, u_{n-1}$, on déduit, en éliminant $1, y, \ldots, y^{n-1}$, l'équation cherchée sous forme de déterminant

$$(4\,\mathrm{a})\qquad \begin{vmatrix} (u_{11} - z) & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & (u_{22} - z) & \ldots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & (u_{nn} - z) \end{vmatrix} = 0.$$

La fonction algébrique z ne pourra devenir infinie pour une valeur finie $(x = a)$ de la variable indépendante que si le facteur linéaire correspondant $(x - a)$ figure dans le dénominateur commun des n fractions $\mathfrak{B}_1(x), \mathfrak{B}_2(x), \ldots, \mathfrak{B}_n(x)$. Soit $B_0(x)$ ce plus petit dénominateur commun, posons

$$\mathfrak{B}_i = \frac{B_i(x)}{B_0(x)},$$

on pourra écrire l'équation en z sous la forme

$$(5)\qquad B_0(x)z^n + B_1(x)z^{n-1} + \ldots + B_n(x) = 0,$$

et les zéros de $B_0(x)$ correspondront alors seuls à des infinis de z.

On peut maintenant, tout comme dans le chapitre précédent à propos des fonctions rationnelles, représenter les fonctions algébriques z par le quotient de deux autres fonctions, qui ne deviennent jamais infinies; le dénominateur s'annulera pour tous les infinis et le numérateur pour tous les zéros, tant que ceux-ci conserveront des valeurs finies. Si on pose

$$(6)\qquad z = \frac{z_1}{B_0(x)},$$

on voit immédiatement que la fonction entière $B_0(x)$ ne devient infinie pour aucune valeur finie de x.

Il en est de même du numérateur z_1, car si on remplace z par sa valeur (6) dans l'équation (5), on reconnaît que z_1 satisfait à l'équation

$$(7)\qquad z_1^n + B_1(x)z_1^{n-1} + B_0(x)B_2(x)z_1^{n-2} + \ldots + B_0(x)^{n-1}B_n(x) = 0$$

dont les coefficients sont des fonctions entières de x qui ne deviennent jamais infinies pour des valeurs finies de la variable, ce qui démontre la proposition.

Il est au contraire impossible avec les moyens dont nous disposons ici de représenter la fonction algébrique z par le quotient de deux quantités qui restent toujours finies, dès que la variable indépendante peut prendre la valeur $(x = \infty)$, puisqu'alors le numérateur de la fraction (6) comme aussi son dénominateur devient infini. Mais si on emploie et généralise le mode de représentation des fonctions par des formes homogènes, mode exposé dans le chapitre précédent, on pourra également dans le cas actuel représenter avec facilité toute fonction algébrique par le quotient de deux formes, qui toutes deux restent finies pour des valeurs finies *et* infinies de la variable.

Dans ce but multiplions l'équation fondamentale (1) qui donne y, par le dénominateur commun de toutes les fonctions fractionnaires $A_1(x), \ldots, A_n(x)$, on obtient alors la nouvelle forme d'équation

$$\bar{A}_0(x)y^n + \bar{A}_1(x)y^{n-1} + \ldots + \bar{A}_n(x) = 0,$$

où $\bar{A}_0(x), \ldots, \bar{A}_n(x)$ représentent des fonctions entières de x sans diviseur commun dont le degré en x soit au plus égal à m. Remplaçons maintenant dans celles-ci x par le quotient des formes $\frac{x_1}{x_2}$ et chassons le dénominateur x_2^m qui s'introduit par cette substitution, en multipliant tous les termes par celui-ci; l'équation précédente se transforme alors en la suivante:

$$(7) \qquad A_0(x_1, x_2)y^n + A_1(x_1, x_2)y^{n-1} + \ldots + A_n(x_1, x_2) = 0,$$

où maintenant les coefficients $A_i(x_1, x_2)$ représentent des formes homogènes de (x_1, x_2) et de degré m.

Il en résulte immédiatement que y ne peut devenir infini que pour les zéros *fixes* de $A_0(x_1, x_2)$, parce que les autres coefficients ont tous leurs infinis variables avec le paramètre u et par suite dépendent de celui-ci et que y lui-même est complètement indépendant de u.

Grâce à cette forme de l'équation (1), s'offre maintenant à nous une représentation de la variable y comme quotient de deux formes toujours finies, qui sera d'une importance capitale dans les considérations qui vont suivre. Posons en effet:

$$y = \frac{\eta}{A_0(x_1, x_2)}; \tag{8}$$

il résulte de l'équation (7) que η satisfait à l'équation algébrique suivante

$$0 = \eta^n + A_1(x_1, x_2)\eta^{n-1} + A_2(x_1, x_2)A_0(x_1, x_2)\eta^{n-2} + \dots$$
$$+ A_n(x_1, x_2)A_0^{n-1}(x_1, x_2)$$

ou plus simplement

$$\eta^n + \mathfrak{A}_1(x_1, x_2)\eta^{n-1} + \mathfrak{A}_2(x_1, x_2)\eta^{n-2} + \dots + \mathfrak{A}_n(x_1, x_2) = 0, \tag{9}$$

où maintenant les n coefficients

$$\mathfrak{A}_1(x_1, x_2)\,,\ \mathfrak{A}_2(x_1, x_2)\,,\ \dots,\ \mathfrak{A}_n(x_1, x_2)$$

sont des formes entières et homogènes de (x_1, x_2) et de degré

$$m\,,\ 2m\,,\ \dots,\ nm.$$

Il en résulte que η ne possède aucun infini fixe, car les infinis des coefficients $\mathfrak{A}_i(x_1, x_2)$ dépendent tous de u. On voit de même que le dénominateur de la fraction (8) ne possède aucun infini fixe; y ne dépendant aucunement de u, il s'en suit que cette fonction ne peut ni s'annuler ni devenir infinie soit pour les zéros variables du quotient $\frac{\eta}{A_0}$ soit pour ses infinis variables.

On voit donc que ce sont les zéros et les infinis *fixes* seuls de cette forme qui correspondent à des zéros et infinis de la fonction algébrique y, et comme enfin dans ce quotient il n'existe aucun infini fixe soit pour le numérateur, soit pour le dénominateur, il s'en suit que les zéros de y correspondent seulement aux zéros du numérateur η, et ses infinis aux zéros fixes du dénominateur $A_0(x_1, x_2)$.

Il est maintenant aisé de représenter toute fonction rationnelle $f(x, y)$ de x et y, ou toute quantité du genre $G(y, x)$, par le quotient de deux formes n'ayant chacune que des zéros fixes sans posséder aucun infini fixe. Posons en effet:

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \qquad y = \frac{\eta}{A_0(x_1, x_2)};$$

$f(x, y)$ se transforme en

$$f(x, y) = f\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{\eta}{A_0(x_1, x_2)}\right) = F(x_1, x_2, \eta),$$

$F(x_1, x_2, \eta)$ étant une fonction rationnelle des trois variables qui se trouve aussi en quelque sorte être homogène, car elle reste invariable quand on y remplace

$$(x_1, x_2, \eta) \quad \text{par} \quad (tx_1, tx_2, t^m\eta).$$

On a donc

$$F(tx_1, tx_2, t^m\eta) = F(x_1, x_2, \eta). \tag{10}$$

Car tandis que x_1, x_2, η prennent ainsi des formes différentes, les quotients $x = \frac{x_1}{x_2}$, $y = \frac{\eta}{A_0(x_1, x_2)}$ ne changent pas quand on effectue cette substitution. Inversement on reconnaît que toute fonction rationnelle $F(x_1, x_2, \eta)$ qui satisfait à l'équation (10) pour une variable t, est nécessairement égale à une fonction rationnelle de x et y et par conséquent est indépendante du paramètre u. Car si on remplace la variable t par $\frac{1}{x_2}$ l'équation (10) devient

$$F(x_1, x_2, \eta) = F\left(\frac{x_1}{x_2}, 1, \frac{\eta}{x_2^m}\right) = F(x, 1, yA_0(x, 1)),$$

ce qui démontre la proposition.

Or toute fonction rationnelle de (x_1, x_2, η) peut se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières, à savoir:

$$F(x_1, x_2, \eta) = \frac{f(x_1, x_2, \eta)}{g(x_1, x_2, \eta)}.$$

Si on veut que ce quotient soit indépendant du paramètre u, si on veut par suite que pour une variable t l'identité suivante ait lieu, à savoir:

$$\frac{f(tx_1, tx_2, t^m\eta)}{g(tx_1, tx_2, t^m\eta)} = \frac{f(x_1, x_2, \eta)}{g(x_1, x_2, \eta)}$$

il faudra, à une même puissance de t près, que numérateur et dénominateur restent chacun invariable quand on y effectue cette substitution; ces deux fonctions devront donc satisfaire à l'équation

$$(11) \qquad \begin{cases} f(tx_1, tx_2, t^m\eta) = t^\mu f(x_1, x_2, \eta), \\ g(tx_1, tx_2, t^m\eta) = t^\mu g(x_1, x_2, \eta), \end{cases}$$

μ étant un nombre arbitraire, entier et positif. En effet si f et g satisfont à ces conditions leur quotient sera indépendant de t et par suite du paramètre u. Si cette condition n'est pas remplie, on peut évidemment réunir dans f comme dans g tous les produits de la forme $x_1^\alpha x_2^\beta \eta^\gamma$ en un seul et même terme, qui après cette substitution de $tx_1, tx_2, t^m\eta$, à x_1, x_2, η contiennent la même puissance de t en facteur. Soit donc

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_h}{g_1 + g_2 + \ldots + g_k}$$

on obtiendra pour ce quotient, la substitution étant effectuée, une expression de la forme

$$\frac{t^{\mu_1}f_1 + t^{\mu_2}f_2 + \ldots + t^{\mu_h}f_h}{t^{\nu_1}g_1 + t^{\nu_2}g_2 + \ldots + t^{\nu_k}g_k}$$

qui ne peut être indépendante de la variable t que dans le cas seul où celle-ci disparaît entièrement du quotient, c'est à dire si

$$h = k = 1, \qquad \mu_1 = \nu_1 = \mu,$$

et cette condition revient à celle exprimée par les équations (11).

Une fonction rationnelle $F(x_1, x_2, \eta)$ qui jouit de la propriété suivante: à savoir que l'on a identiquement

$$F(tx_1, tx_2, t^m\eta) = t^\mu F(x_1, x_2, \eta),$$

s'appellera une *fonction homogène* de ces trois quantités et le nombre entier μ (qui peut être positif, nul ou négatif) portera le nom de degré d'homogénéité ou seulement de degré de $F(x_1, x_2, \eta)$. La proposition exprimée par l'équation (10) pourra dès lors s'énoncer plus simplement comme il suit:

Une fonction rationnelle $F(x_1, x_2, \eta)$ n'est égale à une fonction rationnelle de x et y (et par suite n'est indépendante du paramètre u) que dans le cas seul où elle est une fonction homogène de degré o.

La proposition qu'on vient de trouver prend alors la forme suivante:

Toute fonction rationnelle de x et y peut se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières et homogènes de (x_1, x_2, η) de même degré, et inversement tout quotient de cette espèce est égal à une fonction de x et y.

Soit donc maintenant une fonction arbitraire représentée de cette façon par le quotient

$$F(x, y) = \frac{f(x_1, x_2, \eta)}{g(x_1, x_2, \eta)},$$

le numérateur et le dénominateur étant des fonctions *entières* et homogènes de (x_1, x_2, η), on reconnaît de nouveau que les zéros et les infinis variables du numérateur et du dénominateur, c'est à dire ceux qui dépendent du paramètre u, ne peuvent être en aucune façon des valeurs singulières de $F(x, y)$, puisque cette fonction ne contient aucunement ce paramètre. Les valeurs singulières de F ne peuvent donc se présenter que pour les zéros et infinis *fixes* de f et g. Les fonctions *entières* $f(x_1, x_2, \eta)$ et $g(x_1, x_2, \eta)$ ne possèdent aucun infini fixe mais seulement des zéros fixes, puisque x_1, x_2, η n'ont eux-mêmes que de telles valeurs singulières. Donc les zéros de $F(x, y)$ se trouvent seulement parmi les zéros fixes du numérateur $f(x_1, x_2, \eta)$, et les infinis de $F(x, y)$ seulement parmi les zéros *fixes* du dénominateur $g(x_1, x_2, \eta)$. Toute fonction $F(x, y)$ est maintenant mise sous la forme d'un quotient de deux fonctions qui ne deviennent jamais infinies indépendamment du paramètre u. Comme enfin on peut représenter toute fonction du genre $G(y, x)$ par le quotient de deux fonctions de x_1, x_2, η entières et homogènes, nous sommes conduits dans la suite à n'étudier que des fonctions *entières et homogènes* de x_1, x_2, η; et comme ce sont leurs zéros *fixes* qui interviennent seuls dans ce mode de représentation nous ne considérerons que ceux-là, sans nous occuper des valeurs singulières variables avec le paramètre u.

De même que pour les formes en (x_1, x_2) on pourra aussi ranger en classes les fonctions homogènes de (x_1, x_2, η) selon leur degré μ. Les fonctions de degré o se distinguent des autres en ce que seules elles sont égales à des fonctions rationnelles du genre $G(y, x)$; elles sont par suite indépendantes du paramètre u. C'est donc à bon droit que nous désignerons cette classe de fonctions homogènes par »classe principale».

Nous tirons de suite comme conséquence immédiate du second théorème qui vient d'être énoncé la conclusion suivante: le quotient de deux fonctions $F(x_1, x_2, \eta)$, $G(x_1, x_2, \eta)$ de même classe est égal à une fonction de la »classe principale» ou à une fonction du genre $G(y, x)$; ou ce qui revient au même: deux fonctions d'une même classe sont toujours proportionnelles à deux fonctions rationnelles de (x, y). Nous pouvons encore dans ce cas, poursuivant plus loin l'analogie avec les définitions correspondantes de la théorie des nombres, considérer deux fonctions de la même classe comme »relativement équivalentes». En particulier toute fonction homogène de (x_1, x_2, η) est équivalente à une fonction homogène de (x_1, x_2), par exemple à x_2^μ, l'exposant μ étant égal à son degré.

§ 3. *Des formes homogènes entières et de leur représentation par un système fondamental.*

Il résulte des propositions énoncées dans le chapitre précédent qu'au lieu de considérer les fonctions du genre $G(y, x)$ elles-mêmes, il suffit d'étudier les fonctions de (x_1, x_2, η) rationnelles et homogènes en supposant que η satisfait à l'équation irréductible (9) trouvée au chapitre précédent, à savoir:

$$\eta^n + \mathfrak{A}_1(x_1, x_2)\eta^{n-1} + \ldots + \mathfrak{A}_n(x_1, x_2) = 0, \tag{1}$$

et nous n'aurons besoin de considérer ici que les valeurs singulières fixes, c'est-à-dire indépendantes de u. Ces fonctions constituent aussi à elles seules une suite indéfinie, un genre, dont les divers membres, avec une modification naturelle que l'on va indiquer, se reproduisent par les opérations de calcul élémentaires: addition, soustraction, multiplication, division. Si on suppose en effet que η_1 et η_2 soient deux fonctions homogènes arbitraires de (x_1, x_2, η), μ_1 et μ_2 étant leurs degrés respectifs, on voit que $\eta_1\eta_2$ et $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ sont également des fonctions homogènes de degré $\mu_1 + \mu_2$ et $\mu_1 - \mu_2$. On généraliserait cette propriété pour le produit d'un nombre quelconque de fonctions η. Au contraire la somme et la différence de η_1 et η_2 ne seront homogènes que dans le cas particulier seul où ces fonctions sont de même degré, où par conséquent elles appartiennent à une même classe. C'est pour cette raison que dans ce qui va suivre nous n'effectuerons l'addition que pour les fonctions de même classe. Puisque, sous cette restriction, les fonctions rationnelles de (x_1, x_2, η) forment un ensemble fermé, il convient d'appeler cet ensemble un genre. Nous la désignerons par le symbole $G(x_1, x_2, \eta)$.

Les considérations suivantes coïncident au fond avec celles qu'on a exposées au commencement du chapitre précédent, aussi suffit-il de n'indiquer ici que les résultats correspondants.

