SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE, ET SUR LA THÉORIE DES INTÉGRALES INTERMÉDIAIRES

PAR

E. GOURSAT.

Le but final de ce travail est de faire connaître une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre dont on peut obtenir l'intégrale générale par l'application d'un procédé régulier, qui n'exige que l'intégration d'un système complet. Pour bien faire saisir la suite des idées, je suis obligé d'entrer d'abord dans quelques détails sur la théorie des caractéristiques et des intégrales intermédiaires.

Les principaux résultats de ce Mémoire ont été résumés dans une note présentée à l'Académie des Sciencesl e 19 mai 1891 (*Comptes rendus*, tome 112, p. 1117).

I.

1. Je vais d'abord rappeler les points principaux de la théorie des équations du premier ordre, en me plaçant au même point de vue que pour celles du second ordre. Etant donnée une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

proposons-nous de déterminer une surface intégrale passant par une courbe donnée C, représentée par les équations

$$(2) \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

où $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont des fonctions analytiques régulières du paramètre t dans le voisinage de la valeur t_0 qui correspond à un point (x_0, y_0, z_0) de cette courbe C. S'il existe une surface intégrale de l'équation (1)

$$(3) \qquad z = \Phi(x, y),$$

passant par la courbe C, $\Phi(x, y)$ étant une fonction analytique régulière dans le voisinage de la valeur $x = x_0$, $y = y_0$, les coefficients du développement de $\Phi(x, y)$ ou, ce qui revient au même, les valeurs des dérivées successives

$$\left(\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

pourront se calculer comme il suit. Désignons par dx, dy, dz les différentielles relatives à un déplacement le long de la courbe C; le long de cette courbe, les valeurs des dérivées partielles du premier ordre p et q doivent vérifier les deux relations

$$(4) \qquad \begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0, \\ dz = p\,dx + q\,dy, \end{cases}$$

qui admettent, en général, un certain nombre de systèmes de solutions communes en p et q. Prenons un de ces systèmes de solutions; il détermine une développable Δ, passant par la courbe C, à laquelle la surface cherchée, si elle existe, doit être tangente. Pour calculer les dérivées secondes r, s, t, nous avons d'une part les deux équations obtenues en différentiant l'équation (1) par rapport à x et à y successivement

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z} p + \dfrac{\partial F}{\partial p} r + \dfrac{\partial F}{\partial q} s = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z} q + \dfrac{\partial F}{\partial p} s + \dfrac{\partial F}{\partial q} t = 0, \end{cases}$$

d'autre part la relation

$$(6)\qquad d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

où d^2x, d^2y, d^2z désignent $f''(t)dt^2$, $\varphi''(t)dt^2$, $\psi''(t)dt^2$. On a donc trois équations linéaires en r, s, t, dont le déterminant est, en posant

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad P = \frac{\partial F}{\partial p}, \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial q}, \qquad Z = \frac{\partial F}{\partial z},$$

$$D = \begin{vmatrix} dx^2 & 2\,dx\,dy & dy^2 \\ P & Q & 0 \\ 0 & P & Q \end{vmatrix} = (Q\,dx - P\,dy)^2.$$

Supposons que, pour le système de solutions adopté des équations (4), $Q\,dx - P\,dy$ ne soit pas nul. Les équations (5) et (6) donnent alors r, s, t. En différentiant de nouveau les équations (5), on aurait les dérivées du troisième ordre, et ainsi de suite. En général, les $(n+1)$ dérivées d'ordre n sont déterminées par $(n+1)$ équations linéaires dont le déterminant est

$$D = \begin{vmatrix} dx^n & n\,dx^{n-1}dy & \frac{n(n-1)}{2}dx^{n-2}dy^2 & \dots & dy^n \\ P & Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P & Q & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Q \end{vmatrix}.$$

Pour trouver la valeur de ce déterminant, multiplions la 1ère colonne par Q^n, la seconde par $-Q^{n-1}P$, la 3ème par $Q^{n-2}P^2$, etc. et remplaçons la première colonne par la somme de toutes les colonnes; il vient $D = (Q\,dx - P\,dy)^n$. Si donc $Q\,dx - P\,dy$ n'est pas nul, les valeurs de toutes les dérivées successives de z par rapport à x et à y pour $x = x_0$, $y = y_0$ sont déterminées sans ambiguïté de proche en proche. Il ne peut donc y avoir qu'une seule intégrale analytique tangente à la développable Δ le long de la courbe C.

2. Que la série ainsi obtenue soit convergente, c'est une conséquence du théorème général de Cauchy. En effet, supposons que, pour $t = t_0$, $f'(t_0)$ ne soit pas nul; on peut alors résoudre l'équation $x = f(t)$ par rapport à t, et la courbe C est aussi représentée par l'ensemble des deux équations

$$y = f_1(x), \qquad z = \varphi_1(x),$$

f_1 et φ_1 étant des fonctions régulières pour $x = x_0$. Le changement de variables

$$x = X, \qquad y = f_1(X) + Y, \qquad z = \varphi_1(X) + Z$$

donne ensuite

$$q = Q, \qquad p = P - Qf_1'(X) + \varphi_1'(X),$$

et on est ramené à chercher une intégrale de la nouvelle équation

$$\mathfrak{F} = F\big(X\,,\; Y + f_1(X)\,,\; Z + \varphi_1(X)\,,\; P - Qf_1'(X) + \varphi_1'(X)\,,\; Q\big) = 0$$

qui, pour $Y = 0$, se réduise à $Z = 0$. Si la dérivée $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial Q}$ n'est pas nulle, l'équation précédente peut être résolue par rapport à Q, et on sait, d'après les théorèmes généraux de Cauchy, qu'il existe une intégrale $Z = \pi(X, Y)$ répondant à la question et développable dans le voisinage de $X = 0$, $Y = 0$. Or on a

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial Q} = -\frac{\partial F}{\partial p} f_1'(X) + \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial p};$$

si $Qdx - Pdy$ n'est pas nul, comme on l'a supposé, on aura donc aussi $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial Q} \neq 0$.

3. Si les équations (4) admettent un système de solutions pour lequel on ait en même temps $Qdx - Pdy = 0$, le raisonnement ne s'applique plus; les équations qui déterminent les dérivées successives sont incompatibles ou indéterminées. Si entre les trois équations

$$(1) \qquad F(x\,, y\,, z\,, p\,, q) = 0,$$

$$(4) \qquad dz = pdx + qdy,$$

$$(7) \qquad Qdx - Pdy = 0,$$

on élimine p et q,

on est conduit à une relation

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0, \tag{8}$$

qui définit des courbes gauches dépendant d'une fonction arbitraire.

S'il existe une courbe satisfaisant aux trois équations (1), (4), (7), sur une surface intégrale représentée par une équation

$$z = \Phi(x, y),$$

où Φ est une fonction développable en série entière, on peut joindre aux trois relations (1), (4), (7) deux nouvelles relations. On a, en effet,

$$X + pZ + Pr + Qs = 0,$$
$$Y + qZ + Ps + Qt = 0,$$

$dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$; on en déduit, en tenant compte de (7),

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}. \tag{9}$$

Les valeurs de x, y, z, p, q déduites des équations (1) et (4) doivent donc satisfaire aux équations (9). Tout ceci est bien conforme aux résultats connus. Les équations (9) définissent les multiplicités caractéristiques de l'équation (1), chaque multiplicité se composant d'une courbe C et d'une développable Δ passant par cette courbe. On sait qu'il existe une infinité de surfaces intégrales tangentes à la développable Δ le long de la courbe C.

L'équation (8) définit les courbes gauches qui ont les mêmes tangentes que les courbes caractéristiques, c'est-à-dire les courbes intégrales. Or, on sait que, par toute courbe intégrale, il passe une surface intégrale admettant cette courbe pour ligne singulière.

Avant de quitter les équations du premier ordre, faisons la remarque suivante. Etant donnée une courbe C, il peut arriver qu'il passe par cette courbe C une infinité de surfaces intégrales formant un *système continu*. Nous entendons par là que ces surfaces sont représentées par une équation

$$\Phi(x, y, z, a_1, a_2, \ldots, a_q) = 0$$

dépendant d'un certain nombre de paramètres qui peuvent varier d'une manière continue. C'est ce qui aura lieu si la courbe C est une caractéristique. Mais il peut se présenter deux cas. Si l'équation (1) n'est pas linéaire en p et q, toutes les surfaces d'un système continu passant par C sont tangentes le long de C. Il n'en est plus de même en général si l'équation est linéaire. Une distinction analogue, mais plus importante, a lieu pour les équations du second ordre.

4. Prenons maintenant une équation du second ordre

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{10}$$

et proposons-nous de déterminer une surface intégrale passant par une courbe donnée C et tangente à une développable Δ le long de cette courbe. En un point de C, x, y, z, p, q sont des fonctions connues d'un paramètre auxiliaire θ. Les valeurs de r, s, t en un point de C doivent satisfaire à l'équation (10) et aux deux équations

$$\left\{ \begin{aligned} dp &= r\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + t\,dy. \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Ces trois équations admettent en général un certain nombre de systèmes de solutions communes en r, s, t; supposons que, pour le système choisi, le déterminant fonctionnel des trois premiers membres par rapport à r, s, t, c'est-à-dire

$$D = \begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ R & S & T \end{vmatrix} = T\,dx^2 - S\,dx\,dy + R\,dy^2,$$

où on a posé

$$R = \frac{\partial F}{\partial r}, \qquad S = \frac{\partial F}{\partial s}, \qquad T = \frac{\partial F}{\partial t}$$

ne soit pas nul. On peut alors déterminer sans difficulté les valeurs de toutes les dérivées successives de z par rapport à x et à y, en un point quelconque de la courbe C. Ainsi, les dérivées partielles d'ordre n seront déterminées par $(n + 1)$ équations linéaires dont le déterminant est

$$D_1 = \begin{vmatrix} dx^n & ndx^{n-1}dy & \frac{n(n-1)}{2}dx^{n-2}dy^2 & & \cdots & dy^n & 0 \\ 0 & dx^n & ndx^{n-1}dy & & \cdots & ndxdy^{n-1} & dy^n \\ R & S & T & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & R & S & T & \cdots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & S & T \end{vmatrix}.$$

On vérifie que l'on a $D_1 = (Tdx^2 - Sdxdy + Rdy^2)^n$; il suffit évidemment de montrer que D_1 est divisible par $(dx + \alpha dy)^n$, α désignant une racine de l'équation $T\alpha^2 + S\alpha + R = 0$. C'est ce qu'on voit en multipliant les éléments de la $2^{\text{ème}}$ colonne par α, ceux de la $3^{\text{ème}}$ par α^2, etc. et ajoutant ensuite aux éléments de la première colonne.

On voit donc que, si $Tdx^2 - Sdxdy + Rdy^2$ n'est pas nul, il y aura une seule intégrale, développable en série entière, passant par la courbe C et tangente à la développable Δ. Pour démontrer que la série dont nous venons d'apprendre à calculer les coefficients est convergente, on effectue la même transformation qu'au n° 2, et on est ramené au théorème classique de Cauchy.

