MÉMOIRE
SUR LE PENDULE DE LONGUEUR VARIABLE

PAR

LÉON LECORNU

À PARIS.

Les Mémoires de l'ancienne Académie des sciences renferment un travail de dix pages, lu par l'abbé BOSSUT dans la séance du 5 septembre 1778, et intitulé: *Sur le mouvement d'un pendule dont la longueur est variable.* L'auteur commence par rappeler que, dès 1707, CARRÉ avait publié un écrit sur le même sujet, mais en se bornant au cas où le raccourcissement se produit par intermittences, à chaque passage du pendule par la verticale. BOSSUT entreprend de traiter la question des oscillations planes dans toute sa généralité. Par des considérations de cinématique infinitésimale il forme, assez péniblement, l'équation différentielle du second ordre qui régit le mouvement considéré; puis, dans l'hypothèse d'un raccourcissement proportionnel au temps, et en supposant en outre les oscillations infiniment petites, il parvient à une équation du premier ordre: équation de RICCATI, non intégrable. Il conclut que, pour achever l'examen du problème, on serait obligé de recourir à un procédé graphique ou à une intégration par séries; mais il n'emploie ni l'un, ni l'autre, et il se borne à ajouter cette remarque, intéressante au point de vue pratique, que, par le fait des oscillations, la tension du fil étant variable, la force nécessaire pour enrouler uniformément le fil sur un treuil ne saurait non plus demeurer constante.

Le reste du mémoire est consacré à l'étude sommaire de différents cas dans lesquels le raccourcissement du fil ne se produit pas d'une manière uniforme. Les résultats obtenus sont les suivants:

1°. Si le fil s'enroule sur un treuil mû par une force constante, la loi des oscillations, supposées infiniment petites, est encore exprimée par une équation de Riccati, non intégrable;

2°. Il en est de même si le fil, après avoir passé sur deux poulies de renvoi, est sollicité à sa seconde extrémité par un poids qui tombe verticalement;

3°. On parvient à une équation intégrable quand on suppose que l'extrémité du pendule, au lieu d'osciller librement, traîne sur un plan fixe horizontal: ce qui, à vrai dire, constitue un problème tout différent de celui du pendule.

Depuis 1778, ce sujet paraissait tombé dans l'oubli quand, au commencement de 1894, M. Haton de la Goupillière posa, dans l'*Intermédiaire des mathématiciens*, une question ainsi conçue:

»91[R7fβ]. Le mouvement d'un pendule simple dont la longueur se raccourcit proportionnellement au temps (c'est le cas des oscillations d'une benne non guidée pendant son ascension dans un puits de mine) a-t-il été étudié?»

Cette question me suggéra la présente étude, dont un résumé fut inséré le 15 janvier 1894 dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences. A la suite de cette publication j'appris, par M. Boussinesq, l'existence du travail de Bossut. Mon devancier s'était borné à écrire l'équation fondamentale sans en dégager les conséquences; ici, je développe les calculs et j'analyse les propriétés du mouvement. J'examine en outre, dans une dernière partie, le cas du pendule conique.

I.

Equation du mouvement.

Soit l la longueur variable du pendule à oscillations planes. Soit, pour l'instant considéré, θ l'angle d'écart, par rapport à la verticale. Soient, par rapport à deux axes, l'un horizontal, l'autre vertical descendant, menés par le point de suspension, x et y les coordonnées du point matériel qui termine le pendule. On a:

$$x = l \sin\theta, \qquad y = l \cos\theta.$$

D'ailleurs, en appelant T la tension du fil, on peut écrire:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + T\frac{x}{l} \qquad = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + T\frac{y}{l} - g = 0,$$

d'où:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} - gx = 0$$

ou bien:

$$\frac{d}{dt}\left(l^2\frac{d\theta}{dt}\right) + gl\sin\theta = 0$$

ou encore:

(1) $$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dl}{dt}\frac{d\theta}{dt} + g\sin\theta = 0.$$

Telle est l'équation du mouvement: on l'obtiendrait immédiatement en remarquant que l'accélération aréolaire est égale au moment de la pesanteur.

La valeur de la tension T se déduit aisément de ce qui précède; mais il est plus simple d'exprimer que cette tension est égale à la composante de la pesanteur suivant le fil, augmentée de la force centrifuge et diminuée de la force d'inertie due au glissement. On trouve ainsi:

(2) $$T = g\cos\theta + l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{d^2l}{dt^2}.$$

Nous admettrons désormais que la longueur l varie proportionnellement au temps, et nous poserons en conséquence:

$$l = a + bt,$$

a et b désignant deux constantes, dont la première est essentiellement positive. Pour fixer les idées, nous conviendrons que, sauf avis contraire, la *vitesse d'allongement* b est également positive, c'est à dire que la longueur du pendule croît avec le temps. Les équations (1) et (2) deviennent, dans ces conditions:

(3) $$(a + bt)\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2b\frac{d\theta}{dt} + g\sin\theta = 0,$$

(4) $$T = g\cos\theta + (a + bt)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

En vertu des relations évidentes:

$$\frac{d\theta}{dt} = b\frac{d\theta}{dl}, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = b^2\frac{d^2\theta}{dl^2},$$

l'équation (3) peut encore se mettre sous la forme:

$$l\frac{d^2\theta}{dl^2} + 2\frac{d\theta}{dl} + \frac{g}{b^2}\sin\theta = 0 \tag{5}$$

ou bien:

$$\frac{d^2}{dl^2}(\theta l) + \frac{g}{b^2}\sin\theta = 0. \tag{6}$$

Si, au lieu d'un pendule simple, on considérait un pendule composé, la longueur l' du pendule simple équivalent serait exprimée, en fonction de la distance l du centre de gravité à l'axe de suspension et du rayon R de giration par rapport à ce centre, au moyen de la formule connue:

$$l' = l + \frac{R^2}{l}.$$

Pour un allongement uniforme du fil, on aurait, dans ce cas:

$$l' = a + bt + \frac{R^2}{a + bt}.$$

Après avoir arbitrairement choisi l'instant initial auquel correspond la longueur a, prenons, à partir de cet instant, un intervalle de temps assez restreint pour que le rapport $\frac{bt}{a}$ soit très petit. On pourra alors écrire approximativement:

$$l' = a + bt + \frac{R^2}{a}\left(1 - \frac{b}{a}t\right) = a + \frac{R^2}{a} + b\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)t.$$

On voit par là que la loi du mouvement du pendule composé est à chaque instant la même que celle du mouvement du pendule simple équivalent, la vitesse d'allongement b étant simplement remplacée par $b\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)$.

Revenons au pendule simple et supposons les oscillations infiniment petites. L'équation (5) se réduit à:

$$l\frac{d^2\theta}{dl^2} + 2\frac{d\theta}{dl} + \frac{g}{b^2}\theta = 0. \tag{7}$$

Si l'on remplace θ par $e^{\int z\,dl}$, il vient:

$$\frac{dz}{dl} + z^2 + 2\frac{z}{l} + \frac{g}{b^2 l} = 0.$$

Posons ensuite: $z = v - \frac{1}{l}$ et nous obtenons:

$$\frac{dv}{dl} + v^2 + \frac{g}{b^2}\frac{1}{l} = 0. \tag{8}$$

C'est l'équation de RICCATI trouvée par BOSSUT. Malheureusement cette transformation de l'équation du second ordre ne facilite pas l'intégration et complique l'interprétation des résultats; aussi n'en ferons-nous pas usage.

L'équation du second ordre relative aux oscillations infiniment petites prend une forme très simple si l'on pose:

$$\theta l = u, \qquad l = \frac{b^2}{g}x;$$

il vient, d'après l'équation (6):

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0. \tag{9}$$

II.

Etude des oscillations infiniment petites.

Partons de l'équation (9) qui vient d'être établie. Voici d'abord une méthode graphique permettant de construire, par approximation, une intégrale quelconque. Si l'on remplace x par $\frac{z}{c}$, c désignant une constante, on peut écrire:

$$\frac{d}{dz}\left(z\frac{du}{dz}-u\right)+\frac{u}{c}=0.$$

Considérons la courbe ayant pour coordonnées rectangulaires z et u. L'ordonnée à l'origine de la tangente, relativement à l'axe des u, est la longueur: $h=u-z\frac{du}{dz}$. On a donc: $\frac{dh}{dz}=\frac{u}{c}$.

Connaissant un point (z, u) et la tangente en ce point, on aura sensiblement la variation Δh de l'ordonnée à l'origine, correspondant à une petite variation Δz de l'abscisse, en prenant: $\Delta h=\frac{u}{c}\Delta z$, et l'on en déduira la tangente au nouveau point $(z+\Delta z, u+\Delta u)$, considéré comme appartenant à la première tangente. En continuant de même, on trouvera les côtés successifs d'un polygone, d'autant moins différent de la courbe cherchée que Δz est plus petit.

La construction peut être effectuée de la manière suivante.[1] Soit MM' un côté du polygone et P le point où son prolongement rencontre l'axe de u. Soient A et B les points où l'ordonnée du point M coupe l'axe des z et une parallèle à cet axe menée au-dessous de lui, à la distance constante c. Portons au-dessous de P, sur l'axe des u, la petite longueur PQ, égale à la projection Δz de MM' sur l'axe des z. Soit enfin S le point de rencontre de BQ avec AP. La droite SM coupe l'axe des u en un point P', qui détermine le côté suivant, $P'M'M''$, du polygone.

Remarquons que, si la longueur c est prise égale à $\frac{b^2}{g}$, la courbe ainsi obtenue est précisément celle que décrit l'extrémité libre du pendule (les ordonnées u étant d'ailleurs amplifiées à une échelle arbitraire). En effet, comme les oscillations sont supposées infiniment petites, la projection verticale de la tige est égale à l, c'est-à-dire à $\frac{b^2}{g}x$ ou bien encore à z, et la projection horizontale est égale à θl, c'est à dire à u. Comme $\frac{d^2u}{dz^2}$ est proportionnel à u, il est clair que la courbe possède un point d'inflexion chaque fois qu'elle croise l'axe des z. Donc:

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

La trajectoire de l'extrémité du pendule présente une inflexion chaque fois que le pendule passe par la verticale.

Au même degré d'approximation, on peut encore dire que:

La courbure de la trajectoire varie proportionnellement à l'écart horizontal.

Une autre propriété résulte de l'équation évidente:

$$h = \frac{1}{c}\int u dz.$$

Quand l'intégrale du second membre est prise entre deux valeurs de z correspondant à une même valeur de h, cette intégrale est nulle. D'après cela:

Si l'on considère, sur la trajectoire, deux points tels que leurs tangentes aillent couper en un même point l'horizontale du point de suspension, la verticale du point de suspension partage en deux parties égales l'aire limitée par la trajectoire et par les horizontales des deux points considérés.

Cette propriété s'applique, en particulier, à deux points quelconques d'écart maximum, puisque, pour chacun de ces points, la tangente passe au point de suspension.

J'arrive à l'étude analytique des fonctions u qui vérifient l'équation (9). Cette équation se rencontre dans la théorie des fonctions de Bessel, appelées aussi *fonctions cylindriques.* Il serait inutile d'en dire davantage, si nous n'avions pas à faire application de résultats connus au problème du pendule de longueur variable. J'aurai soin, d'ailleurs, dans ce qui va suivre, de démontrer brièvement les théorèmes dont il sera fait usage.

Par la méthode des coefficients indéterminés, on se procure sans peine la solution particulière:

$$(10) \qquad \varphi = x - \frac{2x^2}{(1 \, . \, 2)^2} + \frac{3x^3}{(1 \, . \, 2 \, . \, 3)^2} - \frac{4x^4}{(1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4)^2} + \cdots$$

dont la vérification est immédiate. Avec les notations usuelles, la fonction φ n'est autre chose que $\sqrt{x}J_1(2\sqrt{x})$, en désignant par J_1 la fonction cylindrique d'indice *un* et de première espèce. Il est évident que cette solution peut être multipliée par une constante arbitraire.