Chaque fonction w du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ peut se mettre d'une et d'une seule façon sous la forme d'une fonction de degré $(n - 1)$ de η, à savoir:

$$w = u_0 + u_1\eta + \dots + u_{n-1}\eta^{n-1}, \tag{2}$$

$u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ représentant des fonctions rationnelles de (x_1, x_2) seulement, fonctions entières ou fractionnaires. Car à cause de l'irréductibilité de l'équation en y, irréductibilité qu'on a supposée exister, et qui entraîne aussi celle de l'équation en η, une équation

$$u_0 + u_1\eta + \dots + u_{n-1}\eta^{n-1} = 0 \tag{2 a}$$

ne saurait exister que si tous les n coefficients $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ sont simultanément nuls. Nous désignerons pour cette raison les n fonctions

$$1, \eta, \eta^2, \dots, \eta^{n-1} \tag{2 b}$$

comme un système de fonctions linéairement indépendantes du genre $G(x_1, x_2, \eta)$, car elles ne sauraient être reliées par aucune équation linéaire (2 a).

Il est clair qu'on peut trouver une infinité de pareils systèmes de n fonctions linéairement indépendantes. Soient en effet

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \tag{2 c}$$

n fonctions homogènes du genre G, si on les exprime séparément au moyen des fonctions (2 a) on obtient les équations suivantes au nombre de n

$$
(2\text{ d})\qquad
\begin{cases}
\eta_1 = u_{10} + u_{11}\eta + \ldots + u_{1\,n-1}\eta^{n-1}, \\
\eta_2 = u_{20} + u_{21}\eta + \ldots + u_{2\,n-1}\eta^{n-1}, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\eta_n = u_{n0} + u_{n1}\eta + \ldots + u_{n\,n-1}\eta^{n-1},
\end{cases}
$$

où les coefficients u_{ik} sont des fonctions homogènes de (x_1, x_2). Si le déterminant de la substitution, à savoir:

$$
|u_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,n \\ k=0,1,\ldots,n-1 \end{pmatrix}
$$

est différent de zéro, on pourra exprimer les valeurs $(1, \eta, \ldots, \eta^{n-1})$ en fonction du système $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$; ces dernières fonctions sont donc linéairement indépendantes. Si ce même déterminant est nul, on sait qu'on pourra trouver n fonctions $u_1(x_1, x_2), \ldots, u_n(x_1, x_2)$ non toutes nulles, telles que l'équation

$$
u_1\eta_1 + \ldots + u_n\eta_n = 0,
$$

soit satisfaite identiquement, parce que tous les coefficients de $1, \eta, \ldots, \eta^{n-1}$ s'annulent quand on y remplace $\eta_1, \ldots, \eta_n$ par leur valeur donnée par (2 d). Dans ce cas les n fonctions $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ ne sont pas linéairement indépendantes.

Soit μ le degré de w dans (2), le degré de chacun des n produits $u_i\eta^i$ est égal à μ. Comme m est le degré de η et par suite mi celui de η^i, on trouve que le degré λ_i de u_i est égal à $\mu - mi$.

Si en particulier w est une fonction *entière* et rationnelle de (x_1, x_2, η), $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sont aussi des fonctions *entières* et homogènes de (x_1, x_2) et comme leur degré est toujours un nombre entier positif, tous les coefficients u_i pour lesquels le nombre $(\mu - mi)$ serait négatif devront dans ce cas manquer dans la représentation (2).

Toute fonction w du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ satisfait à une équation de degré n

$$
(3)\qquad F(w) = w^n + B_1(x_1, x_2)w^{n-1} + \ldots + B_n(x_1, x_2) = 0
$$

dont les coefficients dépendent de (x_1, x_2).

Ici encore, il est très facile de former cette équation par l'élimination de η entre les n équations

$$
(3\text{ a})\qquad w\eta^{i-1} = \Sigma u_{ik}\eta^{k-1} \qquad {\scriptstyle (i=1,\ldots,n)}
$$

que l'on obtient en réduisant au degré $(n-1)$ en η les n produits $w\eta^{i-1}$ en se servant de l'équation (1). L'éliminant peut s'écrire alors sous la forme du déterminant suivant

$$\text{(3 b)} \qquad \begin{vmatrix} (u_{11}-w) & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & (u_{22}-w) & \dots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & (u_{nn}-w) \end{vmatrix} = 0.$$

Il convient de remarquer que l'équation qu'on vient de former n'est pas nécessairement l'équation de moindre degré à laquelle satisfasse w. Dans la suite nous indiquerons un moyen qui pour chaque valeur w permettra de trouver facilement l'équation de moindre degré

$$\text{(4)} \qquad \varphi(w) = w^e + B_1(x_1, x_2)w^{e-1} + \dots + B_e(x_1, x_2) = 0,$$

à laquelle elle satisfait et qui par suite n'est plus réductible. On démontre alors par des théorèmes connus que si w satisfait à une autre équation $\varphi_1(w) = 0$, $\varphi_1(w)$ est nécessairement divisible par la fonction irréductible $\varphi(w)$. En particulier la fonction (3) que nous avons trouvée précédemment est toujours divisible par $\varphi(w)$.

Soit μ le degré de la fonction homogène w, w et la puissance x_2^μ appartiennent alors à une même classe, et le quotient

$$z = \frac{w}{x_2^\mu}$$

est par conséquent complètement indépendant du paramètre u. Remplaçons w dans(4) par zx_2^μ, z satisfera alors à l'équation

$$0 = z^e + \frac{B_1(x_1, x_2)}{x_2^\mu} z^{e-1} + \frac{B_2(x_1, x_2)}{x_2^{2\mu}} z^{e-2} + \dots + \frac{B_e(x_1, x_2)}{x_2^{e\mu}};$$

il en résulte que les coefficients de cette équation sont également indépendants de u.

Remarquons que cette expression ne saurait se décomposer en plusieurs autres de degré différent, car chacune devrait alors être séparément nulle, il s'en suivrait que z, et par conséquent aussi w, satisferait à une équation de degré inférieur à e, ce qui est contraire à l'hypothèse précédente.

Donc chacun de ces coefficients est une fonction homogène (entière ou fractionnaire) de x_1, x_2 et les degrés de

$$B_1(x_1, x_2), \; B_2(x_1, x_2), \; \ldots, \; B_e(x_1, x_2)$$

sont respectivement

$$\mu, \; 2\mu, \; \ldots, \; e\mu,$$

μ étant le degré de w. Nous considérerons dès le début tous ces coefficients sous leur forme réduite, nous supposerons donc que les facteurs linéaires de la forme $(\alpha' x_1 - \alpha'' x_2)$ qui pourraient se trouver communs au numérateur et au dénominateur ont été supprimés préalablement.

L'équation (4) définit w comme une fonction algébrique et bien déterminée de x, pour toute valeur fixe du paramètre u; ou, ce qui en revient au même, cette équation représente pour toute valeur de u une courbe algébrique bien déterminée. A une valeur $x = a$ correspondent des valeurs de w finies, ou des points de la courbe à distance finie, dans le cas et dans le cas seul où aucun des e coefficients $B_i(x_1, x_2)$ ne devient infini pour cette valeur de x. Nous appellerons au contraire cette valeur $(x = a)$ un infini de w, si au moins un de ces coefficients et par suite aussi au moins une des e valeurs correspondantes de w devient infinie pour cette valeur.

Si on laisse u prendre toutes les valeurs possibles, w représente un faisceau de fonctions algébriques, l'équation (4) en w détermine donc un faisceau de courbes algébriques.

Nous appellerons la valeur $(x = a)$ un infini *fixe* de w dans le cas où pour *chaque* valeur de u elle est un infini de w, dans le cas, par conséquent, où toutes les courbes du faisceau ont en cet endroit au moins un point fixe à distance infinie. La valeur $x = a$, ou, comme nous pouvons encore écrire, la valeur

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a'}{a''} = a$$

est un tel infini fixe et ne l'est que dans le cas seul où le facteur linéaire $(\alpha' x_1 - \alpha'' x_2)$ correspondant à cette valeur, se trouve en dénominateur dans au moins un des coefficients $B_i(x_1, x_2)$. Si ce n'est pas là le cas, on peut toujours choisir le paramètre u d'une infinité de manières de façon que les valeurs correspondantes de w se trouvent toutes être finies.

Une importance toute particulière doit être attachée aux fonctions w, qui, quelle que soit la valeur de x correspondante, ne possèdent aucun infini *fixe*, qui correspondent par conséquent à un faisceau de courbes n'ayant aucun point *commun* situé à l'infini. Celles-ci sont évidemment caractérisées en ce que les e coefficients $B_i(x_1, x_2)$ qui figurent dans l'équation (4) n'ont aucun dénominateur, qu'elles sont par suite des fonctions *entières* et homogènes de x_1, x_2. Une telle fonction w doitêtre appelée une fonction *algébrique entière* ou une fonction *entière* du genre $G(x_1, x_2, \eta)$.

De cette définition des fonctions algébriques et entières on déduit immédiatement une suite de propriétés qui leur appartiennent. Il résulte d'abord que l'hypothèse que nous avons faite ici à savoir que w est une fonction algébrique entière peut être remplacée par une bien plus générale. Si w satisfait en effet à n'importe quelle équation, irréductible ou non, $\psi(w) = 0$ dont les coefficients sont des fonctions entières de x_1, x_2, w est également entier et algébrique. Car soit $\varphi(w) = 0$ l'équation de moindre degré qui détermine w, $\varphi(w)$ sera un diviseur de $\psi(w)$, on aura donc

$$\psi(w) = \varphi(w)\theta(w)$$

et on démontre aisément que $\varphi(w)$ a comme coefficients des fonctions entières de x_1, x_2, si tel est le cas pour $\psi(w)$. En particulier w est toujours algébriquement entier lorsque l'équation (3) de degré n a ses coefficients entiers.

Une fonction homogène w a aussi le caractère d'être algébriquement entière quand on peut déterminer d'une infinité de façons le paramètre u de manière que toutes les quantités conjuguées à w possèdent des valeurs finies pour une valeur arbitraire $x = a$ donnée à l'avance.

Considérons maintenant deux fonctions w_1 et w_2 algébriques et entières et déterminons le paramètre u de façon que les quantités conjuguées à w_1 *et* à w_2 soient finies pour cette valeur $x = a$, il en sera alors de même pour leur somme $w_1 + w_2$ et leur produit $w_1 w_2$, et comme cette propriété peut être étendue à un nombre quelconque de grandeurs algébriques et entières, on peut énoncer le théorème suivant:

La somme et le produit d'un nombre quelconque de fonctions algébriques et entières est aussi une fonction algébriquement entière.

Il s'en suit immédiatement que tout polynome en η dont les coefficients sont des formes de x_1, x_2 entières et homogènes est également algébriquement entière, et comme une telle fonction de η peut toujours se ramener au degré $(n - 1)$, on peut énoncer le théorème suivant:

Toute quantité w du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ est algébriquement entière, quand, en la mettant sous la forme

$$w = u_0 + u_1\eta + \ldots + u_{n-1}\eta^{n-1} \tag{5}$$

les formes homogènes $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ sont toutes des fonctions entières.

Les n quantités $(1, \eta, \ldots, \eta^{n-1})$ forment donc aussi un système de n fonctions *entières* et linéairement indépendantes du genre $G(x_1, x_2, \eta)$. On peut évidemment trouver une infinité de systèmes de fonctions linéaires, indépendantes, *entières* et algébriques. Soit en effet $\eta_1, \ldots, \eta_n$, n fonctions algébriquement entières et soit en général:

$$\eta_i = u_{i0} + u_{i1}\eta + \ldots + u_{i,n-1}\eta^{n-1}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

on démontre exactement de la même manière que précédemment que ces fonctions sont indépendantes dans le cas seul où le déterminant de la sub stitution

$$|u_{ik}|$$

n'est pas identiquement nul. Une importance toute particulière s'attache ici au degré total d'un pareil système $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ de quantités entières indépendantes, je veux dire à la somme des degrés des n fonctions $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. Celle-ci se trouve évidemment être, pour le système $1, \eta, \ldots, \eta^{n-1}$

$$0 + m + 2m + \ldots + (n-1)m = m\frac{n(n-1)}{2}.$$

Comme le degré d'une fonction entière et homogène ne peut jamais être un nombre entier négatif, il en est de même également du degré total d'un système de fonctions indépendantes et entières.

Toute quantité du genre peut être mise sous la forme (5), cependant les coefficients $u_0, \dots, u_{n-1}$ seront en général des formes de (x_1, x_2) *fractionnaires* et homogènes. Si on réduit tous ces coefficients au même dénominateur, chaque forme homogène de ce genre, qu'elle soit algébriquement entière ou non, se présente sous la forme

$$w = \frac{u_0 + u_1\eta + \dots + u_{n-1}\eta^{n-1}}{N(x_1, x_2)}, \tag{6}$$

les coefficients $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ et le dénominateur $N(x_1, x_2)$ étant des formes de (x_1, x_2) seulement, entières et homogènes. On peut même dès le début supposer que ces $(n + 1)$ formes de (x_1, x_2) n'ont plus aucun facteur linéaire commun puisqu'on pourra toujours commencer par déterminer celui-ci et par le supprimer. Donc, puisque dans ce mode de représentation de w sous forme de fraction, ni dénominateur ni numérateur ne possède un infini fixe, il s'en suit que, dans cette représentation des quantités w du genre $G(x_1, x_2, \eta)$, de même que précédemment dans celle des fonctions de (x_1, x_2) seulement, les zéros fixes de w doivent tous se trouver parmi les zéros fixes du numérateur et les infinis parmi les zéros du dénominateur.

Par contre la représentation des quantités w du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ sous la forme (6) est encore très défectueuse en ce que la fraction qui y figure n'est pas réduite de façon que son numérateur s'annule *seulement* pour les zéros de w et son dénominateur *seulement* pour les infinis de cette même fonction. Par les considérations suivantes je veux montrer, comment on peut lever cet inconvenient.

On peut considérer d'abord le cas où un des facteurs linéaires du dénominateur, soit:

$$\xi_1 = \alpha' x_1 - \alpha'' x_2,$$

se trouve contenu dans le numérateur bien qu'il ne soit pas en facteur dans les n coefficients $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$, c'est à dire, que le quotient

$$\bar{\eta} = \frac{u_0 + u_1\eta + \dots + u_{n-1}\eta^{n-1}}{\xi_1} \tag{6 a}$$

soit algébriquement entier, sans que le facteur linéaire ξ_1 au dénominateur puisse s'enlever directement.

Si tel est le cas, nous prouverons tout de suite par une considération facile qu'alors le système $(1, \eta, \ldots, \eta^{n-1})$ peut être remplacé par un autre système de fonctions entières et algébriques, dont le degré total est inférieur d'une unité à celui du premier système; on peut abaisser de nouveau le degré de ce second système, dans le cas où une quantité algébriquement entière ne peut être représentée par ce nouveau système que sous forme fractionnaire et ainsi de suite. Le degré total d'un tel système ne pouvant jamais être négatif, on doit nécessairement finir par arriver à un système

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \tag{7}$$

de n quantités linéairement indépendantes, entières et algébriques, qui peuvent servir à représenter toutes les fonctions algébriquement entières par des formes linéaires et homogènes, n'ayant aucun dénominateur $N(x_1, x_2)$, c'est à dire dont les coefficients sont des fonctions entières de (x_1, x_2).

Un tel système (7) sera appelé un système fondamental du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ et on peut maintenant énoncer comme il suit sa propriété caractéristique:

> Soit $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ un système fondamental d'un genre $G(x_1, x_2, \eta)$, toutes les fonctions algébriquement entières de celui-ci et celles-là seulement sont comprises dans la forme
>
> $$u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \ldots + u_n\xi_n,$$
>
> $u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant des formes *entières* et homogènes de x_1, x_2.

La remarque suivante démontre l'existence réelle d'un pareil système fondamental pour tout genre $G(x_1, x_2, \eta)$. Si le système $(1, \eta, \ldots, \eta^{n-1})$ n'est pas un système fondamental, il existe au moins une fonction homogène

$$\eta_0 = \frac{u_0(x_1, x_2) + u_1(x_1, x_2)\eta + \ldots + u_{n-1}(x_1, x_2)\eta^{n-1}}{\xi_1} \tag{8}$$

qui est algébriquement entière, bien que le facteur linéaire ξ_1 ne soit pas contenu dans tous les n coefficients $u_i(x_1, x_2)$ du numérateur.