5. Lorsque $Tdx^2 - Sdxdy + Rdy^2 = 0$, les équations qui déterminent les valeurs des dérivées successives peuvent être incompatibles ou indéterminées. Lorsque ce cas se présente, tout le long de la courbe C, x, y, z, p, q, r, s, t vérifient les cinq équations

$$(12) \qquad \begin{cases} F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \\ dz = pdx + qdy, \\ dp = rdx + sdy, \\ dq = sdx + tdy, \\ Tdx^2 - Sdxdy + Rdy^2 = 0, \end{cases}$$

qui contiennent huit fonctions inconnues d'une variable auxiliaire. S'il existe une surface intégrale passant par la courbe C,

$$z = \Phi(x, y),$$

$\Phi(x, y)$ étant une fonction développable en série entière dans le voisinage d'un point de C, et telle que, pour cette intégrale, les valeurs de p, q, r, s, t vérifient les équations (12) le long de C, on peut ajouter aux équations (12) de nouvelles relations. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les dérivées du troisième ordre

$$\alpha = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \beta = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \qquad \gamma = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \qquad \delta = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3},$$

qui, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, auront des valeurs finies. On a

$$dr = \alpha dx + \beta dy,$$

$$ds = \beta dx + \gamma dy,$$

$$dt = \gamma dx + \delta dy;$$

on en tire

$$\gamma = \frac{dt}{dx} - \delta \frac{dy}{dx},$$

$$\beta = \frac{ds}{dx} - \gamma \frac{dy}{dx} = \frac{ds}{dx} - \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dx} + \delta \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

$$\alpha = \frac{dr}{dx} - \beta \frac{dy}{dx} = \frac{dr}{dx} - \frac{ds}{dx}\frac{dy}{dx} + \frac{dt}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \delta \left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

Portons ces valeurs de α, β, γ dans les relations

$$X + Zp + Pr + Qs + R\alpha + S\beta + T\gamma = 0,$$

$$Y + Zq + Ps + Qt + R\beta + S\gamma + T\delta = 0;$$

il vient, pour la première par exemple,

$$X + Zp + Pr + Qs + R\frac{dr}{dx} + S\frac{ds}{dx} + T\frac{dt}{dx} - R\frac{ds}{dx}\frac{dy}{dx} - S\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dx}$$

$$+ R\frac{dt}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \delta \frac{dy}{dx}\left| R\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - S\frac{dy}{dx} + T \right| = 0,$$

et, en tenant compte de la dernière des relations (12), il reste

$$X + Zp + Pr + Qs + R\frac{dr}{dx} + \left(S - R\frac{dy}{dx}\right)\frac{ds}{dx} = 0.$$

Remplaçons $Sdx - Rdy$ par $T\frac{dx^2}{dy}$; la nouvelle équation peut s'écrire

$$(X + Zp + Pr + Qs)dxdy + Rdydr + Tdsdx = 0,$$

et on trouve de même

$$(Y + Zq + Ps + Qt)dxdy + Rdyds + Tdtdx = 0.$$

Il reste donc 7 équations entre les variables x, y, z, p, q, r, s, t

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,\\ &dz = pdx + qdy,\\ &dp = rdx + sdy,\\ &dq = sdx + tdy,\\ &Tdx^2 - Sdxdy + Rdy^2 = 0,\\ &(X + Zp + Pr + Qs)dxdy + Rdydr + Tdsdx = 0,\\ &(Y + Zq + Ps + Qt)dxdy + Rdyds + Tdtdx = 0.\end{aligned}\right.$$

Les 6 dernières équations admettent toujours, il est aisé de s'en assurer, la combinaison intégrable $dF = 0$. On peut donc négliger la relation $F = 0$, et on a 6 équations différentielles pour définir sept des variables x, y, z, p, q, r, s, t en fonction de la dernière; une des fonctions inconnues peut être choisie arbitrairement. L'ensemble d'un système de fonctions x, y, z, p, q, r, s, t d'une seule variable vérifiant les équations (13) s'appelle une *caractéristique* de l'équation (1); ces caractéristiques dépendent d'une fonction arbitraire.

6. Toute surface intégrale de l'équation (10) est un lieu de caractéristiques. Soit en effet

$$z = \Phi(x, y)$$

l'équation d'une surface intégrale; pour un point quelconque de cette surface z, p, q, r, s, t et, par suite R, S, T sont des fonctions déterminées des deux variables indépendantes x et y. L'équation différentielle du premier ordre et du second degré

$$Tdx^2 - Sdxdy + Rdy^2 = 0$$

définit donc deux familles de courbes sur cette surface; par chaque point de la surface il passe une courbe et une seule, en général, de chacune de ces deux familles. Soit C une de ces courbes; le long de C, x, y z, p, q, r, s, t sont des fonctions d'une seule variable, x par exemple, et il résulte du calcul qui vient d'être fait que ces fonctions satisfont aux équations (13). Toute surface intégrale admet ainsi un double mode de génération par des courbes caractéristiques.

Il peut arriver que les deux systèmes de caractéristiques d'une équation du second ordre soient confondus; il faut pour cela que l'on ait

$$S^2 - 4RT = 0, \tag{14}$$

soit identiquement, soit en tenant compte de l'équation (10). Cette condition s'interprète géométriquement comme il suit. Regardons x, y, z, p, q comme des paramètres, r, s, t comme les coordonnées cartésiennes d'un point; l'équation (10) représente alors une certaine surface Σ. Le plan mené par l'origine parallèlement à un plan tangent à cette surface a pour équation

$$Rr + Ss + Tt = 0,$$

et la relation (14) exprime précisément que ce plan coupe le cône (T) représenté par l'équation

$$s^2 - rt = 0$$

suivant deux génératrices confondues. Donc, *pour que les deux systèmes de caractéristiques soient confondus, il faut et il suffit que l'équation* (10), *où l'on regarde x, y, z, p, q comme des paramètres et r, s, t comme des coordonnées courantes, représente une surface développable, dont le plan tangent est constamment parallèle à un plan tangent au cône (T), qui a pour équation $s^2 - rt = 0$.*

7. Il resterait à examiner si à toute caractéristique, c'est-à-dire à tout système de solutions des équations (13), correspond une infinité de surfaces intégrales ayant un contact du second ordre tout le long de la courbe caractéristique. Je laisserai cette question de côté dans ce travail, pour m'occuper d'un problème tout différent. Etant donnée une équation du second ordre, cherchons s'il existe des courbes C jouissant de la propriété suivante: par la courbe C passent une infinité de surfaces

intégrales, formant un système continu, ayant un contact *du premier ordre* seulement le long de cette courbe. S'il en est ainsi, les valeurs de x, y, z, p, q seront les mêmes pour toutes ces surfaces le long de la courbe C; il faudra donc que les équations

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{10}$$

$$\left\{\begin{aligned} dp &= r\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + t\,dy, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

qui déterminent r, s, t, admettent une infinité de systèmes de solutions formant un système continu. Pour résoudre ces trois équations, on peut tirer les valeurs de r et de t des deux dernières, et les porter dans la première équation, d'où l'on tirera la valeur de s. En écrivant que cette équation se réduit à une identité, on est conduit à un certain nombre de relations entre $x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq$. Plusieurs cas peuvent se présenter: 1° il peut arriver que ces équations soient incompatibles (c'est le cas général); 2° il peut arriver que l'on trouve une ou plusieurs conditions ne renfermant que x, y, z, p, q; 3° il peut arriver que les équations de condition renferment toutes quelques-unes des différentielles dx, dy, dp, dq et, dans ce cas, il pourra y avoir deux ou trois relations distinctes, car elles sont forcément homogènes en dx, dy, dp, dq.

Géométriquement, les résultats s'interprètent comme il suit. Regardons encore $x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq$ comme des paramètres et r, s, t comme des coordonnées courantes. Les équations (11) représentent une droite parallèle à une génératrice du cône (T); pour que l'équation en s obtenue en remplaçant r et t par leurs valeurs dans (10) se réduise à une identité, il faut donc que la surface Σ admette des génératrices rectilignes parallèles aux génératrices du cône (T). Si la fonction $F(x, y, z, p, q, r, s, t)$ est arbitraire, il est clair que cela n'aura jamais lieu, quels que soient les valeurs des paramètres x, y, z, p, q. Cela peut aussi arriver si les paramètres x, y, z, p, q vérifient certaines conditions. Enfin il peut se faire que, quels que soient x, y, z, p, q, la surface Σ admette des génératrices parallèles à celles du cône (T). Ce cas se subdivise lui-même en deux autres, suivant que ces génératrices forment un système continu ou non. Dans le premier cas, il y a deux relations distinctes entre $x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq$ pour que la droite représentée par les équations (11) appartienne à la surface Σ, qui est alors une surface réglée admettant le cône (T) pour cône des directions asymptotiques. Si les génératrices rectilignes de Σ, parallèles aux génératrices de (T), ne forment pas un système continu, les paramètres $x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq$ doivent vérifier trois relations distinctes.

Plaçons-nous dans le cas où l'équation (10) représente, quels que soient x, y, z, p, q une surface réglée ayant le cône (T) pour cône des directions asymptotiques. Les équations d'une droite parallèle à une génératrice de (T) peuvent s'écrire

$$(15) \qquad \left| \begin{array}{l} r = ms + \mu, \\ s = mt + \nu; \end{array} \right.$$

soient

$$(16) \qquad G(x, y, z, p, q; m, \mu, \nu) = 0, \qquad G_1(x, y, z, p, q; m, \mu, \nu) = 0$$

les relations qui expriment que cette droite est une génératrice de la surface Σ. Pour identifier les équations (11) et (15), il suffit de poser

$$m = -\frac{dy}{dx}, \qquad \mu = \frac{dp}{dx}, \qquad \nu = \frac{dq}{dx};$$

remplaçons m, μ, ν par ces valeurs dans les formules (16), nous trouvons deux équations, homogènes en dx, dy, dp, dq,

$$(17) \qquad \left| \begin{array}{l} H(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0, \\ H_1(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0, \end{array} \right.$$

qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (10) et (11) admettent une infinité de solutions en r, s, t formant un système continu. Soient

$$x = f_1(\lambda), \qquad y = f_2(\lambda), \qquad z = f_3(\lambda), \qquad p = \varphi_1(\lambda), \qquad q = \varphi_2(\lambda),$$
$$r = \psi_1(\lambda), \qquad s = \psi_2(\lambda), \qquad t = \psi_3(\lambda)$$

un système de solutions des équations (10), (11), (17); ce système de fonctions forme une caractéristique. Il suffit de montrer que l'on a

$$Tdx^2 - Sdxdy + Rdy^2 = 0;$$

or, si l'on revient à la représentation géométrique employée plus haut, on voit que $dy^2, -dxdy, dx^2$ sont proportionnels aux coefficients angulaires de la génératrice (11), tandis que R, S, T sont les coefficients directeurs du plan tangent à Σ, et la relation qu'il s'agit de vérifier exprime simplement que la génératrice est située dans le plan tangent.