A quelle condition le mouvement du pendule est-il représenté par l'équation (10)? Pour le voir, formons d'abord la dérivée première:

$$(11) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{(1 \cdot 2)^2} - \frac{x^3}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \dots$$

qui est, par définition, la fonction d'indice zéro: $J_0(2\sqrt{x})$, et considérons l'instant d'une élongation, c'est-à-dire d'un maximum d'écart. On doit avoir à la fois:

$$\theta l = \varphi, \qquad l = \frac{b^2}{g} x, \qquad d\theta = 0$$

d'où l'on tire:

$$\theta \frac{dl}{dx} = \frac{d\varphi}{dx},$$

ou bien:

$$\frac{b^2}{g} \theta = \frac{d\varphi}{dx},$$

c'est-à-dire:

$$(12) \qquad \frac{\varphi}{x} = \frac{d\varphi}{dx}.$$

En remplaçant φ et $\frac{d\varphi}{dx}$ par leurs valeurs, cette équation devient:

$$1 - \frac{2x}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{3x^2}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} - \dots = 1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{(1 \cdot 2)^2} - \dots$$

c'est-à-dire, en divisant par x:

$$(13) \qquad \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{2 \cdot 3x}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \frac{3 \cdot 4x^2}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2} - \dots = 0.$$

Soit ξ l'une quelconque des racines de cette équation. La condition cherchée est:

$$l = \frac{b^2}{g} \xi.$$

En d'autres termes, si l désigne la longueur du pendule correspondant à une élongation, la vitesse d'allongement b doit être égale à: $\sqrt{\frac{gl}{\xi}}$.

Le premier membre de l'équation (13) est la fonction cylindrique d'indice *deux:* $J_2(2\sqrt{x})$. Si donc il existait une table de cette fonction, on aurait immédiatement les quantités ξ. A défaut d'une pareille table on peut se servir de celles de J_0 et de J_1 qui se trouvent, par exemple, à la fin de l'ouvrage de LOMMEL *Studien über die Bessel'schen Functionen* et chercher, par tâtonnement, pour quelles valeurs de x l'on a, en vertu de (12):

$$\frac{1}{\sqrt{x}} J_1(2\sqrt{x}) = J_0(2\sqrt{x})$$

ou bien, en remplaçant $2\sqrt{x}$ par z:

$$(14) \qquad 2J_1(z) = zJ_0(z).$$

Deux circonstances viennent faciliter le calcul. D'abord, la connaissance expérimentale que l'on a du mouvement du pendule indique que chaque élongation se trouve comprise entre deux passages par la verticale, et que, par suite, chaque racine, $\frac{\xi^2}{4}$, de l'équation (14) est intercalée entre deux racines de J_1. On conçoit même que $\frac{\xi^2}{4}$ ne saurait s'écarter beaucoup de la moyenne des deux racines de J_1 qui l'encadrent (au moins tant que la longueur est assez grande vis-à-vis de la vitesse d'allongement): on sait ainsi dans quelles régions des tables doit être effectuée la recherche. En second lieu, la fonction J_1 passe par un maximum ou un minimum vers le milieu de l'intervalle de deux racines consécutives: elle varie alors très-lentement, de telle façon que, dans un premier aperçu, le premier membre de l'équation (12) peut être regardé comme constant pour chaque région. Après avoir ainsi obtenu une valeur grossière de chaque racine $\frac{\xi^2}{4}$, il ne reste plus qu'à procéder par interpolation.

En opérant ainsi, j'ai trouvé que, de 0 à 20 (les tables ne vont pas plus loin), il y a cinq racines de (14), qui sont:

$$(15) \qquad 5,14 \qquad 8,41 \qquad 11,62 \qquad 14,80 \qquad 17,96.$$

Je néglige les décimales qui suivent la seconde.

Ceci posé, considérons, par exemple, un pendule ayant un mètre de longueur à l'instant initial. Pour que ce pendule, légèrement écarté de la verticale et abandonné sans impulsion, suive le mouvement défini par l'équation (10), il faut et il suffit que la vitesse d'allongement $\sqrt{\frac{g}{\xi}}$, exprimée en mètres par seconde, ait l'une des valeurs suivantes:

$$1^m,22 \qquad 0^m,74 \qquad 0^m,54 \qquad 0^m,42 \qquad 0^m,35, \text{ etc.}$$

Adoptons, par exemple, $0^m,35$, et supposons ici, pour plus de commodité, que le pendule, au lieu de s'allonger, aille en se raccourcissant, ce qui ne change rien aux calculs précédents. Les élongations successives correspondront aux valeurs de l comprises dans la formule:

$$l = \frac{b^2}{g}\xi = \frac{b^2}{4g}z^2 = 0{,}00313 z^2, \tag{16}$$

z désignant l'une des racines (15). On trouve ainsi les longueurs:

$$1^m \qquad 0^m,68 \qquad 0^m,42 \qquad 0^m,22 \qquad 0^m,08,$$

et, comme le pendule se raccourcit de $0^m,35$ par seconde, les instants de ces élongations sont:

$$0^{sec} \qquad 0^{sec},94 \qquad 1^{sec},66 \qquad 2^{sec},23 \qquad 2^{sec},63.$$

Au bout de $2^{sec},86$, la longueur du pendule devient nulle. A ce moment, il n'y a pas, à proprement parler, une élongation: car la vitesse angulaire ne tend pas vers zéro en même temps que la longueur du pendule. Si nous convenons néanmoins de faire figurer cette position limite au tableau d'ensemble, nous pouvons dire que les intervalles de temps séparant les positions limites successives sont:

$$0^{sec},94 \qquad 0^{sec},72 \qquad 0^{sec},57 \qquad 0^{sec},40 \qquad 0^{sec},23.$$

Calculons encore l'amplitude des élongations. Cette amplitude est mesurée par les valeurs maxima de θ. Or on a, pour ces maxima:

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{\sqrt{x}\,J_1(2\sqrt{x})}{\frac{b^2}{g}x} = \frac{2g}{b^2}\frac{J_1(z)}{z} = \frac{g}{b^2}J_0(z).$$

D'ailleurs, l'angle d'écart initial peut être pris arbitrairement (pourvu qu'il soit très petit), à cause de la constante arbitraire par laquelle peut être multiplié φ. Il suffit donc de comparer les valeurs de $J_0(z)$ correspondant aux valeurs de z comprises dans le tableau (15). Ces valeurs sont:

$$-0,130 \qquad +0,072 \qquad -0,040 \qquad +0,027 \qquad -0,021.$$

Pour l'écart correspondant à la longueur nulle, il faut chercher directement la limite du rapport $\frac{2J_1(z)}{z} = \frac{J_1(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{\varphi(x)}{x}$. Cette limite est égale à l'unité.

D'après cela, si l'on désigne par θ_0 l'amplitude initiale qui correspond à $z = 17,96$, les écarts successifs ont pour valeur:

$$+\theta_0 \qquad -1,27\theta_0 \qquad +1,86\theta_0 \qquad -3,45\theta_0 \qquad +6,19\theta_0 \qquad -47,62\theta_0.$$

On doit en conclure que l'hypothèse des oscillations infiniment petites ne reste admissible, dans le voisinage de la longueur nulle, que si l'écart initial est extrêmement faible.

Les positions verticales du pendule sont fournies par les racines, autres que zéro, de l'équation $J_1 = 0$. Ces racines sont:

$$19,61 \qquad 16,47 \qquad 13,32 \qquad 10,17 \qquad 7,01 \qquad 3,83.$$

Elles correspondent, en vertu de (16), aux longueurs:

$$1^m,21 \qquad 0^m,85 \qquad 0^m,55 \qquad 0^m,32 \qquad 0^m,15 \qquad 0^m,04.$$

Pour réaliser le mouvement supposé, on peut, la vitesse d'allongement étant de $0^m,35$ par seconde et le pendule descendant d'abord suivant la verticale, donner à ce pendule un petit choc latéral à l'instant où il atteint l'une des longueurs ainsi calculées: les passages successifs par la verticale feront alors connaître les racines de $J_1(z)$. De là un procédé mécanique assez curieux pour obtenir les racines de cette fonction en dehors des limites de la table. D'après ce qui précède, la même expérience fournirait: par la mesure des longueurs correspondant aux élongations, les racines de J_2, et, par la mesure des élongations elles-mêmes, les valeurs de J_0 correspondant aux racines de J_2.

Considérons maintenant le cas général où les données initiales sont incompatibles avec la solution (10). De cette solution particulière, on peut, par un procédé bien connu, déduire l'intégrale générale de l'équation (9), qui est, avec deux constantes arbitraires A et B:

$$u = A\varphi + B\varphi \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\varphi^2}. \tag{17}$$

La dérivée est:

$$u' = A\varphi' + \frac{B}{\varphi} + B\varphi' \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\varphi^2}. \tag{18}$$

L'on a, par suite:

$$\varphi u' - \varphi' u = B \tag{19}$$

et aussi:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{\varphi}\right) = \frac{B}{\varphi^2}. \tag{20}$$

Prenons pour valeur initiale x_0 une quantité qui n'annule pas $\varphi(x)$, et soient α, β $(\alpha < \beta)$ les deux racines consécutives de $\varphi(x)$ comprenant entre elles x_0. L'équation (10) montre que, dans l'intervalle de α à β, la fonction $\frac{u}{\varphi}$ varie toujours dans le même sens: elle ne peut donc avoir qu'une racine dans cet intervalle. Cette racine, si elle existe, annule u: car φ est toujours fini; il est aisé de voir qu'elle existe réellement. Cherchons en effet vers quelle valeur tend la fonction u quand x tend vers β. Le terme $A\varphi$ tend vers zéro. La quantité $\varphi \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\varphi^2}$, si on l'écrit: $\dfrac{\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\varphi^2}}{\frac{1}{\varphi}}$, se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$: sa vraie valeur est: $\lim. \dfrac{\frac{1}{\varphi^2}}{-\frac{\varphi'}{\varphi^2}} = -\frac{1}{\varphi'_\beta}$.

Si φ'_β était nul, β serait une racine multiple de φ. Mais une pareille circonstance ne peut se produire: car l'équation $x\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi = 0$, différentiée indéfiniment, donnerait alors pour φ et pour toutes ses dérivées des valeurs nulles; la fonction φ, essentiellement holomorphe, serait identiquement nulle. La limite de u, pour $x = \beta$, est donc finie et égale à $-\dfrac{B}{\varphi'_\beta}$. On verrait de même que, pour $x = \alpha$, cette limite est: $-\dfrac{B}{\varphi'_\alpha}$. Or, d'après le théorème de ROLLE, les deux racines consécutives, α et β, de φ, donnent à φ' des signes contraires. Il est établi par là que u s'annule dans l'intervalle de ces deux racines, et nous savons déjà que u ne peut s'annuler qu'une fois.

L'interprétation mécanique de ce résultat est immédiate: u étant égal à θl, chaque fois que θ s'annule il en est de même de u et réciproquement (le cas de la longueur nulle étant mis de côté). D'autre part, la fonction φ s'annule en même temps que $J_1(2\sqrt{x})$ ou, ce qui revient au même: $J_1\left(2\dfrac{\sqrt{gl}}{b}\right)$. Donc:

Si z_1 et z_2 désignent deux racines consécutives quelconques de l'équation $J_1(z) = 0$, le pendule, en passant de la longueur $l = \dfrac{b^2}{4g}z_1^2$ à la longueur $l = \dfrac{b^2}{4g}z_2^2$, prend une fois, et une seule, la position verticale.