Soit ξ_2 un facteur linéaire quelconque qui ne soit pas équivalent à ξ_1, soit donc

$$\xi_1 = \alpha' x_1 - \alpha'' x_2,$$
$$\xi_2 = \beta' x_1 - \beta'' x_2,$$

où les zéros $\frac{\alpha''}{\alpha'}$ et $\frac{\beta''}{\beta'}$ de ξ_1 et ξ_2 ne coïncident pas, on peut remplacer x_1 et x_2 par leur valeur en ξ_1, ξ_2 dans les coefficients $u_i(x_1, x_2)$; η_0 deviendra dans ce cas

$$\eta_0 = \frac{\bar{u}_0(\xi_1, \xi_2) + \bar{u}_1(\xi_1, \xi_2)\eta + \ldots + \bar{u}_{n-1}(\xi_1, \xi_2)\eta^{n-1}}{\xi_1}. \tag{8 a}$$

Si maintenant dans chacune des n formes homogènes $\bar{u}_i(\xi_1, \xi_2)$ de degré λ_i on sépare des autres le terme indépendant de ξ_1, on pourra écrire le coefficient $\bar{u}_i(\xi_1, \xi_2)$ comme il suit

$$\bar{u}_i(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 u_i'(\xi_1, \xi_2) + v_i \xi_2^{\lambda_i},$$

$v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ étant des constantes.

Posons pour abréger

$$\eta_0' = u_0'(\xi_1, \xi_2) + u_1'(\xi_1, \xi_2)\eta + \ldots + u_{n-1}'(\xi_1, \xi_2)\eta^{n-1},$$

$$\eta_0'' = \frac{v_0 \xi_2^{\lambda_0} + v_1 \xi_2^{\lambda_1}\eta + \ldots + v_{n-1}\xi_2^{\lambda_{n-1}}\eta^{n-1}}{\xi_1}. \tag{9}$$

on obtient pour η_0 la forme suivante:

$$\eta_0 = \eta_0' + \eta_0''$$

ou bien

$$\eta_0'' = \eta_0 - \eta_0',$$

et comme évidemment η_0' est algébriquement entier, il résulte de la dernière équation que la quantité η_0'' trouvée précédemment doit aussi être algébriquement entière.

De ce fait que η_0 et par suite aussi η_0'' est homogène, il résulte que les degrés des produits respectifs $(\xi_2^{\lambda_i}\eta_i)$ du numérateur ont même degré et que par suite chacun des exposants entiers $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ est plus petit que le précédent. Soit donc v_h la dernière constante du numérateur de η_0'' qui soit différente de zéro, on pourra écrire cette fonction sous la forme:

$$\eta_0'' = \xi_2^{\lambda_h} \cdot \frac{v_0 \xi^{\lambda_0 - \lambda_h} + v_1 \xi^{\lambda_1 - \lambda_h} \eta + \ldots + v_h \eta^h}{\xi_1}$$
$$= \xi_2^{\lambda_h} \eta_h ,$$

et il résulte des deux équations relatives à la nouvelle quantité η_h qu'on vient d'introduire, à savoir

$$\eta_h = \frac{\eta_0''}{\xi_2^{\lambda_h}} = \frac{v_0 \xi_2^{\lambda_0 - \lambda_h} + \ldots + v_h \eta^h}{\xi_1},$$

que η_h est aussi algébriquement entier, parce que d'après la première expression η_h ne possède aucun infini fixe pour le zéro de ξ_1 et d'après la seconde il n'en a pas pour le zéro de ξ_2; et parce qu'il ne peut en aucune façon posséder d'autres infinis. Si on remplace maintenant le système primitif

$$(10) \qquad 1, \eta, \ldots, \eta^h, \ldots, \eta^{n-1},$$

par le nouveau

$$(10\,\mathrm{a}) \qquad 1, \eta, \ldots, \eta_h, \ldots, \eta^{n-1}$$

dans lequel le seul élément nouveau η_h dépend de ceux du système (10) par l'équation

$$(11) \qquad \eta_h = \frac{v_0 \xi_2^{\lambda_0 - \lambda_h}}{\xi_1} + \frac{v_1 \xi_2^{\lambda_1 - \lambda_h}}{\xi_1} \eta + \ldots + \frac{v_h}{\xi_1} \eta^h,$$

on reconnaît que (10 a) est également un système de quantités entières algébriques *linéairement indépendantes,* parce qu'on voit immédiatement que les éléments du premier système (10) peuvent s'exprimer au moyen de ceux du second; on voit aussi d'après (11) que le degré total du second système est inférieur d'une unité à celui du premier, car le degré de la seule fonction nouvelle η_h qui y figure est égal non pas à celui de η^h mais à celui de $\frac{\eta^h}{\xi_1}$.

Si ce second système $(1, \eta, \ldots, \eta_h, \ldots, \eta^{n-1})$ n'est encore pas un système fondamental, on montrerait exactement comme on vient de le faire, qu'on peut remplacer de nouveau ce système par un autre de degré encore moindre, et en continuant ainsi on arrive nécessairement à un système fondamental $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Il est cependant bon de faire remarquer ici que par la méthode simple indiquée, on a seulement établi *l'existence* d'un pareil système fondamental, mais qu'on n'a pas pour autant indiqué un moyen pour le trouver même dans les cas les plus simples, et c'est précisement ce dernier point qui, dans toutes les applications de la théorie, se trouve être d'une importance capitale. On pourrait, il est vrai, en ne cherchant que la clareté et le côté purement abstrait et philosophique, se contenter de l'aperçu qu'on vient de donner pour en faire, sans grande peine, le fondement d'une théorie complète des fonctions algébriques, ou, ce qui en revient au même, des courbes algébriques. Cette théorie cependant aurait le très grave inconvénient de ne pouvoir à elle seule servir à déterminer en aucune façon les propriétés de n'importe quelle classe déterminée de courbes algébriques. C'est pourquoi je veux démontrer dans la suite, qu'on peut, en partant d'un système donné arbitrairement de n fonctions indépendantes algébriques et entières (par exemple en partant du système considéré précédemment $1, \eta, \ldots, \eta^{n-1}$) arriver toujours par la résolution seule d'un certain nombre d'équations linéaires à un système fondamental.

Par les considérations que nous venons d'exposer nous avons résolu une question dont on verra l'importance dans la suite. Soit en effet $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ un système de n fonctions indépendantes entières et algébriques, supposons qu'on connaisse une fonction entière $\bar{\eta}$ qui, exprimée au moyen de ce système, se présente sous la forme fractionnaire suivante

$$\bar{\eta} = \frac{u_1(x_1, x_2)\eta_1 + \ldots + u_n(x_1, x_2)\eta_n}{\xi_1},$$

sans que le facteur linéaire ξ_1 en dénominateur soit contenu dans tous les coefficients $u_i(x_1, x_2)$ du numérateur, dans ce cas $\bar{\eta}$ et $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ donnent lieu à un nouveau système de n fonctions $(\eta'_1, \ldots, \eta'_n)$ indépendantes et entières dont le degré total est inférieur d'une unité à celui du système précédent et qu'on peut déterminer par la méthode exposée plus haut. On reconnaît en passant, sans en dire plus long, que ce nouveau système permet de représenter $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ aussi bien que $\bar{\eta}$ sans dénominateur. Toute la tâche qui nous reste encore à faire consiste donc à trouver toutes les fonctions algébriques et entières $\bar{\eta}$ qui, exprimées au moyen d'un système $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, se présentent sous forme fractionnaire.

§ 4. *Des propriétés principales du système fondamental.*

Avant de passer à la formation d'un système fondamental nous allons mettre en lumière quelques-unes de ses propriétés pour montrer quelle étroite parenté existe entre le système fondamental et le genre $G(x_1, x_2, \eta)$ déjà étudié.

Pour faciliter la lecture nous désignerons dans tout ce qui suit par le symbole $[\eta]$ le degré d'une fonction homogène η de x_1, x_2, η. On a alors les équations

$$[\eta'\eta''] = [\eta'] + [\eta''],$$

$$\left[\frac{\eta'}{\eta''}\right] = [\eta'] - [\eta''],$$

$$[\eta^r] = r[\eta],$$

dont nous ferons usage dans la suite. De la même manière nous désignerons le degré total de m fonctions homogènes $\eta_1, \ldots, \eta_m$ par $[\eta_1, \ldots, \eta_m]$, c'est à dire nous poserons

$$[\eta_1, \ldots, \eta_m] = [\eta_1] + \cdots + [\eta_m].$$

Une propriété caractéristique du système fondamental d'un genre $G(x_1, x_2, \eta)$ peut s'énoncer par le théorème important suivant:

> Un système $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ de n fonctions indépendantes entières et homogènes n'est un système fondamental que dans le cas seul où son degré total N, est aussi petit que possible, c'est à dire quand le nombre entier
>
> $$N = [\zeta_1] + [\zeta_2] + \cdots + [\zeta_n]$$
> $$= [\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$$
>
> est minimum.

Soit en effet $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ un système indépendant dont le degré est minimum, et supposons que ce système ne soit pas fondamental, il devrait exister au moins une fonction $\bar{\eta}$ entière et algébrique qui représentée par celui-ci se présenterait sous la forme fractionnaire

$$\bar{\eta} = \frac{u_1(x_1, x_2)\eta_1 + \ldots + u_n(x_1, x_2)\eta_n}{\xi_1}.$$

D'après le théorème énoncé à la fin du chapitre précédent on pourrait remplacer ce système par un autre de degré moindre, ce qui est impossible puisque le degré $[\eta_1, \ldots, \eta_n]$ est déjà par hypothèse un minimum. Donc tout système dont le degré est minimum est un système fondamental.

Inversement aussi, le degré d'un système fondamental est minimum. S'il existait en effet un autre système $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ de degré encore moindre, on montrerait facilement que ses n éléments ne sont pas indépendants les uns des autres. Pour le démontrer imaginons-nous les éléments des deux systèmes rangés par ordre de degré croissant, c'est à dire de façon que

$$[\zeta_1] \leqq [\zeta_2] \leqq \cdots \leqq [\zeta_n],$$
$$[\eta_1] \leqq [\eta_2] \leqq \cdots \leqq [\eta_n],$$

et comparons, en commençant par ζ_1 et η_1, les degrés de deux éléments se correspondant dans une même colonne verticale. Comme le degré $[\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ est supérieur à $[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]$, on arrivera nécessairement à deux éléments correspondants ζ_i et η_i pour lesquels on aura

$$[\eta_i] < [\zeta_i]$$

et le degré des i premiers éléments $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i$ sera à fortiori inférieur à celui de ξ_i. Comme $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est un système fondamental, $(\eta_1, \ldots, \eta_i)$ peuvent être représentés par celui-ci linéairement et d'une façon homogène avec des coefficients entiers, on a donc les i équations:

$$(2) \qquad \begin{cases} \eta_1 = \alpha_{11}\zeta_1 + \ldots + \alpha_{1,i-1}\zeta_{i-1}, \\ \eta_2 = \alpha_{21}\zeta_1 + \ldots + \alpha_{2,i-1}\zeta_{i-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_i = \alpha_{i1}\zeta_1 + \ldots + \alpha_{i,i-1}\zeta_{i-1}, \end{cases}$$

où les éléments $\zeta_i, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_n$ ne peuvent intervenir puisqu'ils sont de degré supérieur à celui des éléments $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i$ représentés. Mais si les i fonctions $(\eta_1, \ldots, \eta_i)$ sont exprimables en fonction linéaire et homogène de $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1})$, elles ne sont pas indépendantes les unes des autres, car alors on pourra déterminer i fonctions $A_1, \ldots, A_i$ de (x_1, x_2) différentes de zéro, de manière qu'ils satisfassent à l'équation:

$$A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \ldots + A_i\eta_i = 0$$

parce qu'après la substitution des expression (2) pour $(\eta_1, \ldots, \eta_i)$ tous les coefficients de $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1})$ sont identiquement nuls. Il n'y a donc pas, par suite, de système indépendant $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ de degré moindre que le système fondamental, ce qui démontre entièrement le théorème énoncé précédemment.

Après avoir ainsi trouvé la propriété caractéristique de ce système fondamental, on est tout naturellement conduit à se demander s'il en existe plusieurs, et si tel est le cas, quel rapport les relie entre eux. La solution se trouve donnée par un théorème général, dont voici l'énoncé:

> Soient $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ et $(\zeta_1', \zeta_2', \ldots, \zeta_n')$ deux systèmes fondamentaux du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ ordonnés d'après les degrés de leurs éléments, de sorte qu'en général on ait
>
> $$[\zeta_r] \leqq [\zeta_{r+1}] \quad \text{et} \quad [\zeta_r'] \leqq [\zeta_{r+1}'],$$
>
> deux éléments correspondants ont toujours le même degré, c'est à dire que l'on a
>
> $$[\zeta_r] = [\zeta_r']. \qquad {\scriptstyle (r=1,2,\ldots,n)}$$

Pour démontrer ce théorème, comparons, en commençant par ζ_1 et ζ_1' les degrés de deux éléments correspondants. Si le théorème précédent était faux, on arriverait forcément à la fin à deux éléments correspondants ζ_i et ζ_i' de degré différent tels que

$$[\zeta_i] > [\zeta_i'];$$

on démontre alors exactement comme dans la première proposition qu'on peut exprimer les i éléments $(\zeta_1', \ldots, \zeta_i')$ en fonction linéaire et homogène des $(i - 1)$ éléments $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1})$ du premier système fondamental, car les éléments suivants $(\zeta_i, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_n)$ sont de degré supérieur à celui de $(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_{i-1})$. On en conclurait tout comme précédemment qu'il existe une relation linéaire entre $(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_i)$ de la forme

$$A_1\zeta'_1 + \ldots + A_i\zeta'_i = 0,$$

que ceux-ci ne sont donc pas indépendants; ce qui se trouve en contradiction avec l'hypothèse suivant laquelle $(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n)$ serait un système fondamental. On doit donc avoir aussi $[\zeta_i] = [\zeta'_i]$, ce qui démontre le théorème énoncé plus haut.

Ce théorème conduit à une relation entre deux systèmes fondamentaux, relation au moyen de laquelle on déduit aisément tous les systèmes fondamentaux d'un seul. Si on considère en effet dans deux systèmes fondamentaux $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ et $(\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta_n)$ les éléments *seuls* dont le degré ne dépasse pas un nombre μ arbitraire d'ailleurs, mais désigné à l'avance, leur nombre sera, d'après le théorème précédent, le même dans les deux systèmes. Soient pour une valeur μ déterminée

$$(\zeta_1, \ldots, \zeta_\lambda) \quad \text{et} \quad (\zeta'_1, \ldots, \zeta'_\lambda)$$

les éléments que l'on considère ici, il résulte de ce qui précède que les λ éléments $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_\lambda$ peuvent s'exprimer en fonction linéaire et homogène du système $\zeta_1, \ldots, \zeta_\lambda$ à l'aide de fonctions de x_1, x_2 entières et homogènes comme coefficients, car dans l'expression de ces éléments par le système complet $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ les dernières fonctions $(\zeta_{\lambda+1}, \ldots, \zeta_n)$ ne sauraient intervenir. On peut de même exprimer les fonctions $\zeta_1, \ldots, \zeta_\lambda$ par le système $(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_\lambda)$. Il doit donc exister deux systèmes de λ équations linéaires

$$\zeta'_i = \sum_{k=1}^{k=\lambda} \alpha_{ik}\zeta_k; \qquad \zeta_k = \sum_{\tau=1}^{\tau=\lambda} \alpha'_{k\tau}\zeta'_\tau, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

(α_{ik}) et $(\alpha'_{k\tau})$ qui entrent comme coefficients étant des fonctions entières et homogènes de (x_1, x_2).