Si on a choisi pour x, y, z, p, q des fonctions d'une seule variable vérifiant les équations (17) et la relation

$$dz = pdx + qdy,$$

on peut encore choisir arbitrairement une des trois dérivées r, s, t, de sorte que l'indétermination se manifeste dès le second ordre. Ainsi, tandis que, pour l'équation générale du second ordre, deux surfaces intégrales tangentes le long d'une caractéristique ont un contact du second ordre au moins le long de cette caractéristique, pour la classe spéciale d'équations qui vient d'être définie, deux surfaces intégrales peuvent n'avoir qu'un contact du premier ordre le long d'une caractéristique. Cette distinction est analogue à celle qui a été faite pour les équations du premier ordre, mais plus essentielle, car elle se conserve par toute transformation de contact.

Pour abréger, nous désignerons ces deux espèces de caractéristiques sous les noms de caractéristiques *du premier ordre* ou du *second ordre* respectivement.

8. Ceci nous conduit à une classification des équations aux dérivées partielles du second ordre, basée sur la distinction des deux espèces de caractéristiques:

1° les équations générales qui admettent deux systèmes différents de caractéristiques, tous les deux du second ordre;

2° les équations qui, quand on y regarde x, y, z, p, q comme des paramètres, r, s, t comme les coordonnées courantes, représentent une surface réglée, *non développable,* admettant le cône (T) pour cône des directions asymptotiques. Elles admettent encore deux systèmes différents de caractéristiques, un du premier ordre, un du second ordre;

3° les équations qui, avec les mêmes conventions, représentent une surface développable, dont le plan tangent reste constamment parallèle à un plan tangent au cône (T). Les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, et ce système unique est du premier ordre;

4° les équations linéaires en $r, s, t, rt-s^2$,

$$A(rt-s^2)+Br+Cs+Dt+E=0;$$

les surfaces Σ admettent ici deux systèmes de génératrices, en général distincts, parallèles aux génératrices de (T). Il y a donc deux systèmes de caractéristiques, tous les deux du premier ordre.

On voit le rôle particulier que jouent les équations d'Ampère dans la théorie générale. Il paraît naturel d'étudier, après celles-là, les équations de la seconde et de la troisième catégorie.

II.

9. Dans ce qui va suivre, il sera question, presque exclusivement, des équations qui admettent au moins un système de caractéristiques du premier ordre. Rappelons d'abord quelques définitions empruntées à la théorie des transformations de contact de M. Sophus Lie. Un *élément* (x, y, z, p, q) se compose d'un point (x, y, z) et d'un plan de coefficients angulaires p, q

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y),$$

passant par ce point. Deux éléments infiniment voisins (x, y, z, p, q) et $(x+dx, y+dy, z+dz, p+dp, q+dq)$ sont *unis* lorsque le point du second élément est situé dans le plan du premier, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$dz=p\,dx+q\,dy.$$

Une multiplicité M est une multiplicité d'éléments telle que deux éléments infiniment voisins sont toujours unis. Ces multiplicités peuvent être à une ou à deux dimensions. Une multiplicité M_1 se compose en général d'une courbe C et des plans tangents à une certaine développable Δ passant par C; nous dirons quelquefois, pour abréger, que la courbe

C sert de *support* à la multiplicité M_1. Comme cas particulier, il peut arriver qu'une multiplicité M_1 se compose d'un point et de l'ensemble des plans tangents à un certain cône ayant son sommet en ce point. Une multiplicité M_2 se compose, soit d'une surface et de l'ensemble de ses plans tangents, soit d'une courbe et de l'ensemble des plans qui passent par une tangente quelconque à cette courbe, soit d'un point et de l'ensemble des plans qui passent par ce point. Il est clair que toute multiplicité M_2 peut être considérée comme un lieu de multiplicités M_1, dépendant d'un paramètre. Mais la réciproque n'est pas vraie. Considérons une famille de multiplicités M_1 dépendant d'un paramètre λ. Lorsque λ varie, la courbe C qui sert de support à la multiplicité M_1 engendre une surface S, et la multiplicité M_2 composée de la surface S et de l'ensemble de ses plans tangents n'est pas, en général, le lieu des multiplicités M_1. Il faut en outre que la développable Δ qui constitue avec la courbe C la multiplicité variable M_1 soit tangente à la surface S tout le long de C. Désignons par δ les différentielles x, y, z, p, q prises par rapport au paramètre variable λ; il faudra que l'on ait aussi

$$\delta z = p\delta x + q\delta y.$$

10. Soit

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{18}$$

une équation du second ordre qui représente une surface réglée Σ, ayant ses génératrices parallèles à celles du cône (T), quand on y regarde x, y, z, p, q comme des paramètres et r, s, t comme des coordonnées courantes. Cette équation provient de l'élimination de m, μ, ν entre les quatre équations

$$\tag{19} \left\{ \begin{aligned} r &= ms + \mu, \\ s &= mt + \nu, \\ G(x, y, z, p, q; m, \mu, \nu) &= 0, \\ G_1(x, y, z, p, q; m, \mu, \nu) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons m, μ, ν par $-\frac{dy}{dx}, \frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}$ respectivement; nous appellerons *multiplicité caractéristique* de l'équation (18) toute multiplicité M_1 dont les éléments vérifient les relations

$$(20) \qquad \begin{cases} dz = p dx + q dy, \\ G\left(x, y, z, p, q; -\frac{dy}{dx}, \frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}\right) = 0, \\ G_1\left(x, y, z, p, q; -\frac{dy}{dx}, \frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}\right) = 0. \end{cases}$$

D'après ce qu'on a vu plus haut (n° 7), s'il existe une infinité de surfaces intégrales, formant un système continu, tangentes à une développable $\varDelta$ le long d'une courbe C et ayant seulement un contact du premier ordre deux à deux, la courbe C et la développable $\varDelta$ forment une multiplicité caractéristique.

L'équation (18) provient de l'élimination de m entre les deux équations

$$(21) \qquad \begin{cases} G(x, y, z, p, q; m, r - ms, s - mt) = 0, \\ G_1(x, y, z, p, q; m, r - ms, s - mt) = 0, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, de $\frac{dy}{dx}$ entre les deux équations

$$(22) \qquad \begin{cases} G\left(x, y, z, p, q; -\frac{dy}{dx}, r + s\frac{dy}{dx}, s + t\frac{dy}{dx}\right) = 0, \\ G_1\left(x, y, z, p, q; -\frac{dy}{dx}, r + s\frac{dy}{dx}, s + t\frac{dy}{dx}\right) = 0; \end{cases}$$

toute surface intégrale est donc un lieu de multiplicités M_1, car, pour une telle surface, z, p, q, r, s, t sont des fonctions déterminées de x et de y, et les deux équations (22) admettent une solution commune en $\frac{dy}{dx}$,

$$(23) \qquad \frac{dy}{dx} = \pi(x, y).$$

Par chaque point de la surface intégrale S, il passe une courbe C satisfaisant à l'équation (23). Quand on se déplace sur cette courbe, y, z, p, q, r, s, t sont des fonctions de x vérifiant les équations (22) et, par suite, les équations (20). Inversement, toute multiplicité M_2, formée d'une surface et de ses plans tangents, qui est un lieu de multiplicités caractéristiques M_1, définit une surface intégrale.

Pour plus de symétrie, écrivons les équations (20)

$$(24)\qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ H(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0, \\ H_1(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0, \end{cases}$$

H et H_1 étant des fonctions homogènes de dx, dy, dp, dq. Le problème de l'intégration de l'équation du second ordre (18) peut alors être posé ainsi: *Trouver toutes les multiplicités M_2, composées de multiplicités caractéristiques M_1, satisfaisant aux équations* (24).

11. Cette façon d'énoncer le problème permet de tenir compte de certaines intégrales exceptionnelles, qui ne forment pas de surfaces. Considérons, par exemple, l'équation

$$(25)\qquad s + f(x, y, z, p, q) = 0;$$

on a, pour un des systèmes de caractéristiques,

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dx = 0, \qquad dp + f(x, y, z, p, q)dy = 0,$$

équations qui sont satisfaites en prenant

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0, \qquad p = p_0,$$

x_0, y_0, z_0, p_0 étant des constantes quelconques. On a donc une famille de multiplicités caractéristiques M_1 en prenant un point arbitraire (x_0, y_0, z_0) et l'ensemble des plans passant par une droite issue de ce point parallèle au plan des xz. Toute multiplicité M_2 formée d'une courbe plane située dans un plan parallèle au plan des xz et de ses plans tangents est évidemment formée de multiplicités M_1; c'est donc une intégrale de l'équation (25). De pareilles intégrales ne sont point à négliger, car il suffit d'une transformation de contact pour les ramener à des intégrales ordinaires. Ainsi, dans le cas actuel, la transformation de Legendre

$$X = p, \qquad Y = q, \qquad x = P, \qquad y = Q, \qquad Z = px + qy - z$$

appliquée à l'équation (25) conduit à la nouvelle équation

$$(26) \qquad S + (S^2 - RT)f(P, Q, PX + QY - Z, X, Y) = 0,$$

P, Q, R, S, T désignant les dérivées partielles du premier et du second ordre de Z par rapport à X et à Y. Les intégrales M_2 de l'équation (25), trouvées plus haut, vérifient l'équation $y = C$; après la transformation de LEGENDRE elles se changent en des intégrales de l'équation $Q = C$. On vérifie en effet que toutes les intégrales de l'équation $Q = C$ appartiennent bien à l'équation (26). Or l'équation $Q = C$ admet pour intégrales de véritables surfaces.

12. Regardons, dans les équations (24) x, y, z, p, q comme des paramètres et dx, dy, dp, dq comme les coordonnées homogènes d'un point. Les relations $H = 0$, $H_1 = 0$, représentent une courbe gauche Γ. Quand on effectue sur l'équation proposée une transformation de contact

$$x = X(x', y', z', p', q'),$$
$$y = Y(x', y', z', p', q'),$$
$$z = Z(x', y', z', p', q'),$$
$$p = P(x', y', z', p', q'),$$
$$q = Q(x', y', z', p', q'),$$

on a pour dx, dy, dp, dq des expressions linéaires en dx', dy', dp', dq',

$$dx = \frac{\partial X}{\partial x'} dx' + \frac{\partial X}{\partial y'} dy' + \frac{\partial X}{\partial z'} (p'dx' + q'dy') + \frac{\partial X}{\partial p'} dp' + \frac{\partial X}{\partial q'} dq',$$

. . . .

et la courbe Γ', correspondante à la nouvelle équation, se déduit de la courbe Γ par une transformation homographique.