La formule (17) n'est applicable que pour l'intervalle α, β dans lequel se trouve comprise la valeur initiale x_0; mais on peut établir une autre formule qui n'est pas soumise à la même restriction. L'intégration par parties donne:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi^2} = \int_{x_0}^{x}\frac{1}{\varphi'}\cdot\frac{\varphi' dx}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi_0\varphi'_0} - \frac{1}{\varphi\cdot\varphi'} - \int_{x_0}^{x}\frac{\varphi'' dx}{\varphi\cdot\varphi'^2}$$

et, comme $\varphi'' x = -\varphi$, il vient:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi_0\varphi'_0} - \frac{1}{\varphi\varphi'} + \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x\varphi'^2},$$

d'où:

$$u = \left(A + \frac{B}{\varphi_0 \varphi_0'}\right)\varphi - \frac{B}{\varphi'} + B\varphi \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{x\varphi'^2},$$

ou bien encore, en remplaçant la constante $A + \frac{B}{\varphi_0 \varphi_0'}$ par C:

$$u = C\varphi - \frac{B}{\varphi'} + B\varphi \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{x\varphi'^2}. \tag{21}$$

Sous cette forme, la dérivée est:

$$u' = C\varphi' + B\varphi' \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{x\varphi'^2} \tag{22}$$

et l'on a encore:

$$u'\varphi - u\varphi' = B.$$

La formule (21) est applicable, à partir d'une valeur initiale quelconque, dans l'intervalle de deux racines consécutives de φ', c'est-à-dire de $J_0(2\sqrt{x})$. Voici, dès lors, comment il faut procéder pour avoir la représentation analytique du mouvement. Partant d'une valeur initiale x_0, on détermine, au moyen des données, comme nous le verrons plus loin, les constantes A, B, C qui figurent dans les équations (17) et (21). Supposons, pour fixer les idées, que x aille en croissant et atteigne une racine β de φ avant d'atteindre une racine de φ'. Pour $x > \beta$, la formule (17) cesse d'être applicable, et il faut lui substituer la formule analogue:

$$u = A'\varphi + B\varphi \int\limits_{x_1}^{x} \frac{dx}{\varphi^2}, \tag{17'}$$

dans laquelle la constante A a pris une nouvelle valeur, A', en même temps qu'on remplaçait x_0 par un nombre x_1 plus grand que β mais plus petit que la racine de φ' immédiatement supérieure à β. La constante B n'a pas changé. Comme la formule (21) continue provisoirement à être valable, il suffit, pour déterminer A', d'identifier les valeurs de u

fournies par les équations (21) et (17'). Le résultat est immédiat si l'on se reporte à la relation $C = A + \frac{B}{\varphi_0 \varphi'_0}$ et l'on trouve:

$$A' - A = B\left(\frac{1}{\varphi_0 \varphi'_0} - \frac{1}{\varphi_1 \varphi'_1}\right).$$

Lorsque x, continuant à croître, dépasse une racine de φ', la formule (21) doit être à son tour modifiée; il faut écrire:

$$u = C'\varphi - \frac{B}{\varphi'} + B\varphi \int_{x_2}^{x} \frac{dx}{x\varphi'^2}, \tag{21'}$$

x_2 étant plus grand que α', mais plus petit que la racine de φ immédiatement supérieure à α'. La nouvelle constante, C', est liée à C par l'équation:

$$C' - C = B\left(\frac{1}{\varphi_2 \varphi'_2} - \frac{1}{\varphi_0 \varphi'_0}\right).$$

En marchant ainsi de proche en proche, on parvient sans peine au résultat général que voici:

Dans l'intervalle de deux racines consécutives, λ et μ, de la fonction φ, le mouvement est représenté par l'équation:

$$u = A\varphi + B\varphi\left(\frac{1}{\varphi_0 \varphi'_0} - \frac{1}{\varphi_k \varphi'_k}\right) + B\varphi \int_{x_k}^{x} \frac{dx}{\varphi^2},$$

x_k étant un nombre arbitrairement choisi entre λ et μ.

Dans l'intervalle de deux racines consécutives, λ' et μ', de la dérivée φ', le mouvement est représenté par l'équation

$$u = C\varphi + B\varphi\left(\frac{1}{\varphi_h \varphi'_h} - \frac{1}{\varphi_0 \varphi'_0}\right) - \frac{B}{\varphi'} + B\varphi \int_{x_h}^{x} \frac{dx}{x\varphi'^2},$$

x_h étant un nombre arbitrairement choisi entre λ' et μ'.

Rappelons que dans ces formules, il faut remplacer u par θl, x par $\frac{g}{b^2} l$, $\varphi(x)$ par $\sqrt{x} J_1(2\sqrt{x})$ et enfin $\varphi'(x)$ par $J_0(2\sqrt{x})$.

Il nous reste à dire comment, connaissant les données initiales, c'est-à-dire les valeurs de θ, $\frac{d\theta}{dl}$ et l, à l'origine du temps, on peut calculer les constantes A, B, C. Pour $t = 0$, la formule $l = a + bt$ donne $l = a$. Soit θ_0 la valeur de θ au même instant, et soit ω_0 celle de $\frac{d\theta}{dt}$. Si l'on fait $x = x_0$ dans les formules (17) et (18), il vient:

$$u_0 = A\varphi_0, \qquad u_0' = A\varphi_0' + \frac{B}{\varphi_0}.$$

Or:

$$u_0 = a\theta_0 \quad \text{et} \quad u_0' = \left(\frac{du}{dx}\right)_0 = \frac{b^2}{g}\theta_0 + \frac{ab}{g}\omega_0.$$

D'après cela:

$$A = a\frac{\theta_0}{\varphi_0}, \qquad B = \frac{b}{g}\varphi_0(b\theta_0 + a\omega_0) - a\varphi_0'\theta_0.$$

En outre la formule: $C = A + \frac{B}{\varphi_0\varphi_0'}$ donne:

$$C = \frac{b}{g}\cdot\frac{b\theta_0 + a\omega_0}{\varphi_0'}.$$

Si φ_0 et φ_0' sont tous les deux différents de zéro, il n'y a aucune difficulté. Si φ_0 est nul, A se présente sous forme infinie ou indéterminée, suivant que θ_0 est ou n'est pas différent de zéro. Il faut alors abandonner momentanément la formule (17) et se servir de la formule (21). Si c'est φ_0' qui est nul la formule (17) est applicable et la formule (21) doit être momentanément mise de côté. Dans tous les cas, l'une des deux formules subsiste et permet de calculer, pour un instant voisin du premier, les valeurs de θ et de ω. On prendra ensuite ce nouvel état pour état initial, de manière à avoir des valeurs finies, à la fois pour A et pour C. En résumé, le problème se trouve complètement résolu.

Ajoutons qu'une fois la constante B connue, la formule (19) fait immédiatement connaître, sans intégration, une série de valeurs de u: à savoir celles qui correspondent aux racines de $\varphi = 0$. On a en effet, pour chacune de ces racines: $u = -\frac{B}{\varphi'}$.

Examinons enfin ce qui arrive lorsque x tend vers zéro, et, à cet effet, reprenons la formule (17) en choisissant pour x_0 un nombre inférieur à la plus petite racine non nulle de la fonction $\varphi = \sqrt{x}J_1(2\sqrt{x})$, c'est-à-dire au nombre $\frac{(3,83)^2}{4} = 3,66$. La formule va rester applicable depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = 0$. Si l'on pose $\varphi = Mx$, l'on peut écrire:

$$\varphi\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi^2} = \varphi\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{M^2x^2}.$$

La fonction M, égale à l'unité pour $x = 0$, reste finie et différente de zéro dans l'intervalle considéré. Si donc on désigne par p une quantité différente de zéro, on peut écrire:

$$\varphi\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi^2} = \frac{\varphi}{p^2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x^2} = \frac{\varphi}{p^2}\left[\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}\right].$$

Faisant tendre ensuite x vers zéro, il vient:

$$\lim_{x=0}\left[\varphi\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi^2}\right] = -\lim\frac{1}{p^2} = -\frac{1}{q^2}. \qquad (q < 0)$$

D'après cela, la limite de u, pour $x = 0$, est égale à $-\frac{B}{q^2}$, quantité finie et différente de zéro. Et, comme l'angle θ est égal à $\frac{u}{l}$, c'est-à-dire à $\frac{g}{b^2}\frac{u}{x}$, on voit que cet angle augmente au delà de toute limite quand la longueur du pendule tend vers zéro. Mais ce résultat est incompatible avec l'hypothèse des oscillations infiniment petites: la solution générale (17) ne peut donc convenir que pour des longueurs de pendule qui ne soient pas trop petites. Tout ce qu'on est en droit d'affirmer, c'est que l'amplitude des oscillations tend à s'exagérer énormément à mesure que la longueur décroît. Nous avions déjà observé ce fait en étudiant le mouvement spécial représenté par la formule (10); mais alors l'amplitude, tout en s'exagérant, conservait un rapport fini avec l'amplitude initiale, et par conséquent on pouvait toujours choisir celle-ci assez petite pour atteindre la longueur nulle avec une amplitude inférieure à une limite donnée quelconque. Dans le cas général, il est impossible, d'après ce que nous venons de voir, d'assigner une pareille limite, au moins quand on s'en tient à la première approximation qui nous occupe pour l'instant.

L'emploi des fonctions J_0 et J_1, fort commode tant que l'argument $2\sqrt{x}$ est inférieur à 20, devient plus pénible au delà de cette limite, puisque les tables ne vont pas plus loin. On a alors la ressource de recourir aux séries (10) et (11); mais ces séries sont elles-mêmes d'autant moins rapidement convergentes que l'argument a une plus grande valeur. Il est vrai que HANSEN a fait connaître des développements de $J_0(z)$ et $J_1(z)$ procédant suivant les puissances négatives de z. Sans insister à cet égard, je vais maintenant écrire sous forme d'intégrale définie la solution générale de l'équation (9). Par des considérations analytiques sur lesquelles il est inutile de s'étendre ici, on trouve:

$$(18)\quad u = Cx\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\sqrt{x}\cos\omega + \alpha)\sin^2\omega\, d\omega + \sin\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,\omega}\frac{d\omega}{\cos^3\omega}\right],$$

avec deux constantes arbitraires C et α. La vérification se fait sans difficulté. Si l'on pose:

$$v = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\sqrt{x}\cos\omega + \alpha)\sin^2\omega\, d\omega$$

et:

$$w = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,\omega}\frac{d\omega}{\cos^3\omega},$$

d'où: $u = C(v + w\sin\alpha)$, on trouve:

$$x\frac{d^2v}{dx^2} + v = -\frac{\sqrt{x}}{2}\sin\alpha$$

et

$$x\frac{d^2w}{dx^2} + w = \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

On a donc bien: $x\dfrac{d^2u}{dx^2} + u = 0$.

Cette solution a l'avantage d'échapper aux difficultés que nous avons eu précédemment à discuter en rencontrant les racines de J_0 et de J_1, et de fournir, par une seule formule, la représentation complète du mouvement. En introduisant explicitement θ et l, et en remplaçant C par $\frac{b^2}{g}k$, il vient:

$$(19) \qquad \theta = k\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2\frac{\sqrt{gl}}{b}\cos\omega + \alpha\right)\sin^2\omega\, d\omega + \sin\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\frac{\sqrt{gl}}{b}\operatorname{tg}\omega}\frac{d\omega}{\cos^3\omega}\right].$$

Quand l tend vers zéro, la seconde intégrale augmente indéfiniment; la première tend vers $\cos\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\omega\, d\omega$, c'est-à-dire vers $\frac{\pi}{4}\cos\alpha$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'angle θ reste fini quand la longueur devient nulle est donc que l'angle α soit nul. Or nous avons vu précédemment que la solution particulière représentée (à un facteur constant près) par la série (10) est la seule pour laquelle θ jouisse de cette propriété. Nous pouvons en conclure la relation:

$$\varphi = Cx\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\sqrt{x}\cos\omega)\sin^2\omega\, d\omega.$$

Pour $x = 0$, le rapport $\frac{\varphi}{x}$ tend vers l'unité tandis que l'intégrale tend vers $\frac{\pi}{4}$: la constante C qui figure dans cette égalité est donc égale à $\frac{4}{\pi}$.