Si on remplace dans les λ premières équations les fonctions ζ_k par leur valeur tirée du second système on obtient les équations

$$\zeta'_i = \sum_{k=1}^{k=\lambda} \sum_{i=1}^{i=\lambda} \alpha_{ik}\alpha'_{k\tau}\zeta'_\tau, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

et comme ces équations ne peuvent avoir lieu que si les coefficients de

$\zeta'_1, \ldots, \zeta^\lambda_1$ coïncident dans les deux membres, on obtient pour les coefficients de la substitution les λ^2 équations

$$\sum_{k=1}^{k=\lambda} \alpha_{ik}\alpha'_{k\tau} = \delta_{i\tau}. \qquad \begin{pmatrix} i, \tau = 1, 2, \ldots, \lambda \\ \delta_{ii} = 1 \\ \delta_{i\tau} = 0 \text{ pour } i \gtrless \tau \end{pmatrix}$$

On en déduit, en appliquant le théorème relatif à la multiplication de deux déterminants

$$|\alpha_{ik}| \cdot |\alpha'_{k\tau}| = \left|\sum_{k=1}^{k=\lambda} \alpha_{ik}\alpha'_{k\tau}\right| = |\delta_{i\tau}| = 1,$$

c'est à dire que le produit des deux déterminants de substitution est égal à 1. Comme tous les éléments des deux systèmes (α_{ik}) et $(\alpha'_{k\tau})$ sont des fonctions de (x_1, x_2) *entières* et homogènes, il en résulte que ces deux déterminants de substitution sont elles-mêmes des constantes différentes de zéro. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Si on considère dans deux systèmes fondamentaux $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ et $(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n)$ seulement les éléments $(\zeta_1, \ldots, \zeta_\lambda)$ et $(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_\lambda)$ dont le degré est inférieur à un nombre déterminé μ, un de ces systèmes partielles dérive de l'autre par une substitution à coefficients entiers et à déterminant constant et différent de zéro.

Si en particulier on choisit comme limite supérieure un nombre μ supérieur au degré le plus élevé des éléments des deux systèmes, si donc on prend

$$\mu > [\zeta_n]$$

on obtient le corollaire suivant:

Tout système fondamental $(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n)$ provient de l'un quelconque de ceux-ci $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ par une substitution dont les coefficients sont des fonctions entières et homogènes de (x_1, x_2) et dont le déterminant est une constante différente de zéro.

Si réciproquement $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ est un système fondamental et $(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n)$ un système de fonctions entières et homogènes qui provient de la première par une substitution

$$\zeta'_i = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik}\zeta_k \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

dont le déterminant est une constante différente de zéro, $(\zeta_1', \ldots, \zeta_n')$ sera un système fondamental. Car en résolvant ces n équations on obtient un système

$$\zeta_i = \sum \alpha_{ik}' \zeta_k'$$

dont les coefficients sont également des fonctions entières de x_1, x_2, puisque le seul dénominateur qui puisse se présenter, le déterminant $|\alpha_{ik}|$, est une constante différente de zéro.

Donc puisque pour chacun des deux systèmes $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ et $(\zeta_1', \ldots, \zeta_n')$ dont l'un est un système fondamental, les éléments de l'un s'expriment en fonction linéaire et homogène de ceux de l'autre, les coefficients de ces expressions étant entiers, il en résulte que $(\zeta_1', \ldots, \zeta_n')$ est aussi un système fondamental.

On trouve donc, d'après ce que nous venons de dire, qu'il existe en effet une infinité de systèmes fondamentaux qui dérivent tous les uns des autres par une substitution du genre indiqué plus haut, le premier système étant choisi arbitrairement parmi tous ces systèmes fondamentaux, qui sont les seuls à jouir de cette propriété; on voit enfin qu'on tient en main tous les systèmes dès qu'on en a trouvé un.

Nous allons maintenant à la place de x_1, x_2 introduire des quantités ξ_1, ξ_2 reliées aux précédentes par les deux équations

$$\xi_1 = \alpha' x_1 - \alpha'' x_2,$$
$$\xi_2 = \beta' x_1 - \beta'' x_2,$$

dont le déterminant de substitution $(\alpha'\beta'' - \beta''\alpha')$ est différent de zéro; ou bien, ce qui revient au même, nous allons remplacer la variable indépendante x par une autre ξ qui en dérive par une substitution arbitraire, linéaire et fractionnaire

$$\xi = \frac{\alpha' x - \alpha''}{\beta' x - \beta''}.$$

Désignons par

$$\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \ldots, \bar{\zeta}_n$$

les fonctions homogènes du genre transformé $G(\xi_1, \xi_2, \eta)$ qui proviennent des éléments $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ du système fondamental du genre $G(x_1, x_2, \eta)$, ce système sera également un système fondamental parce que $(\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n)$ constituent de nouveau un système de n fonctions indépendantes et algébriquement entières dont le degré $[\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \ldots, \bar{\zeta}_n]$ est minimum.

Comme d'autre part le degré des éléments respectifs du système, et par suite aussi le degré total, reste le même après cette transformation, on peut énoncer le théorème suivant:

Les degrés

$$[\zeta_1], [\zeta_2], \ldots, [\zeta_n]$$

des n éléments d'un système fondamental du genre $G(x_1, x_2, \eta)$, et par suite aussi son degré total

$$N = [\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$$

restent les mêmes pour toute transformation des quantités (x_1, x_2), linéaire, homogène et réversible. Ils sont donc des invariants pour toute transformation de ce genre, ou, ce qui revient au même, pour toute transformation de la variable x linéaire, fractionnaire et réversible.

Enfin on peut encore soumettre les degrés des éléments d'un système fondamental $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ à une étude plus approfondie. Qu'on s'imagine ces éléments, ce qui va toujours avoir lieu dans la suite, rangés par ordre de grandeur de leurs degrés; dans cette hypothèse ζ_1 est nécessairement une constante et par suite on a

$$[\zeta_1] = 0,$$

car autrement toutes les fonctions entières du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ de degré 0, c'est à dire les constantes, ne pourraient être exprimées au moyen du système fondamental $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$. Par contre ζ_2 ne peut être une constante sans quoi ζ_1 et ζ_2 ne seraient pas indépendants, donc, nécessairement $[\zeta_2]$ et à fortiori aussi $[\zeta_3], \ldots, [\zeta_n]$ devront être égaux ou supérieurs à l'unité.

Il en résulte que le degré total

$$N = [\zeta_1] + [\zeta_2] + \ldots + [\zeta_n]$$

du système fondamental est un nombre entier positif qui est au moins égal à $(n - 1)$.

Posons

$$N = n - 1 + p,$$

c'est à dire

$$p = N - n + 1,$$

où la constante p sera un nombre entier $\geqq 0$; celle-ci est un invariant de la plus haute importance pour le genre $G(x_1, x_2, \eta)$, ou, ce qui revient au même, pour l'équation primitive

$$f(x, y) = 0,$$

qui définit la *classe* de courbes algébriques, car les considérations suivantes nous apprendront que p est un invariant pour la transformation bien définie et réversible des trois quantités x_1, x_2, η, ou, ce qui revient au même, pour les deux variables (x, y). Ce nombre p sera designé d'après WEIERSTRASS par le »rang» des courbes algébriques ou du genre $G(x_1, x_2, \eta)$.

Mais avant d'employer le système fondamental pour représenter les fonctions du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ nous résoudrons en entier d'abord la question fondamentale de cette théorie à savoir: la recherche d'un système fondamental et sa formation.

§ 5. *Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction algébrique et entière soit divisible par une puissance fractionnaire d'un facteur linéaire.*

Soit

$$(1) \qquad \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

un système arbitraire de n fonctions algébriques et entières, homogènes, que nous supposerons ordonné d'après les degrés de ses éléments, de façon que

$$(1\text{ a}) \qquad [\eta_1] \leqq [\eta_2] \leqq \cdots \leqq [\eta_n].$$

Si ce système n'est pas un système fondamental du genre $G(x_1, x_2, \eta)$

il existe au moins une fonction $\bar{\eta}$ algébrique et entière qui peut être exprimée sous forme de fraction par le système (1), comme il suit:

$$\bar{\eta} = \frac{u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \ldots + u_n\eta_n}{\xi_1}, \tag{2}$$

les coefficients $u_i(x_1, x_2)$ ne contenant pas tous ξ_1 en facteur. Soit maintenant ξ_2 un facteur linéaire arbitraire mais qui ne soit pas équivalent à ξ_1, c'est à dire, soit

$$\begin{cases} \xi_1 = \alpha' x_1 - \alpha'' x_2, \\ \xi_2 = \beta' x_1 - \beta'' x_2, \end{cases} \tag{3}$$

ou $(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') \lesseqgtr 0$, remplaçons dans (2) (x_1, x_2) par (ξ_1, ξ_2), on pourra comme dans (8 a) du paragraphe 3 laisser de côté tous les membres de somme dans les coefficients $u_i(\xi_1, \xi_2)$ qui contiennent ξ_1 en facteur car ceux-ci sont évidemment algébriquement entiers. Ceci fait, on obtient comme dans § 3 un reste de la forme suivante

$$\eta' = \frac{v_1\xi_2^{\lambda_1}\eta_1 + v_2\xi_2^{\lambda_2}\eta_2 + \ldots + v_n\xi_2^{\lambda_n}\eta_n}{\xi_1}$$

qui considéré en lui-même doit être algébriquement entier. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont ici des constantes et les exposants $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de ξ_2 forment évidemment une suite décroissante de nombres entiers positifs, car d'après (1 a) les degrés de $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ forment une suite croissante. Si enfin on met η' sous la forme

$$\eta' = \xi_2^{\lambda_n} \cdot \frac{v_1\xi_2^{\lambda_1-\lambda_n}\eta_1 + \ldots + v_{n-1}\xi_2^{\lambda_{n-1}-\lambda_n}\eta_{n-1} + v_n\eta_n}{\xi_1}$$

on peut constater comme précédemment que le coefficient de $\xi_2^{\lambda_n}$ qui figure au second membre doit être également algébriquement entier.

On obtient donc tout d'abord le théorème suivant:

Le système $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ composé de n fonctions indépendantes algébriques et entières n'est pas un système fondamental dans le cas seul où il est possible de déterminer un facteur linéaire $\xi_1 = \alpha' x_1 - \alpha'' x_2$ et n constantes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ non toutes nulles de telle sorte que la fonction homogène

$$\frac{v_1\xi_2^{\lambda_1-\lambda_n}\eta_1 + \ldots + v_{n-1}\xi_2^{\lambda_{n-1}-\lambda_n}\eta + v_n\eta_n}{\xi_1} \tag{4}$$

soit algébriquement entière, et par conséquent n'ait pas d'infini *fixe* pour le zéro de ξ_1.

Nous allons d'abord considérer le facteur linéaire ξ_1 comme donné arbitrairement et nous chercherons à déterminer les constantes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de façon que le quotient (4) devienne algébriquement entier. Dans ce but et pour plus de simplicité, à la place des n fonctions $\eta_1, \ldots, \eta_n$ dont les degrés sont en général différents entre eux, nous allons introduire les n fonctions

$$(5) \qquad e_1 = \xi_2^{\lambda_1-\lambda_n}\eta_1, \ldots, e_{n-1} = \xi_2^{\lambda_{n-1}-\lambda_n}\eta_{n-1}, \qquad e_n = \eta_n,$$

dont les degrés sont tous les mêmes et ont évidemment pour valeur commune celle du degré du dernier élément η_n, que nous désignerons par μ. Avec ces notations nous pourrons définir comme il suit la tâche qui nous reste à accomplir:

Il faut déterminer de la façon la plus générale les constantes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de façon que le quotient

$$(5) \qquad e = \frac{v_1e_1 + v_2e_2 + \ldots + v_ne_n}{\xi_1}$$

soit algébriquement entier et par conséquent ne possède aucun infini pour le zéro $\left(x = \frac{a''}{a}\right)$ de ξ_1.

Il est clair que les n fonctions de même degré $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ constituent un système de quantités indépendantes, tout comme les fonctions $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ de degré différent dont on les a déduites; toute autre quantité du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ pourra donc être exprimée par $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ sous forme linéaire et à l'aide de coefficients, fonctions rationnelles de (ξ_1, ξ_2).

Posons maintenant

$$(6) \qquad w = v_1e_1 + v_2e_2 + \ldots + v_ne_n,$$

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ ayant des valeurs arbitraires, et exprimons les n produits

$$we_1, we_2, \ldots, we_n$$

au moyen du système $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$; on obtient n équations de la forme

$$
\begin{aligned}
we_1 &= v_{11}e_1 + \ldots + v_{1n}e_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
we_n &= v_{n1}e_1 + \ldots + v_{nn}e_n,
\end{aligned}
$$

les coefficients (v_{ik}) étant évidemment tous des fonctions linéaires et homogènes de $v_1, \ldots, v_n$, et dont les coefficients sont tous des fonctions homogènes de (ξ_1, ξ_2) de degré μ, car les produits (we_i) sont de degré 2μ. Par l'élimination de $e_1, e_2, \ldots, e_n$ entre ces n équations on obtient finalement une équation de degré n en w qui mise sous forme de déterminant s'écrit

$$
(7) \qquad (-1)^n \begin{vmatrix} (v_{11} - w) & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & (v_{22} - w) & \ldots & v_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & (v_{nn} - w) \end{vmatrix}
$$

$$
= w^n + U_1(v_1, v_2, \ldots, v_n)w^{n-1} + \ldots + U_n(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0
$$

qui évidemment pour des valeurs indéterminées des coefficients $(v_1, \ldots, v_n)$ est irréductible, sans quoi toute fonction algébrique du genre $G(\xi_1, \xi_2, \eta)$ satisferait à une équation de degré inférieur.

Du mode même de formation des coefficients $U_1, \ldots, U_n$ il résulte, sans qu'il soit besoin de donner plus de détails, que ceux-ci sont des fonctions homogènes et entières des constantes $v_1, \ldots, v_n$ dont les degrés par rapport à celles-ci sont respectivement $1, 2, \ldots, n$. Comme de plus en considérant des valeurs variables des paramètres $v_1, \ldots, v_n$, w se trouve être algébriquement entier, il en résulte que ces coefficients sont des fonctions de (ξ_1, ξ_2) *entières* et homogènes dont les degrés sont évidemment égaux respectivement à $\mu, 2\mu, \ldots, n\mu$, μ étant le degré commun des n fonctions $e_1, e_2, \ldots, e_n$ comme on l'a supposé plus haut.

Si maintenant la fonction définie par (5)

$$
e = \frac{w}{\xi_1}
$$

se trouvait être aussi algébriquement entière, l'équation

$$0 = e^n + \frac{U_1(v_1, v_2, \ldots, v_n)}{\xi_1} e^{n-1} + \frac{U_2(v_1, v_2, \ldots, v_n)}{\xi_1^2} e^{n-2} + \ldots + \frac{U_n(v_1, v_2, \ldots, v_n)}{\xi_1^n}$$

à laquelle e satisfait évidemment, devra avoir également tous ses coefficients entiers, donc tous les dénominateurs devront disparaître, sans quoi au moins une des n fonctions conjuguées à e deviendrait infinie pour le zéro fixe de ξ_1. Donc le quotient $e = \frac{w}{\xi_1}$ sera algébriquement entier dans le cas seul où les constantes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont déterminées de façon que, en général, $U_i(v_1, \ldots, v_n)$ soit divisible par ξ_1^i ou, ce qui revient au même, de façon que les n congruences

$$(8) \qquad \begin{aligned} U_1(v_1, \ldots, v_n) &\equiv 0 \mod \xi_1, \\ U_2(v_1, \ldots, v_n) &\equiv 0 \mod \xi_1^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_n(v_1, \ldots, v_n) &\equiv 0 \mod \xi_1^n, \end{aligned}$$

soient satisfaites simultanément. Si on développe ces fonctions suivant les puissances croissantes de ξ_1, les coefficients de $\xi_1^0, \xi_1^1, \xi_1^2, \ldots, \xi_1^{i-1}$ dans $U_i(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ devront disparaître, ces coefficients étant tous des fonctions homogènes de degré i en $v_1, v_2, \ldots, v_n$ à coefficients constants. Les n conditions (8) donnent donc un système de

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

équations homogènes en $v_1, \ldots, v_n$ à coefficients constants, dont une est du premier degré, deux du second, enfin n du n^e degré par rapport aux n inconnues.