Lorsque la courbe Γ est une ligne droite, les équations (24) sont linéaires en dx, dy, dp, dq et l'équation correspondante est linéaire en $r, s, t, rt - s^2$. Supposons, par exemple, que des équations (24) on ne puisse déduire aucune combinaison linéaire, ne renfermant ni dp, ni dq; les équations (24) peuvent alors être résolues par rapport à dp et dq,

$$(27)\qquad \begin{cases} dp + A dx + B dy = 0, \\ dq + C dx + D dy = 0. \end{cases}$$

En remplaçant dp et dq par $r dx + s dy$, $s dx + t dy$ et éliminant $\frac{dy}{dx}$, on est conduit à l'équation

$$(r + A)(t + D) - (s + B)(s + C) = 0,$$

ou

$$(28)\qquad rt - s^2 + At + Dr - (B + C)s + AD - BC = 0.$$

Inversement, toute équation linéaire en $rt - s^2$, r, s, t peut se mettre sous la forme (28), pourvu que le coefficient de $rt - s^2$ ne soit pas nul. Cette équation étant symétrique en B et C, le second système de caractéristiques s'obtient en permutant B et C dans les équations (27). Conformément à la théorie générale, ces deux systèmes de caractéristiques sont confondus si $B = C$, c'est-à-dire si l'équation (28) représente un cône ayant ses génératrices parallèles au cône (T).

Lorsque les équations (24), linéaires en dx, dy, dp, dq, ne peuvent être résolues par rapport à dp et dq, l'équation (28) correspondante est linéaire en r, s, t et ne contient pas $rt - s^2$. Inversement, à toute équation

$$Er + 2Fs + Gt + H = 0$$

correspondent deux systèmes de caractéristiques que l'on déduit des deux relations

$$\begin{cases} E dp dy + G dq dx + H dx dy = 0, \\ E dy^2 - 2F dx dy + G dx^2 \quad = 0. \end{cases}$$

Si les équations des caractéristiques sont linéaires en dx, dy, dp, dq, elles restent linéaires après une transformation de contact quelconque. D'où l'on conclut cette propriété remarquable et bien connue, que les équations du second ordre linéaires en r, s, t, $rt - s^2$ restent linéaires après une transformation de contact.

13. Les considérations qui précèdent permettent de retrouver d'une façon presque intuitive un certain nombre de résultats connus. Considérons une famille de surfaces S dépendant de 3 paramétres a, b, c,

$$\Phi(x, y, z, a, b, c) = 0;$$

si on établit entre ces trois paramètres deux relations de forme arbitraire $b = f(a)$, $c = \varphi(a)$, la famille de surfaces à un paramètre

$$\Phi(x\,,y\,,z\,,a\,,f(a)\,,\varphi(a)) = 0$$

admet une surface enveloppe E. Toutes ces surfaces E vérifient, quelles que soient les fonctions $f(a)\,,\varphi(a)$, une même équation aux dérivées partielles du second ordre. En effet, la courbe de contact de la surface S avec son enveloppe est représentée par les deux équations

$$(29)\qquad \begin{cases} \Phi(x\,,y\,,z\,,a\,,f(a)\,,\varphi(a)) = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial a} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial f(a)}f'(a) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi(a)}\varphi'(a) = 0, \end{cases}$$

et les valeurs de p et de q le long de cette courbe sont données par les deux équations

$$(30)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}p = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}q = 0. \end{cases}$$

Si on regarde, dans ces relations, $a\,,f(a)\,,\varphi(a)\,,f'(a)\,,\varphi'(a)$ comme données, on a une famille de multiplicités M_1 dépendant de 5 paramètres, et il est clair que toute surface enveloppe E est un lieu de multiplicités M_1. Il nous suffit donc de démontrer que toutes ces multiplicités M_1 satisfont à deux relations de la forme (22). Soient, d'une manière générale,

$$(31)\qquad \begin{cases} y = f_1(x\,;\,\alpha_1\,,\alpha_2\,,\ldots\,,\alpha_5), \\ z = f_2(x\,;\,\alpha_1\,,\alpha_2\,,\ldots\,,\alpha_5), \\ p = f_3(x\,;\,\alpha_1\,,\alpha_2\,,\ldots\,,\alpha_5), \\ q = f_4(x\,;\,\alpha_1\,,\alpha_2\,,\ldots\,,\alpha_5) \end{cases}$$

les équations d'une famille de multiplicités M_1 à 5 paramètres, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$. Si, entre les 4 équations (31) et les quatre équations

$$dy = f_1'(x)dx, \qquad dz = f_2'(x)dx, \qquad dp = f_3'(x)dx, \qquad dq = f_4'(x)dx,$$

on élimine les cinq paramètres α_i, il reste trois relations entre $x\,,y\,,z\,,p\,,q$,

dx, dy, dz, dq, dp. L'une de ces relations est précisément $dz = pdx + qdy$, et il reste deux autres équations distinctes de celles-là.

Dans le cas actuel, on peut effectuer le calcul comme il suit. Des équations (29) et (30) on déduit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0,$$

$$d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + pd\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dp = 0,$$

$$d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + qd\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dq = 0;$$

imaginons qu'on tire $a, f(a), \varphi(a)$ des équations

$$\Phi = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

et qu'on les porte dans les précédentes, il reste

$$dz - pdx - qdy = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} dp + \left\{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} p + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} p^2\right\} dx + \left\{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + p\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + q\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + pq\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right\} dy = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} dq + \left\{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + p\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + q\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + pq\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right\} dx + \left\{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} q + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} q^2\right\} dy = 0.$$

On a deux équations de la forme

$$dp = Adx + Bdy,$$

$$dq = Bdx + Ddy,$$

ce qui conduit (n° 12) à une équation linéaire en $rt - s^2, r, s, t$, pour laquelle les deux systèmes de caractéristiques sont confondus. Les équations ainsi obtenues sont, comme on sait, caractérisées par ce fait que les équations des caractéristiques admettent trois combinaisons intégrables.

De même, si on a un complexe de courbes

$$f(x, y, z, a, b, c) = 0,$$

$$\varphi(x, y, z, a, b, c) = 0,$$

les surfaces obtenues en associant les courbes de ce complexe suivant une loi quelconque satisfont à une équation linéaire en r, s, t. On passe d'ailleurs de ce cas au précédent par une transformation de contact.

14. Voici un autre exemple qui généralise l'équation des surfaces minima. Soient deux familles de courbes C et C_1 définies comme il suit: les tangentes aux courbes C sont parallèles aux génératrices d'un certain cône ou, ce qui revient au même, ces courbes satisfont à une équation de la forme

$$f(dx, dy, dz) = 0,$$

ne contenant pas x, y, z. De même les courbes de la seconde famille satisfont à une relation de même forme

$$\varphi(dx, dy, dz) = 0,$$

qui peut être identique à la première. Soit C une courbe de la première famille, C_1 une courbe de la seconde. Joignons un point quelconque m de la courbe C à un point quelconque m_1 de la courbe C_1; le milieu P de la droite mm_1 décrit une surface S. Lorsque le point m reste fixe, m_1 décrivant la courbe C_1, le point P décrit une courbe Γ_1 homothétique à C_1; de même, lorsque m décrit la courbe C, m_1 restant fixe, le point P décrit une courbe Γ homothétique à C. Le long de la courbe Γ le plan tangent à la surface S est un cylindre ayant ses génératrices parallèles à la tangente au point m_1 à la courbe C_1. Considérons les multiplicités M_1 formées d'une courbe Γ satisfaisant à l'équation

$$f(dx, dy, dz) = 0$$

et des plans tangents à un cylindre passant par Γ et ayant ses génératrices parallèles à une tangente de la courbe C_1. L'intersection de deux plans tangents infiniment voisins

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$
$$(X - x)dp + (Y - y)dq = 0,$$

a pour paramètres directeurs $dq, -dp, pdq - qdp$. Les multiplicités M_1 vérifient donc les 3 relations

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$f(dx\,,\,dy\,,\,dz) = 0,$$

$$\varphi(dq\,,\,-dp\,,\,p\,dq - q\,dp) = 0;$$

on en tire

$$dy + A(p\,,\,q)dx = 0,$$

$$dp + B(p\,,\,q)dq = 0.$$

Remplaçons dp par $r\,dx + s\,dy$, dq par $s\,dx + t\,dy$ et éliminons $\frac{dy}{dx}$; on est conduit à une équation linéaire en $r\,,\,s\,,\,t$

(32) $$E(p\,,\,q)r + 2F(p\,,\,q)s + G(p\,,\,q)t = 0,$$

dont les coefficients ne dépendent que de p et de q, à laquelle satisfont toutes les surfaces S.

Inversement, pour qu'une équation de la forme (32) puisse être intégrée par la méthode précédente, il faut et il suffit qu'on puisse éliminer p et q entre les deux équations

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$E\,dy^2 - 2F\,dx\,dy + G\,dx^2 = 0,$$

qui conviennent aux caractéristiques.

III.

15. Etant donnée une équation du second ordre (E), on appelle *intégrale intermédiaire* toute équation du prêmier ordre

(33) $$V(x\,,\,y\,,\,z\,,\,p\,,\,q) = 0$$

dont toutes les intégrales, sauf peut-être quelques intégrales exceptionnelles, appartiennent à l'équation du second ordre proposée. Considérons une multiplicité caractéristique M_1 de l'équation (33); il existe, comme on sait, une infinité d'intégrales de l'équation (33) passant par la multiplicité M_1, ou, d'une façon plus précise, une infinité de surfaces intégrales de l'équation (33), formant des systèmes continus, passant par la courbe caractéristique C et ayant entre elles un contact *du premier ordre* seulement tout le long de C. L'équation du second ordre E doit donc appartenir à la catégorie particulière des équations du second ordre dont il a eté question au n° 7; ce qui nous montre déjà qu'une équation du second ordre, *prise arbitrairement,* n'admet pas d'intégrale intermédiaire.

Soit donc (E) une équation du second ordre, admettant des multiplicités caractéristiques du premier ordre. Ces multiplicités caractéristiques doivent vérifier un certain nombre de relations

$$(34) \qquad H_1(x, y, z, p, q\,;\, dx, dy, dp, dq) = 0, \qquad H_2 = 0, \quad \ldots$$

homogènes en dx, dy, dp, dq. D'autre part, les multiplicités caractéristiques de l'équation (33) satisfont aux équations connues

$$(35) \qquad \frac{dx}{\frac{\partial V}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial V}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}} = \frac{-dq}{\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}};$$

remplaçons dans les équations (34), dx, dy, dp, dq par les quantités proportionnelles tirées des équations (35), et nous sommes conduits à un certain nombre d'équations de condition homogènes en $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}$,

$$(36) \qquad K_1\left(x, y, z, p, q\,;\, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}\right) = 0, \qquad K_2 = 0, \quad \ldots .$$

La recherche des intégrales intermédiaires est donc ramenée à la recherche des fonctions $V(x, y, z, p, q)$ qui satisfont à un système d'équations simultanées du premier ordre.