La formule (18) se prête bien à l'étude du cas limite pour lequel x est très petit. Comme $x = \frac{gl}{b^2}$, ce cas se réalise, quelle que soit la vitesse d'allongement ou de raccourcissement b, lorsque le pendule approche de la longueur nulle, et il se rencontre également, quelle que soit la longueur initiale, pourvu que la vitesse b ait une grandeur considérable: on trouverait, par exemple, de cette manière, le mouvement d'un pendule qui, après avoir oscillé avec une longueur constante d'un mètre, est subitement soumis à un raccourcissement de dix mètres par seconde. Lorsque

x tend vers zéro, la première intégrale tend, nous venons de le dire, vers $\frac{\pi}{4}\cos\alpha$. D'autre part, si l'on pose $\operatorname{tg}\omega = \lambda$, il vient:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\sqrt{x}\operatorname{tg}\omega}\frac{d\omega}{\cos^3\omega} = \int_0^\infty e^{-2\lambda\sqrt{x}}(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}d\lambda.$$

Soit a un nombre fixe, supérieur à l'unité, et considérons séparément les deux intervalles d'intégration compris de 0 à a et de a à ∞. L'intégrale prise de 0 à a tend vers la limite $\int_0^a(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}d\lambda$, qui est égale à $\frac{1}{2}[a\sqrt{1+a^2}+\log(a+\sqrt{1+a^2})]$. Dans l'intégrale prise depuis a jusqu'à ∞, on peut, λ étant supérieur à l'unité, écrire:

$$(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}} = \lambda\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{8}\frac{1}{\lambda^4}+\cdots\right)$$

d'où:

$$\int_a^\infty e^{-2\lambda\sqrt{x}}(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}d\lambda = \int_a^\infty e^{-2\lambda\sqrt{x}}\lambda d\lambda + \frac{1}{2}\int_a^\infty e^{-2\lambda\sqrt{x}}\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$+\int_a^\infty e^{-2\lambda\sqrt{x}}d\lambda\left(-\frac{1}{8\lambda^3}+\frac{1}{16\lambda^5}-\cdots\right).$$

La dernière intégrale du second membre est inférieure, en valeur absolue, à $\frac{1}{8}\int_a^\infty\frac{d\lambda}{\lambda^3}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{16a^2}$. D'autre part, on a:

$$\int_a^\infty e^{-2\lambda\sqrt{x}}\lambda d\lambda = \frac{e^{-2a\sqrt{x}}(1+2a\sqrt{x})}{4x}$$

et:

$$\int_a^\infty e^{-2\lambda\sqrt{x}}\frac{d\lambda}{\lambda} = \int_{2a\sqrt{x}}^\infty e^{-p}\frac{dp}{p} = \int_{2a\sqrt{x}}^h e^{-p}\frac{dp}{p} + \int_h^\infty e^{-p}\frac{dp}{p}. \qquad (h > 2a\sqrt{x})$$

L'intégrale $\int_h^\infty e^{-p}\frac{dp}{p}$ est inférieure à $\frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-p}dp$, c'est-à-dire à $\frac{e^{-h}}{h}$, quantité fixe si h est lui-même un nombre fixe.

Reste enfin l'intégrale $\int_{2a\sqrt{x}}^h e^{-p}\frac{dp}{p}$, pour laquelle on peut écrire:

$$\int_{2a\sqrt{x}}^h e^{-p}\frac{dp}{p} = \int_{2a\sqrt{x}}^h \frac{dp}{p}\left(1 - p + \frac{p^2}{1.2} - \ldots\right)$$

$$= \log h - \log(2a\sqrt{x}) - h + 2a\sqrt{x} + \int_{2a\sqrt{x}}^h dp\left(\frac{p}{1.2} - \frac{p^2}{1.2.3} + \ldots\right).$$

Il suffit de supposer h inférieur à 3 pour avoir:

$$\int_{2a\sqrt{x}}^h dp\left(\frac{p}{1.2} - \frac{p^2}{1.2.3} + \ldots\right) < \int_{2a\sqrt{x}}^h \frac{pdp}{2},$$

c'est-à-dire $< \frac{h^2}{4} - a^2x$.

En résumé, l'on voit que, lorsque x tend vers zéro, le rapport $\frac{u}{Cx}$, calculé au moyen de la formule (18), est égal à un nombre fini, dont on peut aisément assigner une limite supérieure, augmenté de la quantité indéfiniment croissante: $\sin\alpha\left[\frac{e^{-2a\sqrt{x}}(1 + 2a\sqrt{x})}{4x} - \frac{1}{4}\log x\right]$.

En développant $e^{-a\sqrt{x}}$, on peut encore réduire la partie indéfiniment croissante à la forme plus simple: $\frac{\sin\alpha}{4}\left[\frac{1}{x} - \log x\right]$.

On déduit de là, pour l'expression de θ en fonction de la longueur l:

$$\theta = k\sin\alpha\left[F + \frac{b^2}{4gl} + \frac{1}{4}\log\frac{b^2}{gl}\right],$$

F désignant une fonction finie. La constante k dépend de l'état initial.

Si l'on part d'une longueur donnée, un mètre par exemple, et d'une vitesse angulaire nulle, k est proportionnel à l'amplitude initiale. Si donc cette amplitude est assez faible pour que la fonction $\frac{k \sin \alpha}{4}\left[\frac{b^2}{gl} + \log \frac{b^2}{gl}\right]$ conserve une très petite valeur tant que $\frac{gl}{b^2}$ dépasse un très petit nombre fixe ε, (condition essentielle pour que l'hypothèse des oscillations infiniment petites puisse être maintenue), le mouvement du pendule, dans le voisinage de la longueur $l = \varepsilon \frac{b^2}{g}$, sera approximativement représenté par l'équation:

$$\theta = \frac{k \sin \alpha}{4}\left(\frac{b^2}{gl} + \log \frac{b^2}{gl}\right).$$

Tout ceci suppose que $\sin \alpha$ n'est pas nul: dans le cas contraire, on est ramené, comme nous l'avons vu, au mouvement simple représenté par la formule (10).

On peut également se demander ce que devient la loi du mouvement quand x acquiert une très grande valeur, circonstance qui finit toujours par se produire, avec un pendule de longueur croissante, au bout d'un laps de temps suffisant. Sans entrer ici dans la recherche directe de la valeur asymptotique vers laquelle tend alors le second membre de l'équation (18), je vais vérifier que le mouvement final peut être représenté au moyen de l'équation approchée:

$$u = Ax^p \cos(2\sqrt{x}) + Bx^p \sin(2\sqrt{x}), \tag{20}$$

A et B désignant deux constantes, et l'exposant p étant pris égal à $\frac{1}{4}$. Considérons en effet l'expression:

$$v = x^p \cos(2\sqrt{x}).$$

On a:

$$\frac{dv}{dx} = px^{p-1} \cos(2\sqrt{x}) - x^{p-\frac{1}{2}} \sin(2\sqrt{x})$$

et

$$\frac{d^2v}{dx^2} = [p(p-1)x^{p-2} - x^{p-1}] \cos 2\sqrt{x} - \left(2p - \frac{1}{2}\right)x^{p-\frac{2}{3}} \sin(2\sqrt{x}).$$

On voit que, si $p = \frac{1}{4}$, il reste simplement:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\left(\frac{3}{16}x^{p-2} + x^{p-1}\right)\cos 2\sqrt{x}$$

d'où:

$$x\frac{d^2v}{dx^2} + v = -\frac{3}{16}x^{p-1}\cos 2\sqrt{x} = -\frac{3}{16}\frac{v}{x}.$$

De même, si l'on pose: $w = x^p \sin(2\sqrt{x})$, on trouve:

$$x\frac{d^2w}{dx^2} + w = -\frac{3}{16}\frac{w}{x}.$$

Il s'ensuit que la fonction u, définie par l'équation (20), vérifie rigoureusement l'équation différentielle:

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + u = -\frac{3}{16}\frac{u}{x}$$

ou bien:

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + \left(1 + \frac{3}{16x}\right)u = 0$$

qui se réduit à l'équation (9) quand on néglige $\frac{3}{16x}$ en présence de l'unité.

Les constantes A et B se déterminent aisément quand on connait l'état initial, pourvu que celui-ci soit donné à un instant pour lequel x est déjà très grand. La relation entre θ et l est:

$$(21) \qquad \theta = \left(\frac{g}{b^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{A\cos\left(\frac{2}{b}\sqrt{gl}\right) + B\sin\left(\frac{2}{b}\sqrt{gl}\right)}{l^{\frac{3}{4}}}.$$

Elle peut évidemment, par l'introduction de deux nouvelles constantes, R et φ, être mise sous la forme:

$$(22) \qquad \theta = Rl^{-\frac{3}{4}}\sin\left(\frac{2}{b}\sqrt{gl} - \varphi\right).$$

Les passages par la verticale s'obtiennent en écrivant la condition:

$$(23) \qquad \frac{2}{b}\sqrt{gl} - \varphi = \lambda\pi,$$

λ étant un entier quelconque, d'où:

$$l = \frac{b^2}{4g}(\varphi + \lambda\pi)^2.$$

Si l'on prend deux passages consécutifs, pour lesquels λ ait les valeurs m et $m + 1$, l'accroissement de longueur dans cet intervalle est égal à $\frac{b^2}{4g}[(\varphi + \overline{m+1}\,\pi)^2 - (\varphi + m\pi)^2]$, c'est-à-dire à $\pi\frac{b^2}{4g}[2\varphi + (2m + 1)\pi]$, et, comme le pendule s'allonge avec la vitesse b, le laps de temps séparant ces deux passages est égal à $\pi\frac{b}{4g}[2\varphi + (2m + 1)\pi)$, ou bien encore à $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{\pi}{2(\varphi + m\pi)}\right]$, c'est-à-dire à $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\pi b}{4\sqrt{gl}}\right)$ ou enfin à $\pi\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{\pi^2 b}{4g}$. Dans cette expression, l désigne la longueur du pendule à l'instant du premier passage. La durée de l'oscillation se trouve donc, par l'effet de l'allongement, augmentée de la quantité $\pi^2\frac{b}{4g}$, indépendante de la longueur l.

Ce résultat peut être mis sous une forme plus élégante si l'on introduit, en même temps que la longueur l à l'instant du premier passage, la longueur l' à l'instant du second. En négligeant $\frac{\pi^2 b^2}{4\,gl}$ en présence de l'unité, on a évidemment la relation:

$$l' = l + \pi b\sqrt{\frac{l}{g}}$$

d'où:

$$\frac{l + l'}{2} = l + \frac{\pi b}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

La durée de l'oscillation d'un pendule ordinaire, de longueur $\frac{l + l'}{2}$, serait donc: $\pi\sqrt{\frac{l + l'}{2g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g} + \frac{\pi b}{2g}\sqrt{\frac{l}{g}}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\pi b}{4\sqrt{gl}}\right)$. D'après cela:

L'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs d'un pendule lentement variable par la verticale est sensiblement égal à la durée de l'oscillation d'un pendule ordinaire, ayant pour longueur constante la longueur moyenne du pendule variable dans cet intervalle de temps.