La résolution complète de ces équations présente déjà quand $n > 2$ des difficultés presque insurmontables qui disparaissent cependant dès que nous considérons d'une façon plus générale cette tâche qui se présente à nous. Nous dirons qu'une fonction entière et homogène w est divisible algébriquement par un facteur linéaire ξ_1 quand le quotient $e = \frac{w}{\xi_1}$ est également algébriquement entier, c'est à dire ne possède aucun infini *fixe* pour le zéro $\left(x = \frac{a''}{a'}\right)$ de ξ_1. D'après les considérations que l'on vient d'exposer il résulte que la fonction w est algébriquement divisible par ξ_1 dans le cas seul où ses n coefficients $(v_1, \ldots, v_n)$ satisfont aux n conditions (8). Soit maintenant δ une fraction quelconque rationnelle, comprise entre zéro et un, et soit ξ_1^δ une quelconque des puissances fractionnaires du facteur linéaire ξ_1 qui diffèrent entre elles seulement par des constantes. Nous dirons alors, que la fonction algébrique et entière est algébriquement divisible par la puissance fractionnaire ξ_1^δ quand le quotient

$$\bar{e} = \frac{w}{\xi_1^\delta}$$

est algébriquement entier en ce sens qu'il ne possède aucun infini fixe pour le zéro $\left(x = \frac{a''}{a'}\right)$ de ξ_1. Remplaçons dans l'équation (7) la quantité w par son expression $\bar{e}\xi_1^\delta$, on voit que $\bar{e}$ satisfait à l'équation:

$$0 = \bar{e}^n + \frac{U_1(v_1, \ldots, v_n)}{\xi_1^\delta} e^{n-1} + \frac{U_2(v_1, \ldots, v_n)}{\xi_1^{2\delta}} e^{n-2} + \ldots + \frac{U_n(v_1, \ldots, v_n)}{\xi_1^{n\delta}},$$

qui montre que $\bar{e}$ ne possède aucun infini fixe pour le zéro de ξ_1 que dans le cas seul où tous les dénominateurs en évidence disparaissent. Donc les coefficients $v_1, \ldots, v_n$ devront satisfaire aux conditions

$$(9) \qquad \begin{aligned} U_1(v_1, \ldots, v_n) &\equiv 0 \quad \text{mod } \xi_1^\delta, \\ U_2(v_1, \ldots, v_n) &\equiv 0 \quad \text{mod } \xi_1^{2\delta}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_n(v_1, \ldots, v_n) &\equiv 0 \quad \text{mod } \xi_1^{n\delta}, \end{aligned}$$

qui sont une généralisation immédiate des congruences du système (8).

Mais une fonction homogène et entière $U_i(\xi_1, \xi_2)$ ne peut évidemment contenir en facteur qu'une puissance *entière* de ξ_1. Donc la fonction $U_i(\xi_1, \xi_2)$ ne sera divisible par la puissance fractionnaire $\xi_1^{i\delta}$ que dans le cas seul où elle contiendra la puissance entière immédiatement supérieure de ce facteur linéaire.

Dans ce qui va suivre nous désignerons toujours par le symbole $|\alpha|$ le nombre entier le plus petit qui est supérieur ou égal au nombre α arbitrairement donné. Ceci posé, la fonction $U_i(\xi_1, \xi_2)$ entière et homogène n'est divisible par la puissance fractionnaire $\xi_1^{i\delta}$ que dans le cas seul où elle contient la puissance entière $\xi_1^{|i\delta|}$ en facteur. Nous en déduisons comme conséquence immédiate que la fonction w entière et homogène est algébriquement divisible par la puissance fractionnaire ξ_1^{δ} dans le cas seul où les coefficients $v_1, \ldots, v_n$ sont choisis de façon que les n équations de condition

$$(9\text{ a})\qquad \begin{aligned} &U_1(v_1, \ldots, v_n) \equiv 0 \quad \bmod \xi_1^{|\delta|},\\ &U_2(v_1, \ldots, v_n) \equiv 0 \quad \bmod \xi_1^{|2\delta|},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &U_n(v_1, \ldots v_n) \equiv 0 \quad \bmod \xi_1^{|n\delta|}, \end{aligned}$$

soient satisfaites, et celles-ci sont absolument équivalentes à celles du système (9).

Il est maintenant d'une importance tout à fait capitale pour la suite de déterminer les puissances fractionnaires de ξ_1 qui divisent *exactement* une fonction algébrique et entière. Soit donc ξ_1^{δ} la plus haute puissance fractionnaire de ξ_1 qui divise une fonction donnée w, nous supposons donc que $\xi_1^{\delta_1}$ ne divise plus w, dès que δ_1 prend une valeur supérieure à δ aussi rapprochée de celle-ci que l'on voudra. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est évidemment que les n équations (9 a) soient satisfaites simultanément et que par contre une au moins d'entre elles n'ait plus lieu dès que l'on vient à remplacer δ par une fraction δ_1 supérieure. Si maintenant aucun des n produits $\delta, 2\delta, \ldots, n\delta$ n'est un nombre entier on a toujours

$$i\delta < |i\delta|;$$

on peut donc évidemment toujours trouver une fraction δ_1 qui surpasse δ de si peu que chacun des n produits $\delta_1, 2\delta_1, \ldots, n\delta_1$ se trouve inférieur aux mêmes nombres entiers respectifs, comme le multiple correspondant de la fraction δ; cette fraction δ_1 sera donc telle que pour $i = 1, 2, \ldots, n$ on aura

$$|i\delta_1| = |i\delta|.$$

Mais alors d'après (9 a) w est aussi algébriquement divisible par la puissance supérieure $\xi_1^{\delta_1}$.

Si donc ξ_1^{δ} est la plus haute puissance de ξ_1 contenue dans w il faut nécessairement qu'un des multiples $\delta, 2\delta, \ldots, n\delta$, $i\delta$ par exemple, soit égal à un nombre entier m; on devra donc avoir

$$\delta = \frac{m}{i}, \qquad 1 \leqq i \leqq n.$$

Si c'est là le cas, w peut être exactement divisible par ξ_1^{δ}, car la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que les n équations de condition (9 a) soient remplies et qu'en outre $U_i(v_1, \ldots, v_n)$ ne contienne en facteur aucune puissance de ξ_1 supérieure à $|i\delta|$ ou m. On obtient donc le théorème suivant:

Une fonction algébrique et entière ne peut être exactement divisible par une puissance fractionnaire d'un facteur linéaire que dans le cas seul où l'exposant δ est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne peut être qu'un des nombres $1, 2, \ldots, n$.

Dans la recherche de la divisibilité d'une fonction algébrique par la puissance fractionnaire d'un facteur linéaire les seuls exposants $\delta = \frac{m}{i}$ qui peuvent se présenter sont donc ceux pour lesquels

$$m \leqq i \leqq n.$$

Pour les degrés $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ils sont, rangés par ordre de grandeur croissante

$n =$	$\delta =$
1	$0, 1,$
2	$0, \frac{1}{2}, 1,$
3	$0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1,$
4	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1,$
5	$0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1.$

Pour le degré n le nombre ρ_n des exposants ∂ fractionnaires qui interviennent ici est déterminé par l'équation

$$\rho_n = \varphi(0) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n),$$

$\varphi(i)$ désignant l'ensemble des nombres inférieurs à i et premiers avec lui, et $\varphi(0)$ devant être pris égal à l'unité; car quand on passe du degré $(n - 1)$ au degré n il vient s'ajouter aux ρ_{n-1} fractions qui existent déjà encore un nombre égal à $\varphi(n)$, dont le dénominateur est égal à n et dont le numérateur est premier avec n.[1]

Pour une valeur donnée de n ces exposants ∂ rangés par ordre de grandeur croissante peuvent s'écrire:

$$(10) \qquad \partial_0, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_\rho \qquad (\rho = \rho_n)$$

de sorte qu'en général

$$(10\,\mathrm{a}) \qquad \partial_{k+1} > \partial_k, \qquad \partial_0 = 0, \qquad \partial_\rho = 1.$$

On peut donner de suite ici une propriété caractéristique de ces ρ nombres, propriété qui nous sera utile dans la suite. Soient ∂_k et ∂_{k+1} deux fractions consécutives de la suite (10) et soit i un quelconque des nombres entiers $1, 2, \ldots, n$, il ne peut jamais exister un nombre entier m *entre* les deux fractions $i\partial_k$ et $i\partial_{k+1}$, car dans l'hypothèse:

$$i\partial_k < m < i\partial_{k+1}$$

ou

$$\partial_k < \frac{m}{i} < \partial_{k+1}$$

on serait conduit à admettre que ∂_k et ∂_{k+1} ne sont pas deux nombres consécutifs de la suite (10), ce qui est contraire à l'hypothèse primitive.

---

[1] La valeur approchée de ce nombre remarquable ρ_n pour des valeurs très grandes de n a été d'abord donnée par DIRICHLET (Comptes rendus de l'académie de Berlin, année 1849) et plus tard avec un peu plus de précision par M. MERTENS (Journal de Crelle, t. 77, pag. 289—338); elle satisfait à l'équation limite

$$\lim_{n=\infty} \frac{\rho_n}{n^2} = \frac{3}{\pi^2}.$$

Soit donc $(i\delta_k + \alpha)$ un nombre quelconque situé *entre* $i\delta_k$ et $i\delta_{k+1}$, on a toujours

$$|i\delta_k + \alpha| = |i\delta_{k+1}|. \tag{11}$$

Par contre le nombre entier $|i\delta_k|$ lui-même se trouve être inférieur exactement d'une unité au nombre entier $|i\delta_{k+1}|$ dans le cas seul où le produit $i\delta_k$ est lui-même un nombre entier m, c'est à dire où $\delta_k = \frac{m}{i}$; la raison en est qu'il ne peut y avoir aucun nombre entier *entre* $i\delta_k$ et $i\delta_{k+1}$. On a donc toujours l'équation

$$|i\delta_{k+1}| = |i\delta_k| + \varepsilon_k^{(i)}, \tag{11 a}$$

$\varepsilon_k^{(i)}$ étant l'unité ou zéro selon que le produit $i\delta_k$ est entier ou non, c'est à dire selon que i est un multiple du dénominateur de δ_k ou non.

De la définition précédente de la divisibilité d'une fonction algébrique par une puissance fractionnaire d'un facteur linéaire, il résulte maintenant qu'une fonction w étant algébriquement divisible par une puissance $\xi_1^{\delta_{k+1}}$ doit contenir nécessairement toute puissance inférieure de ξ_1 dont les exposants $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ figurent dans la suite (10). Entre les deux cas extrêmes où la fonction

$$w = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n$$

ne contient pas du tout le facteur linéaire ξ_1 ou le contient à la première puissance, se trouvent donc les ρ possibilités que w soit exactement divisible par une puissance fractionnaire $\xi_1^{\delta_k}$.

On est donc conduit à supposer que la solution du problème qui consiste à déterminer de la façon la plus générale les constantes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de manière que w soit algébriquement divisible par ξ_1 va se simplifier singulièrement si, au lieu de procéder brusquement en passant d'un cas extrême $(\delta_0 = 0)$ à l'autre $(\delta_\rho = 1)$, on va successivement de δ_0 à δ_1, puis de δ_1 à δ_2 et en général de δ_k à δ_{k+1}; si donc on cherche la solution pour l'exposant δ_{k+1} en supposant le problème résolu pour δ_k.

Nous voulons aussi faire l'hypothèse nouvelle que le nombre des fonctions indépendantes, algébriques et entières $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ne soit pas nécessairement égal à n, mais qu'il soit égal à un nombre arbitraire $\nu \leqq n$.

Les considérations suivantes vont en effet apprendre que ce nombre peut être réduit chaque fois qu'on passe de δ_k à δ_{k+1}.

Soient donc maintenant

$$e_1, e_2, \ldots, e_\nu$$

ν fonctions indépendantes, homogènes, algébriques et entières de même degré μ, chacune d'elles étant algébriquement divisible par la puissance fractionnaire $\xi_1^{\delta_k}$, l'exposant δ_k étant une fraction quelconque de la suite (10). Soient encore $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ des constantes arbitraires, la fonction homogène

$$w = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_\nu e_\nu$$

est également divisible par la même puissance de ξ_1, car si l'on peut déterminer le paramètre variable u de manière que chacune des n quantités conjuguées à $\frac{e_i}{\xi_1^{\delta_k}}$ soit finie pour le zéro de ξ_1, il en sera de même pour l'expression:

$$\frac{w}{\xi_1^{\delta_k}} = v_1 \frac{e_1}{\xi_1^{\delta_k}} + v_2 \frac{e_2}{\xi_1^{\delta_k}} + \cdots + v_\nu \frac{e_\nu}{\xi_1^{\delta_k}}.$$

Nous nous proposons maintenant de déterminer les constantes $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ de la façon la plus générale de sorte que la fonction ne soit pas seulement divisible par $\xi_1^{\delta_k}$ mais encore par la puissance immédiatement supérieure $\xi_1^{\delta_{k+1}}$.

Dans le chapitre suivant nons montrerons qu'on peut déterminer ces constantes et par suite résoudre tout le problème en ne se servant que d'expressions rationnelles, car on est conduit seulement à un certain nombre d'équations linéaires et homogènes, faciles à établir, à coefficients constants, reliant les ν inconnues $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$.

§ 6. *Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction entière et algébrique soit divisible par un facteur linéaire.*

Dans le chapitre précédent nous avons ramené la recherche d'un système fondamental à la question suivante:

Soient

$$e_1, e_2, \ldots, e_\nu,$$

ν fonctions indépendantes entières et algébriques de même degré μ qui sont toutes algébriquement divisibles par la puissance fractionnaire $\xi_1^{\delta_k}$ d'un facteur linéaire ξ_1. Il faut déterminer de la façon la plus générale les constantes $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ dans la fonction algébrique

$$w = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_\nu e_\nu \tag{1}$$

de sorte que w ne soit pas seulement algébriquement divisible par $\xi_1^{\delta_k}$ mais encore par la puissance fractionnaire suivante $\xi_1^{\delta_{k+1}}$.

Pour résoudre cette question, nous adjoindrons à la fonction w que nous examinons, $(n - 1)$ autres constituées de même:

$$\begin{aligned} w' &= v_1' e_1 + v_2' e_2 + \ldots + v_\nu' e_\nu, \\ w'' &= v_1'' e_1 + v_2'' e_2 + \ldots + v_\nu'' e_\nu, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w^{(n-1)} &= v_1^{(n-1)} e_1 + v_2^{(n-1)} e_2 + \ldots + v_\nu^{(n-1)} e_\nu, \end{aligned} \tag{2}$$

les coefficients $(v_i^{(k)})$ étant des constantes absolument arbitraires. Puisque par hypothèse les ν fonctions $(e_1, \ldots, e_\nu)$ sont toutes algébriquement divisibles par $\xi_1^{\delta_k}$, il en est de même pour les fonctions $(w', w'', \ldots, w^{(n-1)})$ pour des valeurs arbitraires des coefficients $v_i^{(k)}$.

Supposons maintenant qu'on ait choisi d'une façon quelconque les coefficients $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ de la fonction w à étudier, de manière que w soit non seulement divisible par $\xi_1^{\delta_k}$ mais encore par $\xi_1^{\delta_{k+1}}$. Si ma intenant on forme le produit de w par les $(i - 1)$ premières fonctions $w', w'', \ldots, w^{(i-1)}$,

$$\overline{w}_i = w w' w'' \ldots w^{(i-1)}, \tag{3}$$

celui-ci est évidemment algébriquement divisible par

$$\xi^{\delta_{k+1} + (i-1)\delta_k}$$

pour des valeurs indéterminées des coefficients de $w', w'', \ldots, w^{(i-1)}$ puisque le premier facteur de $\overline{w}_i$ contient la puissance δ_{k+1} de ξ_1 et chacun des $(i - 1)$ autres la puissance δ_k seulement.

Faisons maintenant la somme des n quantités conjuguées a $\overline{w}_i$, nous obtenons ainsi une fonction homogène des coefficients $v_i^{(k)}$ des fonctions $w, w', \ldots, w^{(i-1)}$ dont les coefficients sont des fonctions homogènes et entières de (ξ_1, ξ_2) seulement. Des formules (9 a) du chapitre précédent il ressort maintenant que cette somme doit être divisible par $\xi_1^{|\delta|}$, si la fonction algébrique $\overline{w}_i$ correspondante est algébriquement divisible par ξ_1^{δ}. Désignons dans ce cas cette somme par

$$S(\overline{w}_i) = S(ww' \ldots w^{(i-1)}); \tag{4}$$

elle devra donc être divisible par

$$\xi_1^{|\delta_{k+1} + (i-1)\delta_k|}$$

au sens habituel du mot, et cela pour des valeurs indéterminées des coefficients de $w', w'', \ldots, w^{(i-1)}$. Mais la fraction $(\delta_{k+1} + (i-1)\delta_k)$ se trouve toujours comprise entre les deux fractions $i\delta_k$ et $i\delta_{k+1}$, elle peut par suite selon l'équation (11) du chapitre précédent, se mettre sous la forme $(i\delta_k + \alpha)$. Et, d'après le théorème démontré à ce propos on a

$$|\delta_{k+1} + (i-1)\delta_k| = |i\delta_{k+1}|.$$

Si donc w doit être algébriquement divisible par $\xi_1^{\delta_{k+1}}$ il faut que la somme, donnée par (4), des n fonctions conjuguées à $(ww' \ldots w^{(i-1)})$ soit divisible dans le sens ordinaire du mot, par la puissance entière $\xi_1^{|i\delta_{k+1}|}$ pour des valeurs indéterminées des coefficients des $(i-1)$ fonctions $w', w'', \ldots, w^{(i-1)}$.