16. On arrive aisément au même résultat par un calcul direct. Soit

$$(37) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

une équation du second ordre, dont $V = 0$ est une intégrale intermédiaire. De l'équation $V = 0$, on tire

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} + p\dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{\partial V}{\partial p}r + \dfrac{\partial V}{\partial q}s = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{\partial V}{\partial p}s + \dfrac{\partial V}{\partial q}t = 0; \end{cases}$$

si on pouvait résoudre les équations (37) et (38) par rapport à r, s, t, l'équation (37) ne pourrait admettre toutes les intégrales de $V=0$, car on aurait r, s, t et, par suite, toutes les dérivées d'ordre supérieur, exprimées au moyen de x, y, z, p, q. Les intégrales de $V=0$, qui appartiennent à l'équation (37), dépendraient de *cinq* constantes arbitraires au plus. Il faudra donc qu'en tirant r et t des équations (38) et portant ces valeurs dans l'équation (37), le resultat soit indépendant de s. En poursuivant le raisonnement, on est conduit, il est facile de le voir, aux mêmes résultats que par la première méthode.

Considérons en particulier les équations (37) qui admettent des intégrales intermédiaires, dépendant de deux paramètres *essentiels* a, b,

$$(39)\qquad V(x, y, z, p, q, a, b) = 0;$$

l'équation (37) doit résulter de l'élimination de a et b entre les trois relations (39) et (40)

$$(40)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} + p\dfrac{\partial V}{\partial z} + r\dfrac{\partial V}{\partial p} + s\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z} + s\dfrac{\partial V}{\partial p} + t\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0. \end{cases}$$

Si on regarde dans ces dernières, x, y, z, p, q comme des constantes données *quelconques*, et r, s, t comme des coordonnées courantes, elles représentent une droite parallèle à une génératrice du cône (T)

$$rt - s^2 = 0.$$

L'équation (37) doit donc représenter une surface réglée (Σ) dont les génératrices sont parallèles à celles du cône (T), quelles que soient les valeurs, supposées constantes, de x, y, z, p, q.

Inversement, étant donnée une équation (E) de cette espèce, elle admet un système de multiplicités caractéristiques du premier ordre défini par deux équations homogènes en dx, dy, dp, dq

$$H(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0,$$
$$H_1(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0;$$

pour obtenir les relations auxquelles doit satisfaire une intégrale intermédiaire V, il suffit d'y remplacer dx, dy, dp, dq par $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$, $-\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right)$, $-\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)$ respectivement. Il résulte des développements du n° 10 que cette règle peut être remplacée par la suivante: *soient*

$$\varphi(x, y, z, p, q; \lambda, \mu, \nu, \rho) = 0, \qquad \psi(x, y, z, p, q; \lambda, \mu, \nu, \rho) = 0$$

les conditions, homogènes en λ, μ, ν, ρ, pour que la droite

$$\lambda + \mu r + \nu s = 0,$$
$$\rho + \mu s + \nu t = 0$$

soit une génératrice de la surface (Σ) représentée par l'équation (E). On remplace dans ces équations λ, ρ, μ, ν par $\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$ respectivement.

17. Les équations auxquelles on est conduit sont homogènes par rapport à $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$, $\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}$. Si l'équation a la forme d'Ampère, les équations qui déterminent V sont *linéaires*, et si on connaît deux intégrales intermédiaires V_1, V_2, on en déduit une intégrale dépendant d'une fonction arbitraire $\varphi(V_1, V_2) = 0$. De même, dans le cas général, si on connaît une intégrale intermédiaire dépendant de deux constantes arbitraires a, b,

$$V(x, y, z, p, q, a, b) = 0,$$

Bour a déjà remarqué que l'on pouvait en déduire une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire, par la méthode de la variation des constantes. C'est une simple conséquence de ce que la fonction V est déterminée par des équations du premier ordre. En effet, considérons les trois équations

$$V = 0, \qquad b = \varphi(a), \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a) = 0,$$

où $\varphi(a)$ désigne une fonction arbitraire de a; si on tire a et b des deux dernières équations et qu'on porte ces valeurs dans la première, on est conduit à une nouvelle équation

$$V_1 = 0,$$

qui est aussi une intégrale intermédiaire, car les dérivées partielles $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, $\frac{\partial V_1}{\partial y}, \frac{\partial V_1}{\partial z}, \frac{\partial V_1}{\partial p}, \frac{\partial V_1}{\partial q}$ ont les mêmes expressions que $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}$. La fonction V_1 satisfait donc bien aux mêmes équations que V.

La remarque de Bour peut être complétée comme il suit. Etant donnée une équation du second ordre (E), qui admet une intégrale intermédiaire avec deux constantes arbitraires $V(x, y, z, p, q, a, b)$, proposons-nous de déterminer une intégrale intermédiaire, dont une solution soit tangente à une courbe *donnée* C le long d'une développable *donnée* Δ, passant par cette courbe. Le long de C, x, y, z, p, q sont cinq fonctions supposées connues d'une variable λ, vérifiant la relation $dz = pdx + qdy$. La fonction arbitraire $\varphi(a)$ doit satisfaire aux deux relations

$$(41) \qquad \begin{cases} V(x, y, z, p, q, a, \varphi(a)) = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial a} + \dfrac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a) = 0, \end{cases}$$

où on suppose x, y, z, p, q remplacées par leurs valeurs en fonction de λ. Si on différentie la première des équations (41) en tenant compte de la seconde, il vient

$$(42) \qquad \frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y' + \frac{\partial V}{\partial z}z' + \frac{\partial V}{\partial p}p' + \frac{\partial V}{\partial q}q' = 0,$$

x', y', z', p', q' désignant les dérivées par rapport à λ. En éliminant λ entre les équations (42) et $V = 0$, on est conduit à une équation

$$\Phi(a, \varphi(a)) = 0$$

qui détermine la fonction inconnue $\varphi(a)$.[1]

18. Appliquons ce qui précède à quelques exemples. Considérons d'abord l'équation élémentaire

$$s = 0,$$

et proposons-nous de déterminer une intégrale de cette équation passant par une courbe C et ayant un plan tangent donné tout le long de cette courbe. Soient

$$x = f_1(\lambda), \qquad y = f_2(\lambda), \qquad z = f_3(\lambda), \qquad p = \varphi_1(\lambda), \qquad q = \varphi_2(\lambda),$$

---

[1] Quand on élimine λ entre les deux équations (41), on est conduit à une équation du premier ordre pour déterminer $\varphi(a)$

$$\text{(e)} \qquad R(a, \varphi(a), \varphi'(a)) = 0.$$

Il semble donc que l'on devrait trouver une infinité de fonctions $\varphi(a)$ répondant à la question. Pour expliquer cette apparente contradiction, imaginons qu'on ait remplacé x, y, z, p, q en fonction de λ et soit $V(x, y, z, p, q, a, b) = U(\lambda, a, b)$. Les équations (41) deviennent

$$(41') \qquad U(\lambda, a, \varphi(a)) = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial U}{\partial \varphi(a)} \varphi'(a) = 0,$$

et la question revient à déterminer $\varphi(a)$ de telle sorte que les équations (41') aient une solution commune en a, quelle que soit la valeur de λ. Or, si on remplace λ par une constante arbitraire λ_0, la fonction $\varphi(a)$ définie par l'équation

$$U(\lambda_0, a, \varphi(a)) = 0$$

répond à la question, car on a aussi $\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial U}{\partial \varphi(a)} \varphi'(a) = 0$. On a ainsi l'intégrale *générale* de l'équation (e), mais il y a aussi une intégrale *singulière* qu'on obtient en éliminant λ entre les deux équations

$$U = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0;$$

c'est cette intégrale qui donne la véritable solution du problème proposé.

les valeurs de x, y, z, p, q le long de C. L'équation $s = 0$ admet l'intégrale intermédiaire

$$p = X(x),$$

$X(x)$ désignant une fonction arbitraire de x; cette fonction est déterminée par l'équation de condition

$$\varphi_1(\lambda) = X(f_1(\lambda)).$$

X étant ainsi déterminée, on a pour l'intégrale cherchée

$$z = \int X(x)dx + \Pi(y)$$

ou, en posant $x = f_1(\theta)$,

$$z = \int \varphi_1(\theta)f_1'(\theta)d\theta + \Pi(y).$$

La fonction $\Pi(y)$ est déterminée par les conditions initiales, mais, pour plus de symétrie, on peut se servir de la seconde intégrale intermédiaire $q = Y(y)$, et on trouve que l'intégrale cherchée est représentée par le système des trois équations:

$$\begin{cases} x = f_1(\theta), \\ y = f_2(\tau), \\ z = \int\limits_0^\theta \varphi_1(\theta)f_1'(\theta)d\theta + \int\limits_0^\tau \varphi_2(\tau)f_2'(\tau)d\tau, \end{cases}$$

θ et τ désignant deux variables auxiliaires. Pour $\theta = \tau = \lambda$, les variables x, y, z, p, q ont bien les valeurs données.

L'équation

$$\varphi_1(\lambda) = X(f_1(\lambda))$$

ne détermine plus la fonction X lorsque $f_1(\lambda)$ se réduit à une constante x_0; si $\varphi_1(\lambda)$ ne se réduit pas aussi à une constante, le problème est impossible. Mais, si $\varphi_1(\lambda)$ est constant aussi, le problème est indéterminé, conformément à la théorie des caractéristiques.

19. Soit, d'une manière générale,

$$s + ap + bq + cz = 0$$

une équation pour laquelle un des invariants h et k est nul. Si on a, par exemple,

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0,$$

l'équation peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) = 0;$$

elle admet l'intégrale intermédiaire

$$\frac{\partial z}{\partial y} + az = Ye^{-\int b dx}, \tag{43}$$

Y étant une fonction arbitraire de y. Cette fonction Y est déterminée, si on se donne une courbe C par laquelle doit passer la surface cherchée, ainsi que le plan tangent le long de cette courbe, et l'intégration de l'équation linéaire (43) s'achèvera par des quadratures.

En général, toutes les fois qu'une équation linéaire

$$s + ap + bq + cz = 0 \tag{44}$$

est intégrable par la méthode de Laplace, le problème de déterminer une surface intégrale passant par une courbe *donnée* et tangente à une développable *donnée* le long de cette courbe se ramène *à des quadratures.* Supposons en effet qu'une surface S, satisfaisant à l'équation (44), doive passer par une courbe C, le long de laquelle x, y, z, p, q sont des fonetions connues d'un paramètre λ. Si h n'est pas nul, quand on fait la transformation de Laplace

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az,$$

à la courbe C correspond une courbe C_1; comme l'équation proposée peut s'écrire

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + bz_1 = hz,$$

on connaîtra la valeur de $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ le long de la courbe C_1, et on aura ensuite $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ au moyen de la relation

$$dz_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x} dx + \frac{\partial z_1}{\partial y} dy.$$

On sera donc ramené à chercher une intégrale S_1 de la nouvelle équation passant par la courbe C_1 et ayant un plan tangent connu le long de cette courbe. Si la série de LAPLACE se termine dans un sens, on n'aura donc en définitive que des quadratures à effectuer.