Les élongations sont déterminées par la condition d'annuler $\frac{d\theta}{dt}$, ou, ce qui revient au même, $\frac{d\theta}{dl}$, θ étant lié à l par l'équation (22). On trouve ainsi:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2}{b}\sqrt{gl}-\varphi\right)=\frac{4}{3}\frac{\sqrt{gl}}{b}.$$

D'après l'hypothèse, le second membre est ici très-grand; l'arc $\frac{2}{b}\sqrt{gl}-\varphi$ diffère donc très peu d'un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, et l'on a, en confondant cette petite différence avec sa tangente:

$$(24)\qquad \frac{2}{b}\sqrt{gl}-\varphi=(2\lambda+1)\frac{\pi}{2}-\frac{3b}{4\sqrt{gl}},$$

λ désignant un très-grand entier. Considérons les longueurs l et l'' qui correspondent à un passage par la verticale et à l'élongation consécutive. Les formules (23) et (24) donnent:

$$\frac{4g}{b^2}(l''-l)=\left[\lambda\pi+\varphi+\frac{\pi}{2}-\frac{3b}{4\sqrt{gl''}}\right]^2-(\lambda\pi+\varphi)^2$$

ou:

$$\frac{4g}{b^2}(l''-l)=2(\lambda\pi+\varphi)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3b}{4\sqrt{gl''}}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3b}{4\sqrt{gl''}}\right)^2$$

ou bien, en négligeant $\frac{b^2}{gl}$ dans le second membre, ce qui permet de remplacer $\frac{1}{\sqrt{l''}}$ par $\frac{1}{\sqrt{l}}\left(1-\frac{\pi}{4}\frac{b}{\sqrt{gl}}\right)$,

$$\frac{4g}{b^2}(l''-l)=\frac{4\sqrt{gl}}{b}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3b}{4\sqrt{gl}}\right)+\frac{\pi^2}{4}.$$

Le temps $\frac{l''-l}{b}$ qui sépare les deux instants considérés a donc pour valeur:

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}-\frac{3}{4}\frac{b}{g}+\frac{\pi^2 b}{16 g}.$$

En résumé:

L'intervalle de temps qui s'écoule entre un passage par la verticale et l'élongation consécutive est sensiblement égal à:

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}+\frac{\pi^2-12}{16}\frac{b}{g}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}-0,13\frac{b}{g}$$

l désignant la longueur du pendule à l'instant du passage par la verticale.

On remarque que la durée de la demi-oscillation ascendante est légèrement diminuée par le fait de l'allongement, tandis qu'il y a augmentation dans la durée de l'oscillation. L'accroissement de durée porte donc exclusivement sur la demi-oscillation descendante: ceci, en supposant que la comparaison est faite avec le pendule ordinaire ayant comme longueur la plus petite longueur du pendule variable dans l'intervalle de temps considéré. Si la comparaison était faite en employant la plus grande longueur, les résultats seraient changés: le raccourcissement de durée de la demi-oscillation ascendante atteindrait $\frac{3\pi^2+12}{16}\frac{b}{g}$, et la demi-oscillation descendante présenterait elle-même un léger raccourcissement, égal à $\frac{\pi^2-12}{16}\frac{b}{g}$.

Si, au lieu d'un pendule qui s'allonge, on avait affaire à un pendule qui se raccourcit, le sens du mouvement serait renversé: il suffirait, dans ce qui précède, de substituer le mot »descendante» au mot »ascendante» et réciproquement.

Quant à l'amplitude des oscillations, elle se déduit de la comparaison des formules (22) et (24). Pour une élongation quelconque, l'amplitude est proportionnelle en valeur absolue à $\frac{\cos\left(\frac{3b}{4\sqrt{gl}}\right)}{l^{\frac{3}{4}}}$. Continuant à négliger le carré de $\frac{b}{\sqrt{gl}}$, nous trouvons simplement $\frac{1}{l^{\frac{3}{4}}}$. Deux élongations successives, correspondant aux longueurs l et l', sont donc dans le rapport $\left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{3}{4}}$. Mais $l'=l+b\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, donc $\left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{3}{4}}=1+\frac{3}{4}\pi\sqrt{\frac{b}{gl}}$. Par suite:

La différence d'amplitude de deux élongations successives θ et θ', est sensiblement égale à $\frac{3}{4}\pi\sqrt{\frac{b}{gl}}$; cette différence tend vers zéro à mesure que la longueur augmente.

La formule (22) peut être transformée de manière à exprimer l'angle θ en fonction du temps: il suffit d'y remplacer l par sa valeur $a + bt$, ce qui donne:

$$\theta = R(a + bt)^{-\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{2}{b}\sqrt{g(a + bt)} - \varphi\right),$$

ou bien, en posant: $\sqrt{\frac{g}{a}} = \gamma$ et $\frac{b}{\sqrt{ga}} = p$:

$$\theta = Ra^{-\frac{3}{4}}(1 + p\gamma t)^{-\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{2}{p}\sqrt{1 + p\gamma t} - \varphi\right).$$

Si la longueur initiale a est assez grande et si l'intervalle de temps t est assez petit pour qu'on puisse négliger $p^2\gamma^2t^2$ en présence de $p\gamma t$, il vient, en remplaçant la constante $Ra^{-\frac{3}{4}}$ par ρ:

$$\theta = \rho\left(1 - \frac{3}{4}p\gamma t\right) \sin\left(\frac{2}{p} + \gamma t - \frac{1}{4}p\gamma^2t^2 - \varphi\right).$$

Remplaçons encore $\frac{2}{p} - \varphi$ par une nouvelle constante ψ et continuons à négliger les puissances de $p\gamma t$ supérieures à la première. Nous pouvons alors écrire:

$$(25) \qquad \theta = \rho\left(1 - \frac{3}{4}p\gamma t\right) \sin(\gamma t - \psi) - \frac{\rho p\gamma^2t^2}{4}\cos(\gamma t - \psi).^{1}$$

---

[1] Dans la note communiquée le 15 janvier 1894 à l'Académie des sciences, j'ai donné la formule: $\theta = \rho\left(1 - \frac{3}{4}k\gamma t\right)\sin(\gamma t - \omega) + \rho\frac{k}{8}(1 - \gamma^2t^2)\cos(\gamma t - \omega)$ qui, à première vue, ne parait pas concorder avec la formule (25). Mais il suffit, après avoir remplacé k par son équivalent p, d'établir entre les constantes arbitraires ψ et ω la relation: $\omega = \psi + \frac{p}{8}$ et de négliger les termes d'ordre p^2 pour trouver un résultat identique. Il n'y a donc, au fond, de différence que dans le choix de l'origine du temps.

Si l'on suppose qu'à l'instant initial le pendule soit vertical, ψ est un multiple de π: on peut prendre $\psi = 0$ et il reste simplement:

$$\theta = \rho\left(1 - \frac{3}{4}p\gamma t\right)\sin\gamma t - \frac{\rho p\gamma^2 t^2}{4}\cos\gamma t. \tag{26}$$

La discussion de cette formule est aisée, et conduit à dresser le tableau suivant:

	Valeur du temps.
Première position verticale	$0,$
Première élongation positive	$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{1}{16}(\pi^2 - 12)\frac{b}{g},$
Deuxième position verticale	$\pi\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi^2}{4}\frac{b}{g},$
Première élongation négative	$\frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{1}{16}(9\pi^2 - 12)\frac{b}{g},$
Troisième position verticale	$2\pi\sqrt{\frac{a}{g}} + \pi^2\frac{b}{g},$ etc.

Tous les calculs qui précèdent supposent qu'on traite le nombre $\frac{b}{\sqrt{ga}}$ comme une quantité infiniment petite. On peut pousser l'approximation beaucoup plus loin, en recourant à une autre méthode que je vais maintenant indiquer.

Reprenons l'équation fondamentale (9), et remplaçons-y la variable x par sa valeur $\frac{g}{b^2}l$ ou $\frac{g}{b^2}(a + bt)$, ce qui, avec les notations adoptées, peut s'écrire: $\frac{1}{p^2}(1 + p\gamma t)$.

Il vient ainsi:

$$(1 + p\gamma t)\frac{d^2u}{dt^2} + \gamma^2 u = 0. \tag{27}$$

Imaginons que u soit développé en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de la petite quantité p:

$$u = u_0 + u_1 p + u_2 p^2 + \dots + u_n p^n + \dots$$

et limitons-nous provisoirement au terme $u_n p^n$. Si nous substituons dans l'équation (27), le premier membre devient un polynôme en p, de degré $\overline{n+1}$, et nous pouvons profiter de l'indétermination des fonctions u_0, $u_1, \ldots, u_{n-1}$ pour annuler dans ce polynome les coefficients des diverses puissances de p, depuis la puissance 0 jusqu'à la puissance $\overline{n-1}$. Il restera ensuite une équation servant à calculer u_n. On trouve de cette manière:

$$u_0'' + \gamma^2 u_0 = 0,$$

$$u_1'' + \gamma^2 u_1 = -\gamma t u_0'',$$

$$u_2'' + \gamma^2 u_2 = -\gamma t u_1'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n-1}'' + \gamma^2 u_{n-1} = -\gamma t u_{n-2}'',$$

$$(1 + p\gamma t) u_n'' + \gamma^2 u_n = -\gamma t u_{n-1}''.$$

Pour achever la détermination des fonctions auxiliaires, convenons que toutes ces fonctions, ainsi que leurs dérivées premières, s'annulent à l'instant initial, exception faite de u_0 et de u_0', qui devront, à cet instant, prendre les valeurs, supposées connues, de u et de u'. Il vient:

$$u_0 = A \sin \gamma t + B \cos \gamma t,$$

$$u_1 = \cos \gamma t \int_0^t u_0'' t \sin \gamma t \, dt - \sin \gamma t \int_0^t u_0'' t \cos \gamma t \, dt,$$

$$u_2 = \cos \gamma t \int_0^t u_1'' t \sin \gamma t \, dt - \sin \gamma t \int_0^t u_1'' t \cos \gamma t \, dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n-1} = \cos \gamma t \int_0^t u_{n-2}'' t \sin \gamma t \, dt - \sin \gamma t \int_0^t u_{n-2}'' t \cos \gamma t \, dt$$

et l'on se procure ainsi, de proche en proche, par des quadratures aisées à effectuer, les valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Toute la difficulté de l'intégration est reportée sur la fonction u_n. Mais, si l'on néglige le terme $p\gamma t u_n''$ en présence de u_n'', on a simplement:

$$u_n = \cos \gamma t \int_0^t u_{n-1}'' t \sin \gamma t \, dt - \sin \gamma t \int_0^t u_{n-1}'' t \cos \gamma t \, dt;$$

avec une erreur relative qui est du même ordre que $p\gamma t$: il en résultera, pour u, une erreur dont l'expression contient en facteur p^{n+1}.