Comme la condition analogue doit être remplie pour chacun des n produits

$$w, ww', ww'w'', \ldots, ww'w'' \ldots w^{(n-1)},$$

on trouve comme conditions nécessaires pour la divisibilité de w par $\xi_1^{\delta_{k+1}}$ les n congruences suivantes:

$$\begin{aligned} S(w) &\equiv 0 \quad \bmod \xi_1^{|\delta_{k+1}|}, \\ S(ww') &\equiv 0 \quad \bmod \xi_1^{|2\delta_{k+1}|}, \\ &\cdots\cdots \\ S(ww' \ldots w^{n-1}) &\equiv 0 \quad \bmod \xi_1^{|n\delta_{k+1}|}, \end{aligned} \tag{5}$$

pour des valeurs indéterminées des coefficients de $w', w'', \ldots, w^{(n-1)}$. On peut montrer d'abord facilement que ce sont là aussi des conditions suffisantes pour que w soit algébriquement divisible par $\xi_1^{\delta_k+1}$. Supposons en effet que les coefficients $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ soient tels que les congruences (5) soient satisfaites pour des valeurs indéterminées des coefficients de $w', w'', \ldots, w^{(n-1)}$, elle seront satisfaites à fortiori lorsqu'on prend tous les coefficients de $w', w'', \ldots, w^{(n-1)}$ égaux aux coefficients correspondants de w, ou, ce qui est la même chose, quand on prend

$$w' = w'' = \ldots = w^{(n-1)} = w.$$

S'il en est ainsi, on a

$$S(ww' \ldots w^{(i-1)}) = S(w^i) = S_i,$$

où $S_i = S(w^i)$ désigne la somme des n quantités conjuguées à w^i, ou la somme des puissances semblables de Newton de degré i. Si donc les conditions (5) sont remplies il en résulte immédiatement

(5 a) $$S_i \equiv 0 \mod \xi_1^{|i\delta_k+1|},$$

d'où à fortiori

(5 b) $$S_i \equiv 0 \mod \xi_1^{i\delta_k+1}.$$

Si donc les conditions (5) sont remplies les n premières puissances semblables

$$S_1, S_2, \ldots, S_n$$

sont respectivement divisibles par

$$\xi_1^{\delta_k+1}, \xi_1^{2\delta_k+1}, \ldots, \xi_1^{n\delta_k+1}.$$

Soient maintenant, comme dans (7) au paragraphe précédent,

$$U_1, U_2, \ldots, U_n$$

les coefficients de l'équation à laquelle satisfait w, on peut montrer facilement, que dans nos hypothèses ils sont également divisibles respectivement par

$$\xi_1^{\delta_k+1}, \xi_1^{2\delta_k+1}, \ldots, \xi_1^{n\delta_k+1},$$

d'où on déduit, d'après (9) du même chapitre, que w lui-même est algébriquement divisible par $\xi_1^{\delta_{k+1}}$. Puisque en effet S_1 et U_1 coïncident sauf pour le signe, la proposition que nous venons d'avancer est évidente pour U_1. Supposons le théorème vrai et démontré pour $U_1, U_2, \ldots, U_{\lambda-1}$, il résulte alors immédiatement de l'équation

$$\lambda U_\lambda = -(S_1 U_{\lambda-1} + S_2 U_{\lambda-2} + \ldots + S_{\lambda-1} U_1 + S_\lambda)$$

qui relie les sommes des puissances aux coefficients de l'équation, que U_λ est également divisible par la puissance $\xi_1^{\delta_{k+1}}$, puisque celle-ci se trouve en facteur dans chacun des produits qui figurent au second membre.

Comme les équations (5) conduisent aux conditions nécessaires et suffisantes de divisibilité de w par $\xi_1^{\delta_{k+1}}$, trouvées dans (9) au chapitre précédent, nous obtenons le théorème remarquable suivant:

La fonction algébrique w est algébriquement divisible par $\xi_1^{\delta_{k+1}}$ dans le cas seul où les n congruences

$$S(ww'\ldots w^{(i-1)}) \equiv 0 \mod \xi_1^{|i\delta_{k+1}|} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

sont remplies pour des valeurs indéterminées des constantes qui figurent dans $w', \ldots, w^{(i-1)}$.

Si chacune des n expressions (5) doit être divisible par $\xi_1^{|i\delta_{k+1}|}$ pour des valeurs indéterminées des coefficients $v', v'', \ldots, v^{(i-1)}$ de $w', w'', \ldots, w^{(i-1)}$, il faut évidemment que le coefficient de chacun des produits

$$v'_{h_1} v''_{h_2} \ldots v^{(i-1)}_{h_{i-1}}, \qquad (h_1, h_2, \ldots, h_{i-1} = 1, 2, \ldots, \nu)$$

contienne cette puissance de ξ_1, et inversement chaque congruence (5) sera évidemment satisfaite si chacun de ces coefficients est divisible par $\xi_1^{|i\delta_{k+1}|}$. On obtient le coefficient de $v'_{h_1} v''_{h_2} \ldots v^{(i-1)}_{h_{i-1}}$ quand on prend dans $S(ww' \ldots w^{(i-1)})$

$$v'_{h_1} = v''_{h_2} = \ldots = v^{(i-1)}_{h_{i-1}} = 1$$

et qu'on égale à zéro tous les autres coefficients de $w', \ldots, w^{(i-1)}$. Mais par suite de cela on a

$$w' = e_{h_1}, \qquad w'' = e_{h_2}, \ \ldots, \ w^{(i-1)} = e_{h_{i-1}}$$

et on peut remplacer les conditions (5) pour $v_1, \ldots, v_\nu$ par le système suivant de congruences homogènes et linéaires:

$$(6) \qquad S(we_{h_1} e_{h_2} \ldots e_{h_{i-1}}) \equiv 0 \mod \xi_1^{|i\delta_{k+1}|} \qquad \binom{i=1,2,\ldots,n}{h_\lambda = 1,2,\ldots,\nu}$$

qu'on peut encore écrire comme il suit:

$$\text{(6 a)}\qquad 0 \equiv v_1 S(e_1, e_{h_1}, \dots, e_{h_{i-1}}) + v_2 S(e_2, e_{h_1}, \dots, e_{h_{i-1}}) + \dots$$
$$+ v_\nu S(e_\nu, e_{h_1}, \dots, e_{h_{i-1}}) \qquad \mod \xi_1^{|i\delta_{k+1}|}.$$

On peut arriver à la condition (6) d'une autre façon plus simple pour le calcul. Si on forme en effet pour des valeurs indéterminées des coefficients $v_1, \dots, v_\nu$ la somme des puissances semblables $S(w^i) = S_i$ de w, on obtient une fonction homogène de degré i en $(v_1, \dots, v_\nu)$. Si on prend la différentielle partielle de celle-ci par rapport à un des coefficients v_{h_1} on obtient

$$\frac{\partial S(w^i)}{\partial v_{h_1}} = S\left(\frac{\partial w^i}{\partial v_{h_1}}\right) = S\left(iw^{i-1}\frac{\partial w}{\partial v_{h_1}}\right) = S(iw^{i-1}e_{h_1}),$$

car $S(w^i)$ est égal à la somme des n fonctions conjuguées à w^i. On a donc

$$\frac{\partial S(w^i)}{\partial v_{h_1}} = iS(w^{i-1}e_{h_1}).$$

Si on prend la différentielle partielle de cette équation par rapport à v_{h_2}, etc. on voit qu'on obtient finalement l'équation

$$\frac{\partial^{i-1} S(w^i)}{\partial v_{h_1}\partial v_{h_2}\dots\partial v_{h_{i-1}}} = i(i-1)\dots 2 \,.\, 1\, S(we_{h_1}e_{h_2}\dots e_{h_{i-1}}),$$

dont le second membre coïncide, à un facteur numérique près qui est sans importance, avec le premier membre de la congruence (6).

Désignons donc par S_i la somme des puissances semblables $S(w^i)$ et par

$$S_i^{(i-1)}(v_1, \dots, v_\nu)$$

chacune de ses dérivées d'ordre $(i-1)$ par rapport aux éléments $v_1, v_2, \dots, v_\nu$. Alors on peut mettre les conditions nécessaires et suffisantes de divisibilité algébrique de w par $\xi_1^{\delta_{k+1}}$ sous la forme suivante plus simple

$$\text{(7)}\qquad S_i^{(i-1)}(v_1, v_2, \dots, v_\nu) \equiv 0 \mod \xi_1^{|i\delta_{k+1}|}.$$

Sous cette forme les conditions cherchées apparaissent comme un grand nombre de congruences linéaires pour les modules $\xi_1^{|\delta_{k+1}|}, \xi_1^{|2\delta_{k+1}|}, \ldots, \xi_1^{|n\delta_{k+1}|}$.

En réalité ξ_1 seul entre comme module et le nombre de ces identités se réduit considérablement. Comme en effet, pour des valeurs indéterminées de $v_1, \ldots, v_\nu$, w est algébriquement divisible par $\xi_1^{\delta_k}$ d'après la supposition faite plus haut, il s'en suit que w^i est, au sens ordinaire, algébriquement divisible par $\xi_1^{i\delta_k}$ et aussi d'après l'équation (9) du chapitre précédent $S(w^i) = S_i$ par $\xi_1^{|i\delta_k|}$.

On a donc

$$S_i(v_1, \ldots, v_\nu) = \xi_1^{|i\delta_k|}\overline{S}_i(v_1, \ldots, v_\nu), \tag{7 a}$$

$\overline{S}_i(v_1, \ldots, v_\nu)$ étant aussi une fonction entière et homogène de $v_1, \ldots, v_\nu$ dont les coefficients sont des fonctions entières et homogènes de (ξ_1, ξ_2). Si on désigne donc maintenant par

$$\overline{S}_i^{(i-1)}(v_1, \ldots, v_\nu)$$

toute dérivée partielle de $\overline{S}_i$ d'ordre $(i - 1)$ d'après $(i - 1)$ quelconques des indéterminées $v_1, \ldots, v_\nu$, on obtient après $(i - 1)$ différentiations de l'équation précédente

$$S_i^{(i-1)}(v_1, \ldots, v_\nu) = \xi_1^{|i\delta_k|}\overline{S}_i^{(i-1)}(v_1, \ldots, v_\nu);$$

on peut par suite écrire les conditions (7) sous la nouvelle forme suivante:

$$\overline{S}_i^{(i-1)}(v_1, \ldots, v_\nu) \equiv 0 \mod \xi_1^{|i\delta_{k+1}| - |i\delta_k|};$$

mais d'après (11 a) du chapitre précédent la différence

$$|i\delta_{k+1}| - |i\delta_k| = \varepsilon_k^{(i)}$$

est généralement nulle, et égale à l'unité dans le cas seul où le produit $i\delta_k$ est lui-même un nombre entier, c'est à dire où i est un multiple du dénominateur de la fraction δ_k. D'après cela nous obtenons comme conditions nécessaires et suffisantes de divisibilité de w par $\xi_1^{\delta_{k+1}}$ les congruences suivantes linéaires, simples, pour le module ξ_1,

$$\overline{S}_i^{(i-1)}(v_1, v_2, \ldots, v_\nu) \equiv 0 \mod \xi_1, \tag{8}$$

parmi lesquelles on ne devra maintenant prendre que les sommes de puissances $S(w^i)$ dont l'indice i est un multiple du dénominateur δ_k.

Les dérivées $S_i^{(i-1)}(v_1, \ldots, v_\nu)$ sont des fonctions de (ξ_1, ξ_2) homogènes dont les coefficients sont des fonctions linéaires et homogènes de $(v_1, v_2, \ldots, v_\nu)$ à coefficients constants. Celles-ci sont par suite divisibles par ξ_1 dans le cas seul où les constantes $v_1, \ldots, v_\nu$ sont déterminées de façon que le membre indépendant de ξ_1 dans $\overline{S}_i^{(i-1)}$ s'annule, ou, ce qui revient au même, de façon que $\overline{S}_i^{(i-1)}(v_1, \ldots, v_\nu | \xi_1, \xi_2)$ se réduise à zéro pour $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$. Si donc on désigne par

$$\overline{S}_i^{(i-1)}(v_1, v_2, \ldots, v_\nu) | 0, 1)$$

la fonction homogène et linéaire de $v_1, \ldots, v_\nu$ à coefficients *constants* dans laquelle $\overline{S}_i^{(i-1)}(\xi_1, \xi_2)$ se transforme pour $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, il résulte finalement que w est algébriquement divisible non seulement par $\xi_1^{\delta_k}$ mais encore par $\xi_1^{\delta_{k+1}}$ dans le cas seul où les ν constantes satisfont aux équations linéaires et homogènes à coefficients constants, savoir:

$$\overline{S}_i^{(i-1)}(v_1, v_2, \ldots, v_\nu | 0, 1) = 0. \tag{9}$$

Une autre réduction très-considérable de ces équations qu'il est également important de connaître, sera donnée dans le chapitre prochain.

Pour la suite, nous allons formuler dans le théorème suivant le résultat obtenu jusqu'à présent.

Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_\nu)$ ν fonctions indépendantes, homogènes, algébriques et entières, qui toutes sont algébriquement divisibles par la puissance fractionnaire $\xi_1^{\delta_k}$ d'un facteur linéaire, la fonction

$$w = v_1 e_1 + \ldots + v_\nu e_\nu$$

n'est algébriquement divisible par la puissance fractionnaire $\xi_1^{\delta_{k+1}}$ immédiatement supérieure que dans le cas seul où les ν constantes $(v_1, \ldots, v_\nu)$ satisfont à un nombre d'équations homogènes, linéaires, à coefficients constants:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_{11} v_1 + \ldots + a_{1\nu} v_\nu = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_r &= a_{r1} v_1 + \ldots + a_{r\nu} v_\nu = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

dont l'expression détaillée est donnée par (9) et dont le nombre soit égal à r.

Un tel système de r équations linéaires et homogènes à ν inconnues peut maintenant être résolu très aisément. Dans ce but formons avec les coefficients

$$\text{(10 a)} \qquad \begin{Bmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\nu} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{r\nu} \end{Bmatrix} = (a_{ik}),$$

tous les déterminants de degré le plus élevé (donc ici dans l'hypothèse $r \geqq \nu$, de degré ν) et cherchons si l'un d'eux au moins est différent de zéro. S'ils sont tous nuls qu'on examine tous les déterminants de degré immédiatement inférieur, et qu'on continue ainsi jusqu'à ce qu'on tombe sur un déterminant différent de zéro. Soient donc les déterminants mineurs d'ordre $(\nu - \nu_1)$ les premiers qui ne soient pas tous nuls, on dit alors que le système des coefficients (a_{ik}) dans (10 a) est de rang $(\nu - \nu_1)$. Dans ces hypothèses nous supposerons que $A_1, A_2, \ldots, A_r$ désignent les premiers membres des équations (9) dans un ordre tel que le système des coefficients des $(\nu - \nu_1)$ premières contienne un de ces déterminants différents de zéro. On sait qu'alors tout le système (10) des r équations linéaires est absolument équivalent au système

$$\text{(10 b)} \qquad A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \ldots, A_{\nu-\nu_1} = 0,$$

de ses $(\nu - \nu_1)$ premières équations qui peuvent par suite le remplacer. Car on peut exprimer le second membre A_ρ de toutes les autres équations en fonction linéaire et homogène de $A_1, A_2, \ldots, A_{\nu-\nu_1}$, sous la forme

$$A_\rho = \alpha_1^{(\rho)} A_1 + \ldots + \alpha_{\nu-\nu_1}^{(\rho)} A_{\nu-\nu_1},$$

donc toutes les expressions telles que A_ρ s'annuleront dès que $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ auront été choisis de façon à annuler simultanément $A_1, \ldots, A_{\nu-\nu_1}$.