20. L'équation

$$s = f(t, x, y, z, p, q) \tag{45}$$

représente, quand on regarde r, s, t comme des coordonnées courantes, un cylindre ayant ses génératrices parallèles à la droite $r = 0$, $s = 0$. Pour que la droite

$$\lambda + \mu r + \nu s = 0,$$

$$\rho + \mu s + \nu t = 0$$

soit une génératrice de cette surface, il faut que l'on ait

$$\mu = 0, \qquad \frac{\lambda}{\nu} + f\left(-\frac{\rho}{\nu}, x, y, z, p, q\right) = 0.$$

Donc toute intégrale intermédiaire V de l'équation (45) doit satisfaire aux deux équations

$$\frac{\partial V}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial q} f\left\{-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z}}{\dfrac{\partial V}{\partial q}}, x, y, z, p, q\right\} = 0.$$

La première de ces deux relations montre que V ne doit par contenir p; on voit ensuite, en tenant compte de la seconde, que $f(t, x, y, z, p, q)$ doit être une fonction linéaire de p

$$f(t, x, y, z, p, q) = \varphi(x, y, z, q, t) + p\psi(x, y, z, q, t),$$

et la fonction $V(x, y, z, q)$ doit satisfaire aux deux équations

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial q}\varphi\left(x, y, z, q, -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z}}{\dfrac{\partial V}{\partial q}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial q}\psi\left(x, y, z, q, -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z}}{\dfrac{\partial V}{\partial q}}\right) = 0.$$

De l'équation $V(x, y, z, q) = 0$ imaginons qu'on ait tiré $q = \lambda(x, y, z)$; la fonction λ doit satisfaire aux deux relations

$$(46) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial x} - \varphi\left(x, y, z, \lambda, \dfrac{\partial\lambda}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial z} - \psi\left(x, y, z, \lambda, \dfrac{\partial\lambda}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\right) = 0. \end{cases}$$

Pour qu'il existe une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire, les deux équations (46) doivent former un système en involution. C'est ce qui a lieu dans les deux cas particuliers suivants:

$$1^\circ \qquad \psi = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0;$$

$$2^\circ \qquad \varphi = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0.$$

Dans le premier cas, l'équation proposée est de la forme

$$s - \varphi(x, y, q, t) = 0;$$

elle admet toutes les intégrales de l'équation du premier ordre $q = \lambda(x, y)$, pourvu que λ vérifie la relation

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} - \varphi\left(x, y, \lambda, \frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) = 0.$$

Dans le second cas, l'équation est de la forme [1]

$$s - p\psi(y, z, q, t) = 0;$$

elle admet toutes les intégrales de l'equation du premier ordre $q = \lambda(y, z)$, λ étant déterminé par l'équation

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} - \psi\left(y, z, \lambda, \frac{\partial\lambda}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right) = 0.$$

---

[1] Dans une note récente (Comptes rendus, t. 118, p. 1188), M. Beudon a été conduit à la même méthode pour intégrer les équations $s - p\psi(y, z, q, t) = 0$, par la considération des groupes infinis de transformations. Les équations $s - e^{kz}\varphi(t, q, y) = 0$, étudiées aussi par M. Beudon, se ramènent à la forme précédente en prenant pour nouvelle inconnue $u = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Cette transformation s'applique à toutes les équations qui ne contiennent ni p, ni r, et à celles qui ne contiennent ni z, ni r.

21. Il convient, pour terminer ces généralités sur les intégrales intermédiaires, de faire encore les remarques suivantes.

Lorsqu'une équation du second ordre ne représente pas une surface réglée (Σ) ayant le cône (T) pour cône des directions asymptotiques, elle ne peut admettre d'intégrale intermédiaire dépendant de *deux* constantes arbitraires (n° 16). Mais elle peut admettre des intégrales intermédiaires dépendant d'*une* constante arbitraire. Par exemple, l'équation $r^2 - st = 0$ admet l'intégrale intermédiaire $p - a = 0$. On les obtiendra toujours par l'application de la méthode générale.

Si une équation du second ordre admet une intégrale intermédiaire, ne dépendant d'aucune constante arbitraire, $V = 0$, les équations homogènes en $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}$, auxquelles doit satisfaire la fonction V, ne doivent être vérifiées qu'en tenant compte de la relation $V = 0$. Pour lever la difficulté, on peut imaginer qu'on ait tiré de cette équation une des variables en fonction des autres, par exemple $q = \lambda(x, y, z, p)$. Les équations en V donnent des équations pour déterminer la fonction inconnue λ.

IV.

22. Nous allons maintenant étudier en particulier les équations (E) du second ordre jouissant des propriétés suivantes: Considérée comme une équation en r, s, t, l'équation (E) représente une surface réglée (Σ) ayant ses génératrices parallèles à celles du cône (T); de plus, les deux équations homogènes en $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}$, auxquelles doit satisfaire toute intégrale intermédiaire V, forment un système en involution.

Soient

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{47}$$

l'équation considérée et

$$\left\{\begin{aligned} &H(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0, \\ &H_1(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0 \end{aligned}\right. \tag{48}$$

les équations définissant les multiplicités caractéristiques M_1. On peut toujours supposer, sans restreindre la généralité, que les équations (48) peuvent être résolues par rapport à dp et dq. En effet, s'il n'en est pas ainsi, on peut éliminer dp et dq entre ces deux équations, et on obtient une relation

$$G(x, y, z, p, q, dx, dy) = 0,$$

d'où on tirera soit dx, soit dy. Supposons qu'on en tire dx, par exemple; les équations (48) pourront être remplacées par deux équations de la forme suivante

$$K(x, y, z, p, q; dp, dq, dy) = 0,$$

$$dx + P(x, y, z, p, q)dy = 0.$$

De la première équation on tirera soit dq, soit dy, à moins que cette équation ne se réduise à $dp = 0$. S'il en est ainsi, on tirera alors dy de la seconde, à moins que P ne soit nul. Donc, en laissant de côté l'équation $s = 0$ dont nous n'avons pas à nous occuper, les équations (48) peuvent toujours être résolues par rapport à l'un des couples de différentielles ci-dessous

$$(dp, dq), \quad (dp, dy), \quad (dq, dx), \quad (dx, dy).$$

On ramène les trois derniers cas au premier par l'une des transformations de contact, dues à Ampère et à Legendre,

$$x = X, \quad y = Q, \quad p = P, \quad q = -Y, \quad z = -QY + Z,$$

$$x = -P, \quad y = Y, \quad p = X, \quad q = Q, \quad z = -PX + Z,$$

$$x = P, \quad y = Q, \quad p = X, \quad q = Y, \quad z = PX + QY - Z.$$

Les équations différentielles des caractéristiques étant résolues par rapport à dp et dq, il en résulte que les équations auxquelles doit satisfaire l'intégrale intermédiaire V seront résolues par rapport à $\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}$. Elles pourront donc s'écrire

$$(49)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x}+p\dfrac{\partial V}{\partial z}=f\left(x\,,y\,,z\,,p\,,q\,;\dfrac{\partial V}{\partial p}\,,\dfrac{\partial V}{\partial q}\right), \\ \dfrac{\partial V}{\partial y}+q\dfrac{\partial V}{\partial z}=\varphi\left(x\,,y\,,z\,,p\,,q\,;\dfrac{\partial V}{\partial p}\,,\dfrac{\partial V}{\partial q}\right), \end{cases}$$

f et φ étant des fonctions homogènes et du premier degré de $\dfrac{\partial V}{\partial p}\,,\dfrac{\partial V}{\partial q}$.

Prenons d'abord le cas où les fonctions f et φ sont linéaires en $\dfrac{\partial V}{\partial p}\,,\dfrac{\partial V}{\partial q}$; les équations (49) ont la forme

$$(50)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x}+p\dfrac{\partial V}{\partial z}-A\dfrac{\partial V}{\partial p}-B\dfrac{\partial V}{\partial q}=0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y}+q\dfrac{\partial V}{\partial z}-C\dfrac{\partial V}{\partial p}-D\dfrac{\partial V}{\partial q}=0, \end{cases}$$

$A\,,B\,,C\,,D$ étant des fonctions de $x\,,y\,,z\,,p\,,q$, et l'équation du second ordre correspondante est

$$rt-s^2+At+Dr-(B+C)s-BC+AD=0.$$

En appliquant la méthode générale, on trouve que toute intégrale commune aux deux équations (50) doit vérifier la nouvelle équation

$$(C-B)\frac{\partial V}{\partial z}+\left\{\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial C}{\partial x}+q\frac{\partial A}{\partial z}-p\frac{\partial C}{\partial z}+A\frac{\partial C}{\partial p}-C\frac{\partial A}{\partial p}+B\frac{\partial C}{\partial q}-D\frac{\partial A}{\partial q}\right\}\frac{\partial V}{\partial p}$$
$$+\left\{\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial D}{\partial x}+q\frac{\partial B}{\partial z}-p\frac{\partial D}{\partial z}+A\frac{\partial D}{\partial p}-C\frac{\partial B}{\partial p}+B\frac{\partial D}{\partial q}-D\frac{\partial B}{\partial q}\right\}\frac{\partial V}{\partial q}=0,$$

qui doit se réduire à une identité si le système (50) est en involution. On trouve en particulier la condition $B=C$, ce qui montre que les équations (50) ne forment un système en involution que si les deux systèmes de caractéristiques de l'équation du second ordre sont confondus.

Supposons remplies les conditions précédentes. Les équations (50) ont trois intégrales communes distinctes $u\,,v\,,w$; en tenant compte de la relation $B=C$, on vérifie sans peine que l'on a

$$[u\,,v]=0,\qquad [u\,,w]=0,\qquad [v\,,w]=0,$$

le crochet $[u\,,v]$ ayant le sens habituel

$$[u\,,v]=\frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\frac{\partial v}{\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

L'équation du second ordre admet l'intégrale intermédiaire

$$w = F(u, v),$$

dépendant d'une fonction arbitraire $F(u, v)$ de deux variables indépendantes. Cette équation du premier ordre peut toujours être intégrée, malgré la présence d'une fonction arbitraire. En effet les trois équations

$$\begin{cases} w = F(a, b), \\ u = a, \\ v = b, \end{cases}$$

où a, b sont deux constantes arbitraires, définit toujours une multiplicité M_2, d'après les relations $[u, v] = [u, w] = [v, w] = 0$, et il est clair que tous les éléments de cette multiplicité vérifient bien la relation $w = F(u, v)$. Si donc on élimine p et q entre les trois relations précédentes, on obtient une intégrale complète

$$\Phi(x, y, z, a, b, F(a, b)) = 0$$

de l'équation $w = F(u, v)$. L'intégrale générale sera représentée par le système des deux équations

$$\Phi(x, y, z, a, \varphi(a), F(a, \varphi(a))) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\varphi'(a) + \frac{\partial \Phi}{\partial F}\left\{\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\varphi'(a)\right\} = 0,$$

où $\varphi(a)$ est une fonction arbitraire de a. Remarquons que $F(a, \varphi(a))$ est aussi une fonction arbitraire de a, $\psi(a)$; par conséquent l'intégrale générale de l'équation du second ordre est donnée par le système des deux équations

$$\Phi(x, y, z, a, \varphi(a), \psi(a)) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi(a)}\varphi'(a) + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi(a)}\psi'(a) = 0.$$

Ce sont ces propriétés, bien connues, que nous allons étendre aux équations les plus générales pour lesquelles le système (49) est en involution.