On pourrait discuter complètement les conditions de convergence de la série obtenue en prolongeant indéfiniment la répétition du même procédé; mais cette discussion manquerait d'intérêt pratique, à cause de la longueur rebutante des calculs nécessaires pour former explicitement u_n, dès que l'indice n devient un peu considérable. Je me bornerai donc, pour terminer ce chapitre, à donner la valeur de u calculée en tenant compte de la seconde puissance de p. En vue de simplifier, j'admets qu'à l'instant initial le pendule est vertical, ce qui entraîne la condition $B = 0$, d'où $u_0 = A \sin \gamma t$, et je fais $A = 1$, sauf à rétablir ensuite ce facteur constant. On trouve, dans ces conditions:

$$(28) \qquad u = \sin \gamma t + \frac{p\gamma t}{4}(\sin \gamma t - \gamma t \cos \gamma t)$$

$$+ \frac{p^2}{32}[(2\gamma^3 t^3 - 3\gamma t)\cos \gamma t + (3 - 3\gamma^2 t^2 - \gamma^4 t^4)\sin \gamma t].$$

Il est aisé de s'assurer que cette expression vérifie l'équation (27), pourvu qu'on néglige les termes de l'ordre p^3. Comme application, calculons l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs par la verticale, le premier passage étant celui qui correspond à $t = 0$. Il suffit de chercher pour quelle valeur de γt, voisine de π, s'annule le second membre de l'équation (28). En posant: $\gamma t = \pi + \varepsilon$, il vient:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{p\gamma t}{4} \frac{\gamma t + \frac{p}{8}(3 - 2\gamma^2 t^2)}{1 + \frac{p\gamma t}{4} + \frac{p^2}{32}(3 - 3\gamma^2 t^2 - \gamma^4 t^4)}.$$

Cette formule montre d'abord que $\operatorname{tg} \varepsilon$ est du même ordre que p: la différence $\operatorname{tg} \varepsilon - \varepsilon$ est donc de l'ordre p^3, et doit être négligée. En remplaçant dans le second membre γt par $\pi + \varepsilon$ et négligeant encore p^3, on a:

$$\varepsilon = \frac{p}{4}(\pi + \varepsilon)\frac{\pi + \varepsilon + \frac{p}{8}(3 - 2\pi^2)}{1 + \frac{p\pi}{4}} = \frac{p}{4}(\pi + \varepsilon)\left[\pi + \varepsilon + \frac{p}{8}(3 - 2\pi^2)\right]\left(1 - \frac{p\pi}{4}\right)$$

ou bien encore:

$$\varepsilon = \frac{p}{4}\left[\pi^2 + \frac{\pi p}{8}(3 - 2\pi^2) + 2\pi\varepsilon - \frac{p\pi^3}{4}\right] = \frac{p}{4}\left[\pi^2 + \frac{3p\pi}{8} - \frac{p\pi^3}{2} + 2\pi\varepsilon\right],$$

d'où:

$$\varepsilon = \frac{p}{4}\frac{\pi^2 + \frac{3p\pi}{8} - \frac{p\pi^3}{2}}{1 - \frac{p\pi}{2}} = \frac{p}{4}\left(\pi^2 + \frac{3p\pi}{8}\right).$$

Il vient alors:

$$\gamma t = \pi + \frac{p\pi^3}{4} + \frac{3p^2\pi}{32},$$

ou bien, en remplaçant γ par $\sqrt{\frac{g}{a}}$ et p par $\frac{b}{\sqrt{ag}}$:

$$t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi^3 b}{4\, g} + \frac{3\pi}{32}\frac{b^2}{g\sqrt{ag}}.$$

Ainsi que nous l'avons déjà fait au premier degré d'approximation, comparons cette durée de l'oscillation avec celle de l'oscillation d'un pendule ayant une longueur constante l, égale à la longueur moyenne atteinte à l'instant $\frac{t}{2}$. On a: $l = a + b\frac{t}{2}$, d'où

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left[1 + \frac{bt}{4a} - \frac{b^2t^2}{32a^2}\right].$$

En effectuant, on trouve:

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi^3 b}{4\, g} + \frac{7\pi^3}{32}\frac{b^2}{g\sqrt{ag}}.$$

D'après cela:

La durée de l'oscillation du pendule moyen est un peu supérieure à celle de l'oscillation du pendule variable; la différence est égale à $\frac{\pi(7\pi^2 - 3)}{32}\frac{b^2}{g\sqrt{ag}}$, *c'est-à-dire à* $6{,}47\frac{b^2}{g\sqrt{ag}}$.

Pour déduire de la formule (28) l'angle d'écart θ en fonction du temps, il reste à remplacer u par θl, c'est-à-dire par $\theta a(1 + p\gamma t)$. En effectuant, au degré d'approximation adopté, et négligeant un facteur commun constant, on trouve sans peine:

$$\theta = \sin\gamma t - \frac{p\gamma t}{4}(3\sin\gamma t + \gamma t\cos\gamma t) \tag{29}$$
$$+ \frac{p^2}{32}[(10\gamma^3 t^3 - 3\gamma t)\cos\gamma t + (3 - 43\gamma^2 t^2 - \gamma^4 t^4)\sin\gamma t].$$

III.

Etude des oscillations finies.

Quand les oscillations ont une amplitude trop grande pour que l'angle d'écart puisse être à chaque instant confondu avec son sinus, la difficulté du problème s'accroît singulièrement. Si l'on cherche à intégrer par un développement en série l'équation différentielle du mouvement, mise par exemple sous la forme (6), on se heurte à des calculs inextricables, et il ne parait guère possible d'obtenir la forme du terme général. Aussi nous contenterons-nous d'examiner deux cas limites: ceux où la longueur du pendule varie soit très vite, soit très lentement.

Considérons d'abord un pendule dont le fil se raccourcit uniformément avec une très grande vitesse, de telle façon qu'en prenant comme unité de temps la seconde, le rapport $\frac{g}{b} = s$ ait une très petite valeur numérique.

L'équation du mouvement:

$$(a - bt)\frac{d^2\theta}{dt^2} - 2b\frac{d\theta}{dt} + g\sin\theta = 0$$

dans laquelle nous mettons en évidence le signe de b, peut, en divisant par b et posant $\frac{a}{b} - t = z$, se mettre sous la forme:

$$z\frac{d^2\theta}{dz^2} + 2\frac{d\theta}{dz} + s\sin\theta = 0. \tag{30}$$

Supposons θ développé en série suivant les puissances positives de s, et négligeons les puissances supérieures à la seconde. Alors:

$$\theta = u + vs + ws^2,$$

u, v, w étant trois fonctions inconnues. En substituant dans l'équation (30) et continuant à négliger s^3, il vient:

$$z(u'' + v''s + w''s) + 2(u' + v's + w's) + s(\sin u + vs\cos u) = 0.$$

Egalons séparément à zéro les coefficients des diverses puissances de s, ce qui donne:

$$u''z + 2u' = 0,$$

$$v''z + 2v' = -\sin u,$$

$$w''z + 2w' = -v\cos u.$$

Enfin convenons que, pour la valeur initiale $z = z_0 = \frac{a}{b}$, correspondant à $t = 0$, les fonctions v et w doivent être nulles ainsi que leurs dérivées premières. Nous pouvons alors écrire, en appelant α et β deux constantes arbitraires et intégrant les équations précédentes:

$$u = \alpha + \frac{\beta}{z},$$

$$v = -\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z^2} \int_{z_0}^{z} z \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{z}\right) dz,$$

$$w = +\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z^2} \int_{z_0}^{z} z\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{z}\right) dz \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z^2} \int_{z_0}^{z} z\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{z}\right) dz.$$

Le calcul est ainsi ramené à une suite de quadratures. Ces quadratures, impossibles à effectuer dans le cas général, deviennent au contraire très aisées dans le cas particulier où la constante β est égale à zéro, ce qui revient à supposer que la dérivée u' est constamment nulle. Comme, par hypothèse, u' est égal à θ' pour $t = 0$, on voit que ce cas se réalise quand le pendule a une vitesse angulaire nulle à l'instant initial. On trouve:

$$(31) \qquad \theta = \alpha - \frac{s\sin\alpha}{2z}(z - z_0)^2 + \frac{s^2\sin 2\alpha}{12}\left[\frac{(z - z_0)(z^2 - 5zz_0 - 2z_0^2)}{2z} + 3z_0^2\log\frac{z}{z_0}\right].$$

Cette formule n'est applicable en toute sécurité que pour les valeurs de z qui ne sont pas trop petites, c'est-à-dire quand le pendule est encore assez éloigné de la longueur nulle. Si l'on néglige le terme en s^2 et si l'on remplace z par sa valeur $\frac{l}{b}$ en fonction de la longueur l du pendule, on a une relation de la forme:

$$\theta = A + Bl + \frac{C}{l}$$

où A, B, C désignent trois constantes: c'est l'équation polaire approximative de la trajectoire de l'extrémité du pendule.

Considérons maintenant un pendule qui s'allonge ou se raccourcit avec une très grande lenteur. Pour préciser, nous supposerons qu'il y a allongement, et que le nombre $\frac{b}{\sqrt{ga}}$ est très petit: nous avons déjà fait remarquer que cette dernière circonstance finit toujours par se réaliser, puisqu'on peut alors prendre une longueur initiale a aussi grand qu'on le veut. Il est naturel de procéder comme on le fait en astronomie pour l'étude des mouvements troublés: c'est-à-dire d'avoir recours à la méthode de la variation des constantes. Posons, pour abréger:

$$u = \sqrt{\frac{g}{a}}\, t, \qquad p = \frac{b}{\sqrt{ga}},$$

L'équation (3) prend la forme:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \sin\theta + p\left[u\frac{d^2\theta}{du^2} + 2\frac{d\theta}{du}\right] = 0. \tag{32}$$

En négligeant d'abord complètement le terme qui contient p en facteur, il reste l'équation:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \sin\theta = 0 \tag{33}$$

qui représente le mouvement d'un pendule ordinaire, de longueur a. L'intégrale générale de l'équation (33) peut s'écrire:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\operatorname{cn}(u + C) \tag{34}$$

avec deux constantes arbitraires, θ_0 et C, dont la première est égale à l'angle d'écart maximum. Le *cosinus amplitude* qui figure ici doit être pris avec le module $k = \sin\frac{\theta_0}{2}$. En désignant, suivant l'usage, par k' le module complémentaire $\sqrt{1-k^2}$ et résolvant par rapport à θ, il vient:

$$\theta = 2 \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{k}{k'} \operatorname{cn}(u + C)\right]. \tag{35}$$

La vérification est facile: en remplaçant $u + C$ par v, on a, d'après des formules connues:

$$\frac{d\theta}{du} = -\frac{2kk' \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 v}, \qquad \frac{d^2\theta}{du^2} = -\frac{2kk' \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn}^2 v}$$

et:

$$\sin\theta = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2kk' \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn}^2 v}$$

d'où:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \sin\theta = 0.$$

L'expression (35) de θ renferme deux constantes k et C. Considérons ces deux quantités comme des fonctions de u, qu'il s'agit de déterminer de manière à vérifier l'équation (32). Si l'on s'impose la condition:

$$\frac{\partial\theta}{\partial k}\frac{dk}{du} + \frac{\partial\theta}{\partial C}\frac{dC}{du} = 0 \tag{36}$$

l'on a:

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{\partial\theta}{\partial u},$$

$$\frac{d^2\theta}{du^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial k}\frac{dk}{du} + \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial C}\frac{dC}{du}.$$

Substituant, et remarquant que la somme $\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \sin\theta$ est identiquement nulle, on trouve:

$$(37)\qquad \frac{dk}{du} = \frac{p}{1+pu}\frac{\left(2\frac{\partial\theta}{\partial u} + u\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial C}}{\frac{\partial\theta}{\partial C}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial k} - \frac{\partial\theta}{\partial k}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial C}},$$

$$\frac{dC}{du} = -\frac{p}{1+pu}\frac{\left(2\frac{\partial\theta}{\partial u} + u\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial k}}{\frac{\partial\theta}{\partial C}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial k} - \frac{\partial\theta}{\partial k}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial C}}.$$

La fonction θ, qui sert ainsi à déterminer $\frac{dk}{du}$ et $\frac{dC}{du}$, est fournie par l'équation (35): elle dépend uniquement de k et de $u+C$; par conséquent les dérivées $\frac{\partial\theta}{\partial C}$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial C}$ sont identiques à $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}$. Le problème se trouve en définitive ramené à l'intégration de deux équations simultanées du premier ordre, où les inconnues sont k et C; mais la petitesse supposée du paramètre p permet de faire un pas de plus. On voit en effet qu'en laissant de côté les valeurs particulières pour lesquelles le déterminant $\frac{\partial\theta}{\partial C}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial k} - \frac{\partial\theta}{\partial k}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial C}$ approcherait de zéro, les dérivées $\frac{dk}{du}$, $\frac{dC}{du}$ sont elles-mêmes très petites: d'où il résulte que k et C varient très lentement. On peut donc, dans les seconds membres, qui contiennent déjà p en facteur, négliger les variations des inconnues, du moins tant que u reste compris dans des limites assez étroites. Le problème ne dépend plus dès lors que de deux quadratures: si l'on veut, on peut, après avoir ainsi obtenu des valeurs approchées de k et de C, les substituer dans les seconds membres pour passer à une seconde, puis à une troisième approximation, etc.