Considérons maintenant le système d'équations (10 b), nous pouvons et voulons dès le début désigner par $v_1, \ldots, v_\nu$ les inconnues ordonnées de manière que le déterminant d'ordre $(\nu - \nu_1)$ différent de zéro que contient par hypothèse le système des coefficients

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu-\nu_1,1} & \dots & a_{\nu-\nu_1,\nu} \end{pmatrix}$$

soit le déterminant formé des $(\nu - \nu_1)$ *dernières* colonnes verticales du système, c'est à dire celui qui est formé des coefficients de

$$v_{\nu_1+1}, v_{\nu_1+2}, \dots, v_\nu.$$

Dès lors on peut, comme on sait, résoudre entièrement ces $(\nu - \nu_1)$ équations de telle façon que les $(\nu - \nu_1)$ dernières inconnues soient exprimées en fonction linéaire et homogène des ν_1 premières $(v_1, \dots, v_{\nu_1})$. On obtient alors des expressions de la forme

$$(11) \qquad v_{\nu_1+i} = \alpha_{i1} v_1 + \alpha_{i2} v_2 + \dots + \alpha_{i\nu_1} v_{\nu_1}, \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\dots,(\nu-\nu_1))}$$

où les coefficients α_{ik} sont des constantes, et ces équations donnent pour des valeurs arbitraires de $v_1, \dots, v_{\nu_1}$ la solution la plus générale des équations (10).

Si maintenant on remplace dans la fonction w que nous étudions les constantes $(v_{\nu_1+1}, \dots, v_\nu)$ par leur valeur en $(v_1, \dots, v_{\nu_1})$ d'après (11), on obtient pour w une fonction de $(v_1, \dots, v_{\nu_1})$ linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions de $(e_1, \dots, e_\nu)$ linéaires et homogènes à coefficients constants. Désignons-les maintenant par $(e'_1, e'_2, \dots, e'_{\nu_1})$, on obtient alors par la substitution (11) w sous la forme

$$(12) \qquad w = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_\nu e_\nu = v_1 e'_1 + v_2 e'_2 + \dots + v_{\nu_1} e'_{\nu_1},$$

et notre théorème apprend maintenant que w est algébriquement divisible par $\xi_1^{\delta_k+1}$ dans le cas seul où dans la deuxième expression de w $v_1, \dots, v_{\nu_1}$ sont pris arbitrairement, c'est à dire dans le cas seul où w est une fonction des ν_1 nouveaux éléments

$$e'_1, e'_2, \dots, e'_{\nu_1},$$

linéaire, homogène à coefficients constants arbitraires. Nous en tirons, comme conséquence immédiate, que ces nouveaux éléments sont eux-mêmes algébriquement divisibles par $\xi_1^{\delta_k+1}$. On reconnaît alors facilement qu'ils sont également indépendants tout comme $(e_1, \ldots, e_\nu)$ auparavant. En effet s'il existe entre eux une équation

$$\alpha_1 e'_1 + \ldots + \alpha_{\nu_1} e'_{\nu_1} = 0,$$

et si on remplace dans (11) $v_1, \ldots, v_{\nu_1}$ respectivement par $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu_1}$, d'où on pourra déduire pour $v_{\nu_1+1}, \ldots, v_\nu$ les valeurs $\alpha_{\nu_1+1}, \ldots, \alpha_\nu$, on obtiendrait alors d'après l'identité (12) l'équation suivante

$$\alpha_1 e'_1 + \ldots + \alpha_{\nu_1} e'_{\nu_1} = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_\nu e_\nu = 0$$

équation dans laquelle au moins les ν_1 premiers coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu_1}$ ne s'annulent pas simultanément et qui ne peut exister à cause de l'indépendance de $(e_1, \ldots, e_\nu)$.

On obtient donc enfin le théorème:

Soient

$$e_1, e_2, \ldots, e_\nu,$$

ν fonctions indépendantes, algébriques et entières de même degré, toutes algébriquement divisibles par $\xi_1^{\delta_k}$. Toutes les fonctions contenues sous la forme

$$w = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_\nu e_\nu,$$

qui contiennent aussi la puissance $\xi_1^{\delta_{k+1}}$ immédiatement supérieure et celles-là seulement peuvent être mises sous la forme

$$w' = v'_1 e'_1 + \ldots + v'_{\nu_1} e'_{\nu_1}$$

$v'_1, \ldots, v'_{\nu_1}$ désignant des constantes arbitraires. Ici $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{\nu_1}$ sont ν_1 fonctions indépendantes du faisceau $v_1 e_1 + \ldots + v_\nu e_\nu$ dont les coefficients $(v_1, v_2, \ldots, v_\nu)$ sont déterminés complètement par la résolution complète des équations linéaires et homogènes (9). Si le rang de ces équations linéaires est égal à $\nu - \nu_1$ le nombre de ces fonctions indépendantes e' est précisement égal à ν_1.

A l'aide de ce théorème on peut maintenant arriver facilement à former un système fondamental, comme on va l'exposer dans le paragraphe suivant.

§ 7. *Détermination du système fondamental.*

Nous allons employer maintenant les résultats acquis au chapitre précédent pour passer d'un système arbitraire

(1) $$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n,$$

de n fonctions indépendantes, entières et algébriques, à un système fondamental. Nous ferons cependant tout d'abord l'hypothèse suivante sur le système choisi, que

(1 a) $$\eta_1 = 1$$

est son premier élément; cette hypothèse se trouve remplie par exemple dans le premier système qui se présente à savoir:

(1 b) $$1, \eta, \eta^2, \ldots, \eta^{n-1}.$$

Puis dès le début nous supposerons que le produit de deux quelconques des éléments $\eta_1, \ldots, \eta_n$ peut être exprimé en fonction linéaire et homogène de ces éléments à l'aide de coefficients *entiers*. Nous admettons donc que dans chacune des équations

$$\eta_i\eta_k = a_1^{(i,k)}\eta_1 + a_2^{(i,k)}\eta_2 + \ldots + a_n^{(i,k)}\eta_n$$

les n coefficients $a_h^{(i,k)}$ sont non seulement des fonctions homogènes et *fractionnaires* de (x_1, x_2) comme c'est toujours le cas, mais encore des fonctions *entières* de ces mêmes variables. Si ce n'était pas là le cas, on pourrait en effet remplacer facilement le système (1) par un autre *dont le degré total serait moindre* et qui possèderait la propriété requise. Car chacun des produits $\eta_i\eta_k$ est, de même que chacun de ses facteurs, algébriquement entier; et quand une pareille fonction entière représentée par le système (1) contient un dénominateur, on peut, par un procédé indiqué et exposé au § 3, remplacer ce système par un autre dont le degré total est inférieur. Si ce dernier système ne possède pas lui-même cette propriété on peut, en opérant toujours de même, continuer à réduire le degré du système, et ne cesser que lorsqu'on aura obtenu finalement un système ayant la propriété requise; par ce procédé on doit nécessairement arriver à un tel système, parce que le degré total de ces systèmes ne peut pas devenir moindre que zéro.

On reconnaît aisément que le système particulier (1 b) satisfait aussi à cette seconde condition, car chacun des produits $\eta^i\eta^k = \eta^{i+k}$ ou bien se présente lui-même parmi les éléments du système, ou bien peut être exprimé à l'aide de l'équation du n^e degré en η comme fonction entière de η de degré moindre que n et à coefficients entiers.

Soient maintenant:

$$w = u_1\eta_1 + \dots + u_n\eta_n,$$
$$w' = u'_1\eta_1 + \dots + u'_n\eta_n,$$

deux fonctions du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ dont les coefficients u_i et u'_k sont des fonctions entières de (x_1, x_2) et exprimons le produit

$$ww' = \Sigma\Sigma u_i u'_k \eta_i \eta_k$$

linéairement par $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ sous la forme

$$ww' = U_1\eta_1 + \dots + U_n\eta_n,$$

il résulte de la propriété attribuée au système $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ que les coefficients $U_1, \dots, U_n$ eux aussi sont des fonctions *entières* et homogènes de (x_1, x_2). En particulier supposons qu'une fonction entière w soit exprimable au moyen du système $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ et à l'aide de coefficients entiers, il en sera aussi de même pour toutes les puissances $w, w^2, \dots$ et comme $w^0 = 1$ est aussi exprimable par le même système on peut en dire autant des puissances

$$1, w, w^2, \dots, w^n, \dots.$$

Par cette réduction préalable du système qu'on a pris pour base on diminue considérablement, comme nous le montrerons de suite, le nombre des équations à résoudre.

Supposons maintenant qu'on ait commencé par ranger les éléments du système (1) par ordre de grandeur de leurs exposants, de façon que le degré μ du dernier η_n soit le plus grand de tous les degrés.

Nous allons maintenant rechercher à quelles conditions un facteur linéaire ξ_1 doit satisfaire, pour qu'une fonction algébrique

$$u_1\eta_1 + \ldots + u_n\eta_n$$

puisse être algébriquement divisible par ξ_1 sans que ξ_1 soit contenu comme facteur dans tous les coefficients $u_1, \ldots, u_n$.

On va voir qu'il existe un nombre tout à fait limité de facteurs linéaires parfaitement déterminés qui peuvent satisfaire à cette condition.

Soit en effet ξ_1 un tel facteur linéaire et ξ_2 un autre quelconque, différent de celui-ci, introduisons à la place des éléments de degré différent

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}, \eta_n$$

des éléments de même degré,

$$\xi_2^{\lambda_1}\eta_1, \xi_2^{\lambda_2}\eta_2, \ldots, \xi_2^{\lambda_{n-1}}\eta_{n-1}, \eta_n$$

qui, comme précédemment, seront respectivement représentés par

$$(2) \qquad e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n.$$

Nous trouvons qu'il existe une quantité $u_1\eta_1 + \ldots + u_n\eta_n$ divisible par ξ_1 dans le cas seul où on peut déterminer n *constantes,* non toutes nulles, $v_1, v_2, \ldots, v_n$, de façon que la fonction algébrique et entière

$$w = v_1e_1 + v_2e_2 + \ldots + v_ne_n$$

soit également algébriquement divisible par ξ_1.

Si w doit être divisible par ξ_1 cette fonction devra à fortiori contenir la puissance fractionnaire de ξ_1 la plus basse, à savoir la puissance

$$\xi_1^{\delta_1} = \xi_1^{\frac{1}{n}}.$$

Grâce aux considérations générales exposées dans le chapitre précédent on peut maintenant donner sans plus de recherches les conditions nécessaires et suffisantes de divisibilité de w par $\xi_1^{\delta_1}$.

Prenons en effet dans les conditions (5) du chapitre 6 le cas particulier où $\delta_k = \delta_0 = 0$, et par conséquent $\delta_{k+1} = \delta_1 = \frac{1}{n}$, et remarquons que dans ce cas les n exposants de ξ_1 ont les valeurs

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \left|\frac{2}{n}\right| = \ldots = \left|\frac{n}{n}\right| = 1.$$

On obtient le théorème suivant:

La fonction algébrique $w = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n$ est algébriquement divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ dans le cas seul où les constantes $v_1, \ldots, v_n$ sont déterminées de façon que les n conditions

$$(3)\qquad \left.\begin{array}{ll} S(w) & \equiv 0 \\ S(ww') & \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ S(ww'\ldots w^{n-1}) & \equiv 0 \end{array}\right\} \bmod \xi_1$$

soient toutes remplies, en supposant bien entendu que les coefficients $v_1^{(i)}, \ldots, v_n^{(i)}$ des $(n-1)$ fonctions

$$w^{(i)} = v_1^{(i)} e_1 + \ldots + v_n^{(i)} e_n$$

aient été choisis tout à fait arbitrairement.

Si maintenant on a choisi le système qui sert de base de façon à ce qu'il possède la propriété dont nous avons parlé au début de ce chapitre, les conditions (3) se réduisent considérablement. On peut alors en effet énoncer le théorème important:

> La fonction algébrique $w = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n$ est algébriquement divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ dans le cas seul où les constantes $v_1, \ldots, v_n$ ont été déterminées de façon que la seule condition
>
> $$(3\text{ a})\qquad S(ww') \equiv 0 \mod \xi_1$$
>
> soit remplie pour des valeurs indéterminées des coefficients $v_1', v_2', \ldots, v_n'$.

La condition (3 a) est évidemment nécessaire pour que w soit divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ puisqu'elle fait partie des conditions nécessaires trouvées dans

(3). Supposons-la remplie maintenant, on démontre alors aisément que $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ est aussi algébriquement entier. Supposons en effet que les constantes $v_1, \ldots, v_n$ aient été déterminées d'une façon quelconque de manière que la fonction homogène de (ξ_1, ξ_2) $S(ww')$ soit divisible par ξ_1 pour des valeurs indéterminées de $(v'_1, \ldots, v'_n)$, cette fonction conserve alors cette propriété quand on y suppose $\xi_2 = 1$ et inversement de la divisibilité de cette fonction pour $\xi_2 = 1$ il résulte qu'elle contient aussi le facteur linéaire ξ_1 pour une valeur arbitraire de ξ_2, puisque dans ce cas le terme constant, c'est à dire indépendant de ξ_1, disparaît. Mais si on pose $\xi_2 = 1$ dans $S(ww')$ le système $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ se transforme en $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, et la condition (3 a) est évidemment remplie dans le cas seul où

$$S(ww') \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \xi_1$$

quand on prend $\xi_2 = 1$ et quand on a

$$w = v_1\eta_1 + \cdots + v_n\eta_n; \qquad w' = v'_1\eta_1 + \cdots + v'_n\eta_n.$$

Si cette condition est remplie et si on pose successivement

$$w' = 1\ , w\ , w^2, \ldots, w^{n-1}$$

elle reste toujours vérifiée, puisque, d'après le théorème précédent, ces n puissances peuvent se mettre sous la forme $(v'_1\eta_1 + \cdots + v'_n\eta_n)$ avec des coefficients fonctions de (ξ_2, ξ_1) *entières* et homogènes, ou, pour $\xi_2 = 1$, fonctions *entières* de ξ_1. Mais si on prend pour w' successivement une de ces n puissances de w on obtient les n congruences

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = S(w) \equiv 0 \\ S_2 = S(w^2) \equiv 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ S_n = S(w^n) \equiv 0 \end{array}\right\} \mathrm{mod}\ \xi_1$$

en posant $\xi_2 = 1$ dans ces expressions.

Maintenant w étant algébriquement entier et par suite les $S(w^i)$ fonctions de (ξ_1, ξ_2) *entières* et homogènes, il s'en suit qu'elles sont dès lors divisibles par le facteur linéaire ξ_1, même lorsqu'on ne prend pas ξ_2 égal à l'unité.

Si on compare ces conditions avec celles trouvées au chapitre 6 dans (5 a) en y supposant $\delta_{k+1} = \delta_1 = \frac{1}{n}$ et si on remarque que dans ce cas chacun des exposants $|i\delta_1|$ devient égal à l'unité, on reconnaît que ces conditions étant remplies, w est effectivement algébriquement divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$. Ce qui démontre le théorème.