23. Pour plus de symétrie dans les notations, posons dans les équations (49),

$$x = x_1, \qquad y = x_2, \qquad z = x_3, \qquad p = x_4, \qquad q = x_5,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = p_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = p_2, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = p_3, \qquad \frac{\partial V}{\partial p} = p_4, \qquad \frac{\partial V}{\partial q} = p_5;$$

elles deviennent

$$(51) \qquad \begin{cases} H = p_1 + x_4 p_3 - f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; p_4, p_5) = 0, \\ H_1 = p_2 + x_5 p_3 - \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; p_4, p_5) = 0. \end{cases}$$

On sait que toute intégrale commune aux deux équations (51) satisfait aussi à l'équation

$$(H, H_1) = \sum_{i=1}^{5} \frac{D(H, H_1)}{D(p_i, x_i)} = 0;$$

en développant les calculs, on trouve cette équation

$$(H, H_1) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_4\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial p_4}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4}\frac{\partial\varphi}{\partial p_4}$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial p_5}\frac{\partial\varphi}{\partial x_5} - \frac{\partial f}{\partial x_5}\frac{\partial\varphi}{\partial p_5} + p_3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_4} - \frac{\partial f}{\partial p_5}\right) = 0.$$

Si le système (51) est en involution, cette équation doit être une conséquence des deux premières, et, comme elle ne renferme ni p_1, ni p_2, elle doit se réduire à une identité. D'ailleurs elle est linéaire en p_3; les fonctions f et φ doivent donc satisfaire aux deux relations

$$(52) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial p_4} = \frac{\partial f}{\partial p_5},$$

$$(53) \qquad \frac{D(f, \varphi)}{D(p_4, x_4)} + \frac{D(f, \varphi)}{D(p_5, x_5)} + \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} - x_4\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = 0.$$

La première équation montre que f et φ sont les dérivées partielles d'une fonction de $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, p_4, p_5$ par rapport à p_4 et à p_5 respectivement; et, comme f et φ sont homogènes et du premier degré en p_4, p_5, la fonction dont elles sont les dérivées partielles doit être homogène et du second degré et peut s'écrire

$$p_4^2\psi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; u),$$

en posant $u = \frac{p_5}{p_4}$. On aura donc

$$f = 2p_4\psi - p_5\frac{\partial\psi}{\partial u}, \qquad \varphi = p_4\frac{\partial\psi}{\partial u},$$

et, en portant ces valeurs de f et de φ dans l'équation (53), elle devient

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned}&\left\{2u\frac{\partial\psi}{\partial x_4} - 2\frac{\partial\psi}{\partial x_5}\right\}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial x_1} - u\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial x_1} - (ux_5 + x_4)\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial x_3}\\ &\quad + \left\{2\psi - u\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial x_4} + \left\{\frac{\partial\psi}{\partial u} + u\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right\}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial x_5} - 2\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial x_4}\\ &\qquad + 2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + 2x_5\frac{\partial\psi}{\partial x_3} = 0.\end{aligned}\right.$$

Cherchons quelle sera la forme de l'équation du second ordre correspondante. Les équations (49) sont, dans le cas considéré ici,

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial p}\left\{2\psi\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial q}}{\frac{\partial V}{\partial p}}\right) - \frac{\frac{\partial V}{\partial q}}{\frac{\partial V}{\partial p}}\psi'_u\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial q}}{\frac{\partial V}{\partial p}}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial p}\psi'_u\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial q}}{\frac{\partial V}{\partial p}}\right),$$

où

$$u = \frac{\frac{\partial V}{\partial q}}{\frac{\partial V}{\partial p}};$$

pour remonter à l'équation du second ordre, remplaçons $\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$ par λ, ρ, μ, ν respectivement, nous trouvons les deux relations

$$\lambda = 2\mu\psi\left(\frac{\nu}{\mu}\right) - \nu\psi'\left(\frac{\nu}{\mu}\right),$$

$$\rho = \mu\psi'\left(\frac{\nu}{\mu}\right)$$

qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes (n° 16) pour que la droite

$$\lambda + \mu r + \nu s = 0,$$

$$\rho + \mu s + \nu t = 0,$$

où on considère r, s, t, comme des coordonnées courantes, soit une génératrice de la surface réglée (Σ) représentée par l'équation cherchée. Les équations de cette génératrice peuvent donc s'écrire, en prenant $\mu = 1$, $\nu = m$,

$$r + ms + 2\phi(m) - m\phi'(m) = 0,$$

$$s + tm + \phi'(m) = 0;$$

cette droite est la caractéristique du plan mobile

$$r + 2sm + tm^2 + 2\phi(m) = 0,$$

où m désigne le paramètre variable. La surface (Σ) est donc une surface développable, et, par conséquent, les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, comme dans le cas de l'équation linéaire. En résumé, on obtient comme il suit toutes les équations du second ordre pour lesquelles les équations, qui déterminent les intégrales intermédiaires du premier ordre, forment un système en involution; *on prend l'enveloppe du plan mobile*

$$r + 2sm + tm^2 + 2\phi(x, y, z, p, q; m) = 0,$$

x, y, z, p, q étant regardées comme des constantes, r, s, t comme des coordonnées courantes, et m comme le paramètre variable. La fonction ϕ doit en outre satisfaire à l'équation (54), *où on aurait remplacé $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, u$ par x, y, z, p, q, m respectivement.*

24. Nous allons montrer maintenant que l'intégration des équations de cette espèce se ramène à l'intégration du système en involution (49). Soit $V(x, y, z, p, q, a, b)$ une intégrale de ce système avec deux constantes arbitraires a et b. En différentiant les équations (49) par rapport à a et à b respectivement, il vient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial x} + p\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial z} = \frac{\partial f}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial p} + \frac{\partial f}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial q},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial y} + q\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial q},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial x} + p\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial z} = \frac{\partial f}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial p} + \frac{\partial f}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial q},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial y} + q\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial q}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\left[V, \frac{\partial V}{\partial a}\right] = {} & \frac{\partial V}{\partial p}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial x} + p\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial z}\right\} + \frac{\partial V}{\partial q}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial y} + q\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial z}\right\}\\ & - \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial p}\left\{\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right\} - \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial q}\left\{\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right\}\\ = {} & \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial p}\left\{\frac{\partial f}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial V}{\partial q} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right\}\\ & + \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial q}\left\{\frac{\partial f}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial V}{\partial q} - \left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right\};\end{aligned}$$

en tenant compte de la condition (49), on peut encore écrire

$$\begin{aligned}\left[V, \frac{\partial V}{\partial a}\right] = {} & \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial p}\left\{\frac{\partial f}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial V}{\partial q} - f\right\}\\ & + \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial q}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial V}{\partial q} - \varphi\right\},\end{aligned}$$

et, comme f et φ sont des fonctions homogènes et du premier degré de $\dfrac{\partial V}{\partial p}$ et de $\dfrac{\partial V}{\partial q}$, il vient

$$\left[V, \frac{\partial V}{\partial a}\right] = 0.$$

On verrait tout pareillement que l'on a $\left[V, \frac{\partial V}{\partial b}\right] = 0$. Calculons maintenant $\left[\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}\right]$; on a

$$\left[\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}\right] = \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial p}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial x} + p\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial z}\right\} + \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial q}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial y} + q\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial z}\right\}$$
$$- \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial p}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial x} + p\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial z}\right\} - \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial q}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial y} + q\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial z}\right\}.$$

En remplaçant $\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial x} + p\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial z}, \ldots$ par leurs expressions, il reste

$$\left[\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}\right] = 0.$$

On obtiendra donc une intégrale complète de l'intégrale intermédiaire

$$V(x, y, z, p, q, a, b) = 0$$

en adjoignant à cette équation les deux relations

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \alpha, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = \beta,$$

α et β désignant deux nouvelles constantes arbitraires. Ceci suppose que $V, \frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}$ sont des fonctions distinctes de x, y, z, p, q; mais on peut toujours choisir une intégrale complète du système (49) satisfaisant à cette condition car, le système (49) étant en involution, on peut choisir arbitrairement la fonction de z, p, q, a, b à laquelle se réduit V pour $x = x_0$, $y = y_0$.

Si on élimine a et b entre les relations

$$V(x, y, z, p, q, a, b) = 0, \qquad b = \pi(a), \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\pi'(a) = 0,$$

où $\pi(a)$ est une fonction quelconque de a, on obtient (n° 17) une nouvelle intégrale intermédiaire $V_1 = 0$, qui s'intègre aussi sans aucune difficulté.

En effet, prenons pour b une fonction $\psi(a, a', b')$, dépendant de deux nouvelles constantes a' et b', et se réduisant à $\pi(a)$ pour $a' = a'_0$, $b' = b'_0$. La nouvelle intégrale complète dépend de deux constantes arbitraires a' et b', et on peut lui appliquer la même méthode qu'à la première. L'intégration d'une équation du second ordre de l'espèce considérée est donc ramenée à l'intégration du système en involution (49).