Malheureusement, ces quadratures ne paraissent guère calculables: la solution est donc plutôt théorique que pratique. Nous allons voir comment il est possible de parvenir à une solution effective, au moins quand l'amplitude des oscillations n'est pas excessive.

A cet effet, considérons d'abord la fonction $\theta = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{k}{k'}\operatorname{cn} u\right)$, qui vérifie rigoureusement, comme nous l'avons vu, l'équation (33) du pendule ordinaire, et cherchons les premiers termes de son développement en série suivant les puissances entières et croissantes du module k. En tenant compte de k^3 et négligeant k^4, on trouve successivement:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^\varphi d\varphi\left(1 + \frac{k^2}{2}\sin^2\varphi\right) = \varphi + \frac{k^2}{4}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi),$$

$$\varphi = \operatorname{am} u = u - \frac{k^2}{4}(u - \sin u \cos u),$$

$$\operatorname{cn} u = \cos \operatorname{am} u = \cos u + \frac{k^2}{4}\sin u(u - \sin u \cos u),$$

$$\frac{k}{k'}\operatorname{cn} u = k\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)\left[\cos u + \frac{k^2}{4}\sin u(u - \sin u\cos u)\right]$$

$$= k\left[\cos u + \frac{k^2}{2}\cos u + \frac{k^2}{4}\sin u(u - \sin u \cos u)\right],$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{k}{k'}\operatorname{cn} u\right) = k\cos u + \frac{k^3}{2}\cos u + \frac{k^3}{4}\sin u(u - \sin u\cos u) - \frac{k^3}{3}\cos^3 u,$$

$$\theta = 2k\cos u + k^3\cos u + \frac{k^3}{2}\sin u(u - \sin u \cos u) - \frac{2k^3}{3}\cos^3 u,$$

$$\theta = 2k\cos u + \frac{k^3}{6}(3\cos u + 3u\sin u - \cos^3 u).$$

Mais

$$\cos^3 u = \frac{\cos 3u + 3\cos u}{4}.$$

Donc enfin:

$$(38)\quad \theta = 2k\cos u + \frac{k^3}{24}[9\cos u + 12u\sin u - \cos 3u] = 2k\cos u + \frac{k^3}{24}f(u)$$

en posant pour abréger:

$$f(u) = 9\cos u + 12u\sin u - \cos 3u.$$

L'erreur commise est de l'ordre k^4, c'est-à-dire $\sin^4\frac{\theta_0}{2}$. Supposons par exemple $\theta_0 = 20°$, ce qui représente déjà une oscillation très notable: alors k^4 serait égal à 0,00091, inférieur par conséquent à $\frac{1}{1000}$. Pour un pendule oscillant de 180°, c'est-à-dire atteignant l'horizontale à chacune de ses élongations, on n'aurait encore pour k^4 que la valeur 0,25.

Revenons à l'équation (32), et, pour l'intégrer, posons $\theta = \omega + p\varepsilon$, en admettant d'une part que p^2 est négligeable, d'autre part que la quantité ω est égale à l'angle θ de la formule (38), et vérifie par conséquent l'équation (33). Il vient ainsi:

$$\frac{d^2\varepsilon}{du^2} + \varepsilon \cos\omega = F(u) \tag{39}$$

en posant:

$$F(u) = -\left(u\frac{d^2\omega}{du^2} + 2\frac{d\omega}{du}\right).$$

L'équation (39) est une équation linéaire, du second ordre, par rapport à ε. Si l'on remplace ω par sa valeur $2k\cos u + \frac{k^3}{24}f(u)$ et si l'on continue à négliger k^4, l'on a:

$$\frac{d^2\varepsilon}{du^2} + (1 - 2k^2\cos^2 u)\varepsilon = Ak + Bk^3 \tag{40}$$

avec les notations:

$$A = 2u\cos u + 4\sin u,$$

$$B = -\frac{1}{24}(uf''u + 2f'u).$$

Introduisons quatre fonctions auxiliaires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, en posant:

$$\varepsilon = \alpha + k\beta + k^2\gamma + k^3\delta,$$

fonctions que nous assujettirons à s'annuler, ainsi que leurs dérivées premières, pour la valeur particulière $u = 0$; puis, après avoir substitué cette valeur de ε dans l'équation (40), annulons séparément les coefficients des puissances de k, jusqu'à la troisième inclusivement (la quatrième étant toujours regardée comme négligeable). Nous avons:

$$\alpha'' + \alpha = 0,$$

$$\beta'' + \beta = A,$$

$$\gamma'' + \gamma = 2\alpha\cos^2 u,$$

$$\delta'' + \delta = B + 2\beta\cos^2 u.$$

On voit d'abord qu'en vertu de l'hypothèse $\alpha = \alpha' = 0$, pour $u = 0$ la fonction α est identiquement nulle, et qu'il en est de même, par suite, de γ. On a donc simplement à calculer β et δ au moyen des deux équations:

$$\beta'' + \beta = A,$$

$$\delta'' + \delta = B + 2\beta\cos^2 u$$

et à prendre ensuite:

$$\varepsilon = k\beta + k^3\delta.$$

Le calcul de β conduit à la valeur:

$$\beta = \frac{u^2 \sin u - 3u \cos u + 3 \sin u}{2}.$$

On en déduit:

$$2\beta\cos^2 u = \frac{u^2+3}{4}(\sin u + \sin 3u) + \frac{3u}{4}(\cos 3u + 3\cos u).$$

D'autre part, de la relation:

$$f(u) = 9\cos u + 12u\sin u - \cos 3u$$

on tire:

$$B = -\frac{1}{24}(uf''u + 2f'u)$$

$$= -\frac{1}{24}[-12u^2\sin u + 39u\cos u + 6\sin u + 9u\cos 3u + 6\sin 3u].$$

Donc:

$$\delta'' + \delta = \frac{3}{4}u^2\sin u + \frac{5}{8}u\cos u + \frac{1}{2}\sin u + \frac{1}{4}u^2\sin 3u + \frac{3}{8}u\cos 3u + \frac{1}{2}\sin 3u.$$

Pour intégrer cette équation, il suffit de former la somme des intégrales correspondant aux divers termes du second membre; on choisira ensuite les constantes arbitraires de manière à avoir $\delta = \delta' = 0$ pour $u = 0$. Le résultat est:

$$32\delta = -4u^3\cos u + 11u^2\sin u - u\cos u - u^2\sin 3u - 3u\cos 3u + 4\sin u.$$

Finalement, les oscillations d'un pendule lentement variable sont représentées par la formule:

$$(41) \qquad \theta = 2k\cos u + \frac{k^3}{24}(9\cos u + 12u\sin u - \cos 3u) + \frac{pk}{2}(u^2\sin u - 3u\cos u + 3\sin u) + \frac{pk^3}{32}(-4u^3\cos u + 11u^2\sin u - u\cos u - u^2\sin 3u - 3u\cos 3u + 4\sin u).$$

Je rappelle que k désigne le sinus de la moitié de l'angle d'écart initial; p, le nombre, supposé très petit, $\frac{b}{\sqrt{ga}}$, et u, la variable $\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$. Cette formule donne $\frac{d\theta}{dt} = 0$ pour $t = 0$: elle suppose donc que la vitesse angulaire est nulle à l'instant initial. Le terme $2k\cos u$ correspond aux oscillations infiniment petites du pendule ordinaire; le terme multiplié par $\frac{k^3}{24}$ représente la correction nécessaire pour tenir compte du fait que les oscillations sont finies. Les termes multipliés par $\frac{pk}{2}$ et par $\frac{pk^3}{32}$ font connaître l'influence perturbatrice de l'allongement.

Quand on néglige k^3, la formule (41) doit devenir équivalente à la formule (25). Il est aisé de vérifier en effet que, si l'on remplace dans cette dernière γt par u et ψ par $\frac{3p}{4} - \frac{\pi}{2}$, et si l'on continue à traiter p comme un infiniment petit, il vient:

$$\theta = \rho\cos u + \frac{p\rho}{4}(u^2\sin u - 3u\cos u + 3\sin u).$$

L'identité a donc lieu en prenant $\rho = 2k$.

Comme application de la formule (41), cherchons quelle est la durée d'une demi-oscillation, depuis l'élongation correspondant à l'origine du temps jusqu'au passage suivant par la verticale. Si l'on fait $u = \frac{\pi}{2}$, on trouve aisément:

$$\theta_{\frac{\pi}{2}} = k^3\frac{\pi}{4} + \frac{pk}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} + 3\right) + \frac{pk^3}{32}(3\pi^2 + 4)$$

et:

$$\frac{d\theta}{dt_{\frac{\pi}{2}}} = r\frac{d\theta}{du_{\frac{\pi}{2}}} = r\left[-2k + \frac{5kp\pi}{4} + \frac{pk^3}{32}\left(\frac{\pi^2}{4} + 8\pi\right)\right].$$

La valeur $u = \frac{\pi}{2}$ correspond à l'instant $t = \frac{\pi}{2r}$, ou $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$. A cet instant, le pendule, pour atteindre la verticale, a encore à parcourir l'arc $\theta_{\frac{\pi}{2}}$ avec la vitesse négative $\frac{d\theta}{dt_{\frac{\pi}{2}}}$. La durée de la demi-oscillation est donc égale à:

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} - \left(\frac{\theta}{\frac{d\theta}{dt}}\right)_{\frac{\pi}{2}}.$$

En faisant le calcul, dans les conditions d'approximation déjà convenues, on trouve:

$$(42) \qquad T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right) + \frac{b}{4g}\left(\frac{\pi^2}{4} + 3\right) + \frac{bk^2}{16g}(2\pi^2 + 1).$$

En remplaçant k, c'est-à-dire $\sin\frac{\theta_0}{2}$, par l'arc $\frac{\theta_0}{2}$, ce qui est évidemment permis puisque k n'intervient ici que par son carré, on peut encore écrire:

$$(42') \qquad T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) + \frac{b}{4g}\left(\frac{\pi^2}{4} + 3\right) + \frac{b\theta_0^2}{64g}(2\pi^2 + 1).$$

Précédemment, en négligeant p^2, nous avons trouvé le temps:

$$T' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{\pi^2 - 12}{16}\frac{b}{g},$$

l désignant la longueur à l'instant du passage par la verticale, pris pour instant initial. Ici, nous trouvons en négligeant également p^2:

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi^2 + 12}{16}\frac{b}{g}.$$

Si l'on veut établir la concordance de ces deux résultats, il faut se placer dans des conditions identiques, c'est-à-dire considérer la demi-oscillation pour laquelle la longueur du pendule est a à l'instant de l'élongation, et l à l'instant du passage par la verticale. Ceci oblige à renverser le sens de l'un des deux mouvements et à écrire, par exemple:

$$T' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} - \frac{\pi^2 - 12\,b}{16}\,\frac{b}{g}.$$

Puis il faut poser: $l = a + bT = a + \frac{\pi b}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$ d'où:

$$T' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}\left(1 + \frac{\pi b}{2\sqrt{ag}}\right)} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1 + \frac{\pi b}{4\sqrt{ag}}\right) - \frac{\pi^2 - 12\,b}{16}\,\frac{b}{g},$$

$$T' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi^2 + 12\,b}{16}\,\frac{b}{g}.$$

On a donc bien l'égalité $T = T'$.

IV.

Pendule conique.