On peut maintenant montrer facilement qu'en général on ne peut satisfaire à la condition

$$S(ww') \equiv 0 \pmod{\xi_1} \tag{5}$$

nécessaire et suffisante pour la divisibilité de w par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ qu'en prenant les n coefficients $v_1, \ldots, v_n$ de w tous égaux à zéro, et qu'on doit choisir le facteur linéaire ξ_1 d'une façon tout à fait déterminée si on veut satisfaire à cette condition par une valeur de ξ_1 qui ne soit pas identiquement nulle. Si on remarque en effet, que la fonction $S(ww')$ n'est divisible par ξ_1 que dans le cas seul où elle s'annule lorsqu'on pose

$$\xi_1 = 0, \qquad \xi_2 = 1,$$

on peut écrire, d'après une notation facile à saisir, la condition (5) comme il suit

$$S(ww' \,|\, 0, 1) = 0. \tag{5 a}$$

Si on prend $\xi_2 = 1$ les n quantités $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ coïncident alors respectivement avec $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ et cette équation (5 a) se transforme en la suivante:

$$S((v_1\eta_1 + \cdots + v_n\eta_n)(v_1'\eta_1 + \cdots + v_n'\eta_n) \,|\, 0, 1) = 0. \tag{5 b}$$

Comme enfin cette équation doit subsister pour des valeurs indéterminées de $(v_1', \ldots, v_n')$ il faut que chacun des coefficients de ces n indéterminées s'annule séparement, l'équation (5 b) remplace donc les n équations linéaires et homogènes en $(v_1, \ldots, v_n)$

$$S((v_1\eta_1 + \cdots + v_n\eta_n)\eta_k \,|\, 0, 1) = 0$$

ou en développant

$$v_1 S(\eta_1 \eta_k) + v_2 S(\eta_2 \eta_k) + \ldots + v_n S(\eta_n \eta_k) = 0 \tag{5 c}$$

quand on y a remplacé partout ξ_1 par zéro et ξ_2 par l'unité. Représentons donc en général les coefficients $S(\eta_i \eta_k)$, qui sont évidemment des fonctions de ξ_1, ξ_2 homogènes et entières, par $a_{ik}(\xi_1, \xi_2)$, c'est à dire posons

$$S(\eta_i \eta_k) = a_{ik}(\xi_1, \xi_2) \tag{6}$$

et pour abréger

$$a_{ik}(0, 1) = a_{ik}; \tag{6 a}$$

chacune des équations (5 a) peut s'écrire sous la forme suivante

$$a_{1k} v_1 + a_{2k} v_2 + \ldots + a_{nk} v_n = 0 \tag{7}$$

les n^2 coefficients (a_{ik}) étant des constantes finies. Un pareil système de n équations linéaires et homogènes peut, comme on le sait, être satisfait par un système de valeurs non toutes nulles $(v_1, \ldots, v_n)$ dans le cas seul où son déterminant

$$|a_{ik}| = |a_{ik}(0, 1)|$$

est nul, c'est à dire dans le cas où ξ_1 est un diviseur du déterminant

$$|a_{ik}(\xi_1, \xi_2)| = |S(\eta_i \eta_k)|. \tag{8}$$

On peut montrer d'abord facilement que ce déterminant (8) n'est pas identiquement nul, que par conséquent le système d'équations (5 c) ne possède pas une solution pour tout facteur linéaire ξ_1. Car si tel était le cas, si le déterminant (8) du système d'équations (5 c) s'annulait identiquement on pourrait trouver n fonctions $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de (x_1, x_2) entières, homogènes, et non toutes nulles, telles que ces équations (5 c)

$$\Sigma v_i S(\eta_i \eta_k) = 0, \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,n)} \tag{9}$$

soient satisfaites pour toute valeur de (x_1, x_2). Si, maintenant, on choisit $v_1, \ldots, v_n$ de manière à satisfaire à cette condition, et si on pose

$$w = v_1\eta_1 + \ldots + v_n\eta_n \tag{9 a}$$

ces équations se transforment en les suivantes:

$$S(w\eta_k) = 0, \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{9 b}$$

et si on les multiplie respectivement par les n indéterminées $v'_1, \ldots, v'_n$ et si on en fait la somme, on trouve que la quantité algébrique et entière w, non identiquement nulle, trouvée dans (9 a) devrait posséder la propriété suivante:

$$S(ww') = 0, \tag{10}$$

les coefficients de $w' = v'_1\eta_1 + \ldots + v'_n\eta_n$ étant choisis tout à fait arbitrairement. Si maintenant on prend pour w' dans cette équation successivement les valeurs

$$1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$$

il résulte d'après (10) que les n premières sommes des puissances semblables de w

$$S(w), S(w^2), \ldots, S(w^n)$$

doivent elles aussi également toutes s'annuler. Soit

$$w^n + u_1 w^{n-1} + \ldots + u_n = 0$$

l'équation de degré n à laquelle satisfait cette quantité w, il résulte des relations déjà trouvées précédemment

$$\lambda u_\lambda + S_1 u_{\lambda-1} + \ldots + S_{\lambda-1}u_1 + S_\lambda = 0 \qquad (\lambda=1,2,\ldots,n)$$

que ces n coefficients $u_1, \ldots, u_n$ doivent aussi s'annuler, c'est à dire que l'équation de degré n en w se réduit à

$$w^n = 0, \quad \text{donc} \quad w = 0,$$

ce qui est impossible si $\eta_1, \ldots, \eta_n$ sont linéairement indépendants, puisque dans $w = v_1\eta_1 + \ldots + v_n\eta_n$ tous les coefficients ne sont pas simultanément nuls.

Le déterminant

$$(11) \qquad D(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = |S(\eta_i\eta_k)|,$$

qui dans la suite portera le nom de discriminant du système $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, est par suite, dans le cas où $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ est un système indépendant, une fonction de (x_1, x_2) non nulle qui, comme on le démontre facilement, est homogène par rapport à ces quantités. Si on remplace en effet dans $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, (x_1, x_2, η) respectivement par $(tx_1, tx_2, t^m\eta)$, en général η_i se transforme en $t^{\mu_i}\eta_i$, $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ étant les degrés respectifs des fonctions homogènes $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Cette même substitution transforme

$$S(\eta_i\eta_k) \quad \text{en} \quad t^{\mu_i+\mu_k}S(\eta_i\eta_k),$$

d'où il résulte que

$$|S(\eta_i\eta_k)| \quad \text{devient} \quad |t^{\mu_i+\mu_k}S(\eta_i\eta_k)|.$$

Mais ce déterminant transformé est égal à

$$t^{2(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n)}|S(\eta_i\eta_k)|$$

puisque, en général, on peut faire sortir t^{μ_i} de la $i^{\text{ième}}$ ligne et t^{μ_k} de la $k^{\text{ième}}$ colonne. On obtient donc le théorème suivant, d'une grande importance pour ce qui va suivre:

> Soit $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ un système de n fonctions indépendantes, entières et homogènes, leur discriminant
>
> $$D(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = |S(\eta_i\eta_k)|$$
>
> est une fonction de (x_1, x_2) entière, homogène, non nulle dont le degré $2N$ est double de celui du système $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$.

Si maintenant $v_1e_1 + \ldots + v_ne_n$ devait être seulement algébriquement divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ sans que toutes les constantes disparaissent, ξ_1 serait nécessairement un diviseur du discriminant $D(\eta_1, \ldots \eta_n)$. En se servant des considérations exposées au commencement de ce chapitre on peut maintenant énoncer ce résultat dans le théorème suivant:

Une fonction entière et homogène

$$w = u_1\eta_1 + \dots + u_n\eta_n$$

peut être algébriquement divisible par une puissance entière ou fractionnaire du facteur linéaire ξ_1 dans le cas seul où ξ_1 est un diviseur de son discriminant $D(\eta_1, \dots, \eta_n)$.

Soit maintenant ξ_1 un des facteurs linéaires du discriminant de $(\eta_1, \dots, \eta_n)$, dont le nombre est égal au double du degré de ce système.

Dans ce cas des valeurs non nulles de $v_1, v_2, \dots, v_n$ peuvent satisfaire à l'équation linéaire (5 a), ou, ce qui revient au même, aux n équations (7) qui sont les conditions nécessaires et suffisantes de la divisibilité de

$$w = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n \tag{11 a}$$

par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$. Si le rang du système de coefficients de ces n équations linéaires

$$\Sigma a_{ik} v_k = 0$$

est égal à $(n - n_1)$, on obtient par leur résolution complète exactement n_1 fonctions du faisceau (11 a)

$$e'_1, e'_2, \dots, e'_{n_1}, \tag{12}$$

indépendantes, entières et algébriques, qui toutes sont elles-mêmes algébriquement divisibles par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$; et le théorème trouvé à la fin du chapitre précédent nous apprend alors que toutes les fonctions du faisceau (11 a) divisibles par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ et celles-là seules se trouvent comprises dans la formule

$$w' = v'_1 e'_1 + \dots + v'_{n_1} e'_{n_1}, \tag{12 a}$$

$v'_1, \dots, v'_{n_1}$ désignant encore des constantes arbitraires. Si maintenant w doit être algébriquement divisible par ξ_1, il doit à fortiori contenir $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ et doit par conséquent avoir la forme w' exprimée par (12 a). Il reste donc a examiner maintenant comment on doit déterminer dans w' les constantes $(v'_1, v'_2, \dots, v'_{n_1})$ de la façon la plus générale de manière que

w' ne soit pas seulement algébriquement divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n}} = \xi_1^{\delta_1}$ mais le soit encore par $\xi_1^{\delta_1\rho} = \xi_1$.

Si tel devait être le cas, w' doit à fortiori contenir la puissance de ξ_1 fractionnaire immédiatement supérieure à δ_1, à savoir $\xi_1^{\delta_2} = \xi_1^{\frac{1}{n-1}}$; nous avons maintenant à examiner de quelle manière les coefficients $v_1', \ldots, v_{n_1}'$ de w' sont à déterminer dans (12 a) pour que w' soit algébriquement divisible non seulement par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ mais encore par $\xi_1^{\frac{1}{n-1}}$.

D'après (8) du 6^e^ chapitre on ne devra considérer dans ce cas que les dérivées des sommes des puissances semblables $S(w^i)$ dont l'exposant i est un diviseur du dénominateur de $\delta_1 = \frac{1}{n}$. Ici donc c'est la dernière somme des puissances semblables seule $S(w'^n)$ qui intervient. Mais comme w' est divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ pour des v_i' indéterminés, $S(w'^n)$ contient ξ_1 lui-même en facteur. Si donc on pose, comme dans (7 a) du 6^e^ chapitre

$$S(w'^n) = \xi_1 \overline{S}_n(v_1', \ldots, v_{n_1}'),$$

et si on désigne de nouveau toutes les dérivées d'ordre $(n-1)$ de cette fonction entière et homogène $\overline{S}_n(v_1', \ldots, v_{n_1}')$ par rapport à ses indéterminées par

$$\overline{S}_n^{(n-1)}(v_1', \ldots, v_{n_1}'),$$

on voit que la fonction w' est algébriquement divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n-1}}$ dans le cas seul où ses coefficients $v_1', \ldots, v_{n_1}'$ satisfont aux congruences linéaires et homogènes

$$(13) \qquad \overline{S}_n^{(n-1)}(v_1', \ldots, v_{n_1}') \equiv 0 \pmod{\xi_1},$$

ou, ce qui revient au même, aux équations linéaires

$$(13\,a) \qquad \overline{S}_n^{(n-1)}(v_1', \ldots, v_{n_1}' \mid 0, 1) = 0.$$

Si ce système d'équations (13 a) est de rang $(n_1 - n_2)$ on obtient par sa résolution complète n_2 fonctions e indépendantes

$$(14) \qquad e_1'', \ldots, e_{n_2}''$$

du faisceau w' qui sont toutes divisibles par $\xi_1^{\delta_2}$ et on démontre que toutes les fonctions du faisceau w' et par suite aussi du faisceau w qui contiennent la même puissance fractionnaire de ξ_1, et elles seules, sont comprises dans l'expression

$$w'' = v_1'' e_1'' + \ldots + v_{n_2}'' e_{n_2}''. \tag{14 a}$$

Si on passe de la même façon de δ_2 à δ_3 et ainsi de suite jusqu'à $\delta_\rho = 1$ on arrive finalement au théorème suivant:

Toutes les fonctions du faisceau

$$w = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n$$

qui sont algébriquement divisibles par un facteur linéaire ξ_1, et celles-là seulement, sont exprimables en fonction linéaire et homogène de ν d'entre elles indépendantes

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_\nu$$

avec des coefficients constants, et par suite elles sont comprises dans la forme générale

$$\bar{w} = \bar{v}_1 \bar{e}_1 + \ldots + \bar{v}_\nu \bar{e}_\nu.$$

Les ν fonctions $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_\nu)$ s'obtiennent par la résolution complète d'un certain nombre d'équations linéaires et homogènes, à coefficients constants, qui peuvent être déduites facilement des dérivées des sommes des puissances semblables de w.

Posons maintenant pour les ν fonctions indépendantes *entières* et algébriques $\frac{\bar{e}_i}{\xi_1}$

$$\frac{\bar{e}_i}{\xi_1} = \bar{\eta}_i; \qquad (i=1,2,\ldots,\nu)$$

celles-ci sont toutes des fonctions du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ indépendantes et *entières* qui exprimées par le système $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ou, ce qui revient au même, par le système $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ apparaissent sous forme de fractions ayant ξ_1 en dénominateur. Par la méthode indiquée à la fin du troisième chapitre on peut déduire d'abord de $\bar{\eta}_1$ et $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ un nouveau système d'un degré inférieur d'une unité qui peut exprimer aussi $\bar{\eta}_1$ sans dénominateur. De ce dernier système et de $\bar{\eta}_2$ découlera un nouveau, qui représentera aussi cette fonction sous forme entière. Si on continue ainsi de suite on finit par trouver un système qui peut exprimer sans aucun dénominateur toutes les ν fonctions indépendantes $(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_\nu)$. Le degré total de ce système sera au moins inférieur d'une unité à celui de $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Mais comme les ν fonctions $(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_\nu)$ dont on se sert pour introduire le nouveau système sont indépendantes, on reconnaît très facilement, ce qu'on peut remarquer ici en passant, que le degré du dernier sera exactement inférieur de ν unités à celui du premier. Si on examine ce nouveau système tout comme on l'a fait pour le système primitif, et si on continue ainsi, on arrive finalement à un système dont le degré ne peut plus être abaissé, on obtient donc un système fondamental. Nous venons ainsi d'indiquer un moyen général, pratique et rationnel, qui permet, en partant d'un système arbitraire de fonctions indépendantes $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ d'arriver toujours à un système fondamental par la résolution seule d'équations linéaires.

Nous avons caractérisé un système fondamental

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$$

comme un système de n fonctions indépendantes, entières et algébriques, dont le degré est aussi petit que possible. Si maintenant on forme le discriminant

$$D(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = |S(\xi_1 \xi_2)|,$$

en remarquant qu'il est une fonction de (x_1, x_2) entière et homogène, de degré égal au double de celui du système fondamental, on reconnaît que le système fondamental peut être aussi complètement caractérisé comme un système de n fonctions entières et indépendantes dont le discriminant est de degré aussi petit que possible. En réalité on peut donner à ce théorème une forme qui fait ressortir un rapport beaucoup plus étroit entre le discriminant $D(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ et tous les autres $D(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ du genre $G(x_1, x_2, \eta)$.

Soit en effet $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ un système de n formes arbitraires, entières et algébriques, qui peuvent aussi n'être pas indépendantes les unes des autres, si on remarque que chacun de ses éléments peut être représenté linéairement par le système fondamental à l'aide de coefficients entiers, on obtient n équations de la forme

$$\eta_i = \sum_{\tau=1}^{n} \alpha_{i\tau} \zeta_\tau,$$

les coefficients $(\alpha_{i\tau})$ étant des fonctions *entières* et homogènes de (x_1, x_2). Le déterminant $|\alpha_{i\tau}|$ de la substitution est une fonction entière et homogène de (x_1, x_2) qui s'annule évidemment dans le cas seul où le système $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ n'est pas indépendant; car, c'est alors seulement qu'on peut déterminer n fonctions de (x_1, x_2) non toutes nulles $A_1, \ldots, A_n$ de manière que

$$A_1\eta_1 + \ldots + A_n\eta_n = 0.$$

Il s'en suit

$$\eta_i\eta_k = \sum_{\tau, m} \alpha_{i\tau}\zeta_\tau\zeta_m\alpha_{km}$$

ou en faisant la somme des termes conjuguées

$$S(\eta_i\eta_k) = \sum \alpha_{i\tau} S(\zeta_\tau\zeta_m)\alpha_{km},$$

et en passant aux déterminants on obtient, en mettant deux fois à profit le théorème relatif à la multiplication de deux déterminants, l'équation finale

$$D(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = |\alpha_{i\tau}|^2 D(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n). \tag{15}$$

D'où le théorème fondamental suivant:

> Le discriminant du système fondamental est un diviseur commun de tous les discriminants de n fonctions quelconques du genre $G(x_1, x_2, \eta)$; et, comme $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ lui-même est un pareil système, ce discriminant est le plus grand commun diviseur de tous ces systèmes.

De l'équation (15) on peut encore déduire que $D(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ s'annule dans le cas seul où les n fonctions $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ ne sont pas indépendantes. On obtient donc le théorème déjà démontré:

> Un système $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ est indépendant dans le cas seul où son discriminant est différent de zéro.

Le système $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ est un système fondamental quand le déterminant $|\alpha_{i\tau}|$ de la substitution est une constante non nulle, car, dans ce cas seul, le système fondamental lui-même peut être exprimé entièrement par $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Puisque dans ce cas seul, comme on l'a déjà vu plus haut, les discriminants des deux systèmes coïncident eux aussi, à une constante près, on obtient le théorème:

Soit $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ un système fondamental et $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ un autre système de fonctions entières, ce dernier sera également un système fondamental dans le cas seul où son discriminant coïncide, à un facteur constant près, avec $D(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$.