Les équations, en coordonnées rectangulaires, du mouvement d'un pendule conique sont, en continuant à désigner par T la tension et par l la longueur:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + T\frac{x}{l} \qquad = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + T\frac{y}{l} \qquad = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + T\frac{z}{l} - g = 0.$$

Si l'on pose: $x^2 + y^2 = r^2$, d'où $r^2 + z^2 = l^2$, on a:

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}.$$

D'autre part, le théorème des aires donne:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c,$$

c étant une constante. On tire de là:

$$(x^2 + y^2)\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = c^2 + r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

ou:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{r^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

On a aussi:

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r\frac{d^2r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

et par suite:

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} = r\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^2}.$$

Mais:

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + T\frac{r^2}{l} = 0.$$

On est ainsi conduit aux deux équations:

$$\frac{d^2r}{dt^2} + T\frac{r}{l} - \frac{c^2}{r^3} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + T\frac{z}{l} - g = 0$$

qui, par l'élimination de la tension, donnent:

$$r\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2r}{dt^2} - gr + \frac{c^2z}{r^3} = 0.$$

Soit maintenant θ l'écart du pendule par rapport à la verticale. On a évidemment:

$$r = l\sin\theta,$$

$$z = l\cos\theta,$$

$$z\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(l^2\frac{d\theta}{dt}\right),$$

et par suite:

$$\frac{d}{dt}\left(l^2\frac{d\theta}{dt}\right) + gl\sin\theta - \frac{c^2\cos\theta}{l^2\sin^3\theta} = 0. \tag{43}$$

Pour définir complètement le mouvement, il faut encore exprimer, en fonction du temps, l'angle φ que forme avec un plan vertical fixe le plan vertical mobile qui contient à chaque instant la tige. Cette expression est fournie par le théorème des aires, qui donne:

$$l^2\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt} = c. \tag{44}$$

Si l'on suppose, comme précédemment: $l = a + bt$, l'équation (43) peut s'écrire:

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2b\frac{d\theta}{dt} + g\sin\theta - \frac{c^2\cos\theta}{l^3\sin^3\theta} = 0,$$

ou bien:

$$l\frac{d^2\theta}{dl^2} + 2\frac{d\theta}{dl} + \frac{g}{b^2}\sin\theta - \frac{c^2\cos\theta}{b^2l^3\sin^3\theta} = 0.$$

Nous nous bornerons au cas des oscillations assez petites pour qu'on puisse remplacer $\sin\theta$ par θ et $\cos\theta$ par l'unité (ceci revient à négliger θ^2, tandis que, dans le cas du mouvement plan, il suffisait de négliger θ^3). Remplaçons en outre θ par $\frac{u}{l}$ et $\frac{gl}{b^2}$ par x. Il vient ainsi:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{u}{x} - \frac{b^2c^2}{g^2}\frac{1}{u^3} = 0.$$

Soit enfin $u = v\sqrt{\frac{bc}{g}}$; nous obtenons l'équation très simple, au moins en apparence:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{v}{x} - \frac{1}{v^3} = 0. \tag{45}$$

Soit ω une solution quelconque de cette équation réduite à ses deux premiers termes, c'est-à-dire une solution de l'équation (9), et posons:

$$v = \lambda\omega$$

d'où:

$$\frac{dv}{dx} = \lambda \frac{d\omega}{dx} + \omega \frac{d\lambda}{dx},$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \lambda \frac{d^2\omega}{dx^2} + 2 \frac{d\lambda}{dx}\frac{d\omega}{dx} + \omega \frac{d^2\lambda}{dx^2}.$$

En substituant, nous avons:

$$2 \frac{d\lambda}{dx}\frac{d\omega}{dx} + \omega \frac{d^2\lambda}{dx^2} = \frac{1}{\lambda^3\omega^3}$$

ou:

$$2\omega^2 \frac{d\lambda}{dx}\frac{d}{dx}\left(\omega^2\frac{d\lambda}{dx}\right) = \frac{2}{\lambda^3}\frac{d\lambda}{dx}.$$

L'intégration est immédiate et donne, en appelant A une constante:

$$\left(\omega^2\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} = A$$

d'où

$$\frac{\lambda\frac{d\lambda}{dx}}{\sqrt{A\lambda^2 - 1}} = \frac{1}{\omega^2}.$$

Soit B une autre constante; une seconde intégration donne:

$$\lambda^2 = \frac{1}{A} + A\left(\int\frac{dx}{\omega^2} + B\right)^2.$$

Donc enfin:

$$v = \sqrt{\frac{\omega^2}{A} + A\omega^2\left(\int\frac{dx}{\omega^2} + B\right)^2}.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation (45). Pour interpréter ce résultat, remarquons que les deux fonctions:

$$\omega_1 = \frac{\omega}{\sqrt{A}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{A}\,\omega\left(\int\frac{dx}{\omega^2} + B\right)$$

sont deux intégrales particulières de l'équation (9), intégrales liées par l'unique condition:

$$\omega_1 \frac{d\omega_2}{dx} - \omega_2 \frac{d\omega_1}{dx} = 1. \tag{46}$$

Si donc ω_1, ω_2 sont deux fonctions vérifiant à la fois les équations (9) et (46), on peut écrire:

$$v = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Revenons maintenant aux notations primitives, qui donnent:

$$\theta = \frac{v}{l}\sqrt{\frac{bc}{g}}$$

et soit de même:

$$\theta_1 = \frac{\omega_1}{l}\sqrt{\frac{bc}{g}}, \qquad \theta_2 = \frac{\omega_2}{l}\sqrt{\frac{bc}{g}}.$$

Nous trouvons:

$$\theta = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2} \tag{47}$$

avec les conditions:

$$\begin{cases} l\dfrac{d^2\theta_1}{dt^2} + 2b\dfrac{d\theta_1}{dt} + g\theta_1 = 0, \\[2ex] l\dfrac{d^2\theta_2}{dt^2} + 2b\dfrac{d\theta_2}{dt} + g\theta_2 = 0, \end{cases} \tag{48}$$

$$\theta_1 \frac{d\theta_2}{dt} - \theta_2 \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{c}{l^2}. \tag{49}$$

Les deux équations (48) montrent que θ_1 et θ_2 sont les angles d'inclinaison de deux pendules plans, de même longueur que le pendule conique. Les équations (47) et (49) prouvent d'ailleurs qu'on peut écrire:

$$\theta_1 = \theta\cos\varphi, \qquad \theta_2 = \theta\sin\varphi,$$

$$l^2\theta^2\frac{d\varphi}{dt} = c.$$

Cette dernière équation est identique, pour le degré d'approximation adopté, avec l'équation (44): la fonction φ a donc dans les deux cas la même signification, c'est-à-dire qu'elle représente l'angle compris entre un plan fixe et le plan vertical du pendule. Nous concluons de là que θ_1 et θ_2 sont les projections de l'angle θ sur deux plans fixes, verticaux et rectangulaires.

En résumé:

Le mouvement du pendule conique s'obtient en composant les mouvements de deux pendules qui oscillent dans deux plans fixes rectangulaires, suivant les lois précédemment établies.

Ce théorème aurait pu être énoncé immédiatement, en remarquant que traiter l'angle d'écart comme un infiniment petit, c'est confondre la longueur du pendule avec sa projection sur un plan vertical quelconque, d'où il suit que la projection varie uniformément, aussi bien que la longueur elle-même. Mais les calculs qui précèdent vont nous permettre de discuter complètement le problème, au moins dans le cas du pendule lentement variable.

A cet effet, représentons θ_1 et θ_2 au moyen de la formule (25), en attribuant à la phase ψ deux valeurs différentes, ψ_1 et ψ_2. Soient en outre ρ_1 et ρ_2 les deux valeurs de la constante ρ. Nous avons:

$$(50)\qquad \begin{aligned} \theta_1 &= \rho_1\left(1 - \frac{3}{4}p\gamma t\right)\sin(\gamma t - \psi_1) - \frac{\rho_1 p\gamma^2 t^2}{4}\cos(\gamma t - \psi_1),\\ \theta_2 &= \rho_2\left(1 - \frac{3}{4}p\gamma t\right)\sin(\gamma t - \psi_2) - \frac{\rho_2 p\gamma^2 t^2}{4}\cos(\gamma t - \psi_2).\end{aligned}$$

Si nous écrivons que l'équation (49) est vérifiée identiquement après qu'on a remplacé $\frac{1}{\rho^2}$ par $\frac{1}{(a+bt)^2}$, c'est-à-dire par $\frac{1}{a^2}(1 - 2p\gamma t)$, il vient, toutes réductions faites:

$$(51)\qquad \rho_1\rho_2\sin(\psi_1 - \psi_2) = \frac{c}{a^2\gamma} = \frac{c}{\sqrt{g}}a^{-\frac{3}{2}}.$$

Supposons que les deux plans fixes rectangulaires viennent à tourner d'un angle ω autour de leur arête. Les constantes ρ_1, ρ_2, ψ_1, ψ_2 prennent de nouvelles valeurs ρ_1', ρ_2', ψ_1', ψ_2', et un calcul élémentaire montre que l'on a:

$$2\rho_1'\rho_2'\cos(\psi_2' - \psi_1') = (\rho_2^2 - \rho_1^2)\sin 2\omega + 2\rho_1\rho_2\cos(\psi_2 - \psi_1)\cos 2\omega.$$

Si donc l'angle ω est choisi de manière à avoir $\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1^2-\rho_2^2}\cos(\psi_2-\psi_1)$, la nouvelle différence de phase est égale à $\frac{\pi}{2}$. D'ailleurs, en choisissant convenablement l'origine du temps, on peut faire en sorte que ψ_2' soit nul, et par conséquent ψ_1' égal à $-\frac{\pi}{2}$. Effaçons en outre les accents, devenus inutiles, de ρ_1' et ρ_2', et, pour abréger, remplaçons γt par u. Dans ces conditions les équations (50) et (51) sont remplacées par les suivantes:

$$(52)\qquad \begin{aligned} \frac{\theta_1}{\rho_1} &= \cos u - \frac{pu}{4}(3\cos u + u\cos u), \\ \frac{\theta_2}{\rho_2} &= \sin u - \frac{pu}{4}(3\sin u + u\sin u), \end{aligned}$$

$$\rho_1\rho_2 = \frac{c}{\sqrt{g}}a^{-\frac{3}{2}}.$$

La dernière détermine la constante des aires en fonction de ρ_1 et ρ_2. Les deux autres font connaître, en fonction du temps, les angles θ_1 et θ_2 ainsi que l'angle φ compris entre le plan fixe des θ_1 et le plan vertical du pendule; car on a, d'après ce qui précède:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

On peut aussi trouver la courbe tracée par la tige du pendule sur un plan horizontal fixe, mené, par exemple, à la distance 1 du point de suspension. Si les traces des deux plans verticaux sur ce plan horizontal sont prises pour axes des x et des y, les coordonnées de la trace du pendule sont:

$$x = \theta_1, \qquad y = \theta_2$$

et les équations (52) donnent immédiatement, en négligeant p^2:

$$\left(\frac{x}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho_2}\right)^2 - 1 = -\frac{3p}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{y}{x}\right).$$

C'est une courbe transcendante, peu différente d'une ellipse. On peut encore dire que la tige rencontre constamment, sur le plan horizontal, une ellipse qui varie lentement, en restant concentrique et homothétique à elle-même. Les deux axes ont pour valeurs:

$$\rho_1\left[1 - \frac{3p}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{y}{x}\right] \quad \text{et} \quad \rho_2\left[1 - \frac{3p}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{y}{x}\right].$$

Au bout d'un demi-tour, le rapport d'homothétie est $1 - \frac{3p\pi}{4}$, ce qui concorde avec le résultat trouvé en parlant de l'amplitude des oscillations planes.

Ces conclusions seraient évidemment modifiées si l'on cessait de regarder les oscillations comme infiniment petites. Il est présumable, d'après ce qu'on sait du pendule conique ordinaire, que l'on trouverait alors une ellipse lentement variable, toujours semblable à elle-même, mais tournant autour de son centre. Reculant devant la longueur des calculs, je n'ai pas essayé de vérifier cette supposition.