25. Si on a intégré le système en involution (49), on peut obtenir sous forme finie l'intégrale générale de l'équation du second ordre correspondante. Considérons toujours les trois équations

$$V = 0, \qquad b = \pi(a), \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\pi'(a) = 0;$$

imaginons que des deux dernières on tire les valeurs de a et b en fonction de x, y, z, p, q et qu'on porte ces valeurs de a et de b dans $V, \frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}$, on obtient ainsi trois fonctions V_1, V_2, V_3 qui sont encore en involution, quelle que soit la fonction $\pi(a)$. Désignons par u une quelconque des variables x, y, z, p, q; on a

$$\frac{\partial V_1}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial u} + \left[\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\pi'(a)\right]\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial u},$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial u} = \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial u} + \left[\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b}\pi'(a)\right]\frac{\partial a}{\partial u}.$$

D'autre part, de l'équation qui donne a, on tire

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial u}\pi'(a) + \left\{\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b}\pi'(a) + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2}\pi'^2(a) + \frac{\partial V}{\partial b}\pi''(a)\right\}\frac{\partial a}{\partial u} = 0,$$

de sorte qu'en remplaçant $\frac{\partial a}{\partial u}$ par sa valeur, on a des formules de la forme

$$\frac{\partial V_2}{\partial u} = \lambda\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial u} + \mu\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial u},$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial u} = \lambda'\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial u} + \mu'\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial u},$$

$\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ étant les mêmes, quelle que soit la variable u. Les crochets

$[V_1, V_2], [V_1, V_3], [V_2, V_3]$ sont donc des combinaisons linéaires et homogènes des crochets $\left[V, \frac{\partial V}{\partial a}\right], \left[V, \frac{\partial V}{\partial b}\right], \left[\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}\right]$ et par suite on a aussi

$$[V_1, V_2] = 0, \qquad [V_1, V_3] = 0, \qquad [V_2, V_3] = 0.$$

Il suit de là que les trois équations

$$V_1 = 0, \qquad V_2 = \alpha, \qquad V_3 = \beta,$$

où α et β sont deux constantes arbitraires, représentent une intégrale complète de l'équation $V_1 = 0$. Cette intégrale complète s'obtiendra par l'élimination de p et q entre les trois équations, ou encore, d'après la signification de V_1, V_2, V_3, par l'élimination de p, q, a, b entre les cinq relations

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\pi'(a) = 0, \qquad b = \pi(a), \qquad \frac{\partial V}{\partial a} = \alpha, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = \beta.$$

Si on élimine d'abord p et q entre les trois équations $V = 0$, $\frac{\partial V}{\partial a} = \alpha$, $\frac{\partial V}{\partial b} = \beta$, il reste les trois équations

$$\begin{gathered} \Pi(x, y, z, a, b, \alpha, \beta) = 0, \\ \alpha + \pi'(a)\beta = 0, \\ b = \pi(a), \end{gathered}$$

entre lesquelles il restera à éliminer a et b. Mais on peut substituer à l'une des constantes α, β, à α par exemple, la constante a définie par l'équation $\alpha + \pi'(a)\beta = 0$, ce qui revient à éliminer b et α au lieu de a et b. Cette élimination se fait d'elle-même, et on est conduit à l'intégrale complète

$$\Pi(x, y, z, a, \pi(a), -\beta\pi'(a), \beta) = 0$$

avec deux constantes arbitraires a et β. Si on remplace ensuite β par une fonction arbitraire de a, $\chi(a)$, on a l'intégrale générale de l'équation du second ordre proposée qui est représentée par le système de deux équations de la forme suivante

$$(55) \qquad \begin{cases} \Phi(x, y, z, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi(a)}\pi'(a) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi'(a)}\pi''(a) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \chi(a)}\chi'(a) = 0, \end{cases}$$

$\pi(a)$ et $\chi(a)$ étant deux fonctions arbitraires. On peut donc énoncer le théorème suivant.

Lorsque le système (49) *est en involution, soit* $V(x, y, z, p, q, a, b)$ *une intégrale de ce système avec deux constantes arbitraires* a *et* b, *telle que* $V, \frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}$ *soient des fonctions distinctes de* z, p, q; *l'intégrale générale de l'équation du second ordre est représentée par les deux relations* (55), *dont la première s'obtient en éliminant* p *et* q *entre les trois équations*

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} = \alpha, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = \beta,$$

et remplaçant b *par* $\pi(a)$, β *par* $\chi(a)$, *et* α *par* $-\pi'(a)\chi(a)$.

26. L'équation (54) est du second ordre et la fonction inconnue ϕ dépend de 6 variables. Il paraît difficile d'obtenir l'intégrale générale de cette équation, mais on obtient une solution évidente en prenant pour ϕ une fonction indépendante de x, y, z, p, q, dépendant du paramètre m seulement. L'équation du second ordre correspondante, ne renferme que r, s, t et s'obtient en cherchant l'enveloppe du plan mobile qui a pour équation

$$r + 2sm + tm^2 + 2\phi(m) = 0,$$

$\phi(m)$ ne contenant aucune des lettres x, y, z, p, q. Nous chercherons une intégrale intermédiaire de la forme

$$V(z + ax + by, p + a \,.\, q + b) = 0,$$

a et b étant des constantes arbitraires. Si on résout cette équation par rapport à $p + a$, on en tire

$$(56) \qquad p + a + \omega(z + ax + by, q + b) = 0,$$

et on a

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial q}}{\frac{\partial V}{\partial p}} = \frac{\partial \omega}{\partial v}, \qquad \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial p}} = \frac{\partial \omega}{\partial u} a, \qquad \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial V}{\partial z}} = \frac{\partial \omega}{\partial u} b, \qquad \frac{\frac{\partial V}{\partial z}}{\frac{\partial V}{\partial p}} = \frac{\partial \omega}{\partial u},$$

en posant $u = z + ax + by$, $v = q + b$. Les équations (49) deviennent

$$(57)\qquad \begin{cases} -\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u} = 2\psi\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\right) - \dfrac{\partial\omega}{\partial v}\psi'\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\right), \\ v\dfrac{\partial\omega}{\partial u} = \psi'\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\right); \end{cases}$$

posons, dans ces équations, $\frac{\partial\omega}{\partial u} = \alpha$, $\frac{\partial\omega}{\partial v} = \beta$, on en tire

$$v = \frac{\psi'(\beta)}{\alpha}, \qquad \omega = \frac{\beta\psi'(\beta) - 2\psi(\beta)}{\alpha},$$

et en portant ces valeurs dans la relation

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial u}du + \frac{\partial\omega}{\partial v}dv,$$

il vient

$$\frac{2\psi(\beta)d\alpha - \alpha\psi'(\beta)d\beta}{\alpha^3} = du,$$

et, par suite,

$$u + \frac{\psi(\beta)}{\alpha^2} = \text{const.}$$

On obtiendra donc une intégrale intermédiaire de la forme (56) en éliminant α et β entre les trois relations

$$(58)\qquad \begin{cases} z + ax + by + \dfrac{\psi(\beta)}{\alpha^2} = 0, \\ q + b = \dfrac{\psi'(\beta)}{\alpha}, \\ p + a = \dfrac{2\psi(\beta) - \beta\psi'(\beta)}{\alpha}. \end{cases}$$

Imaginons que des deux dernières on tire α et β; en les combinant par division on aura d'abord pour β une fonction de $\frac{p+a}{q+b}$, puis pour $\frac{1}{\alpha}$ une fonction homogène du premier degré de $p + a$ et de $q + b$. En portant ces valeurs dans la première, on trouvera donc une intégrale intermédiaire de la forme

$$V = z + ax + by + G(p + a, q + b) = 0,$$

G étant une fonction homogène et du second degré de $p + a$ et de $q + b$; il est facile de vérifier qu'on a bien, quelle que soit la fonction G,

$$\left[V, \frac{\partial V}{\partial a}\right] = 0, \qquad \left[V, \frac{\partial V}{\partial b}\right] = 0, \qquad \left[\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}\right] = 0.$$

L'élimination précédente n'est possible que si la fonction ψ est donnée. On peut cependant appliquer la méthode générale du n° 25 sans particulariser cette fonction. Pour la commodité des calculs, changeons α en $\frac{1}{\alpha}$ et posons

$$V = z + ax + by + \alpha^2\psi(\beta),$$

α et β étant déterminés par les deux équations

$$\alpha\psi'(\beta) = q + b,$$

$$\alpha\{2\psi(\beta) - \beta\psi'(\beta)\} = p + a.$$

On a

$$\frac{\partial V}{\partial a} = x + 2\alpha\psi(\beta)\frac{d\alpha}{da} + \alpha^2\psi'(\beta)\frac{d\beta}{da},$$

$$\frac{\partial V}{\partial b} = y + 2\alpha\psi(\beta)\frac{d\alpha}{db} + \alpha^2\psi'(\beta)\frac{d\beta}{db};$$

les valeurs des dérivées partielles $\frac{d\alpha}{da}, \frac{d\alpha}{db}, \frac{d\beta}{da}, \frac{d\beta}{db}$ se tirent des deux dernières équations et il reste, toutes réductions faites,

$$\frac{\partial V}{\partial a} = x + \alpha, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = y + \alpha\beta.$$

Pour appliquer la méthode générale, nous devons éliminer α et β entre les trois équations

$$V = z + ax + by + \alpha^2\psi(\beta) = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = x + \alpha = a', \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = y + \alpha\beta = b',$$

et remplacer ensuite b par $\pi(a)$, b' par $\chi(a)$ et a' par $-\pi'(a)\chi(a)$. Nous sommes conduits ainsi à l'équation

$$\Phi(x, y, z, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a))$$
$$= z + ax + y\pi(a) + \{x + \pi'(a)\chi(a)\}^2 \psi\left\{\frac{y - \chi(a)}{x + \pi'(a)\chi(a)}\right\}$$

et l'intégrale générale de l'équation du second ordre proposée est représentée par l'ensemble des deux équations

$$(59)\qquad \begin{cases} \Phi(x, y, z, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi(a)}\pi'(a) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi'(a)}\pi''(a) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \chi(a)}\chi'(a) = 0, \end{cases}$$

$\pi(a)$ et $\chi(a)$ étant des fonctions arbitraires du paramètre a.

Remarque. Les équations précédentes paraissent au premier abord très particulières, mais il convient de remarquer qu'on a une catégorie beaucoup plus étendue d'équations s'intégrant complètement par notre méthode en considérant les équations du second ordre qui peuvent se ramener à la forme précédente par une transformation de contact. Elles possèdent une intégrale intermédiaire de la forme

$$Z + aX + bY + G(P + a, Q + b) = 0,$$

G étant une fonction homogène du second degré, et X, Y, Z, P, Q cinq fonctions de x, y, z, p, q donnant lieu à l'identité

$$dZ - PdX - QdY = \rho(dz - pdx - qdy).$$

27. Etant donnée une fonction absolument arbitraire

$$\Phi(x, y, z, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)),$$

les surfaces enveloppes représentées par l'ensemble des deux équations (59)

$$\begin{cases} \Phi(x, y, z, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi(a)}\pi'(a) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi'(a)}\pi''(a) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \chi(a)}\chi'(a) = 0, \end{cases}$$

où $\pi(a)$ et $\chi(a)$ sont des fonctions des arbitraires de a, ne sont pas en général des surfaces intégrales d'une même équation aux dérivées partielles du second ordre. En effet, les valeurs de p, q, r, s, t dépendent de a, $\pi(a)$, $\pi'(a)$, $\pi''(a)$, $\pi'''(a)$, $\chi(a)$, $\chi'(a)$, $\chi''(a)$, et on aurait à éliminer huit paramètres entre sept équations. Pour que l'élimination soit possible, la fonction Φ doit satisfaire à certaines conditions, que nous nous proposons d'obtenir. Imaginons, pour cela, que l'on ait résolu l'équation $\Phi = 0$ par rapport à z et soit

$$z = F(x, y, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a))$$

la valeur de z ainsi obtenue. Les surfaces considérées sont aussi représentées par l'ensemble des deux équations

$$(60) \qquad \begin{cases} z = F(x, y, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)), \\ 0 = \dfrac{\partial F}{\partial a} + \dfrac{\partial F}{\partial \pi(a)} \pi'(a) + \dfrac{\partial F}{\partial \pi'(a)} \pi''(a) + \dfrac{\partial F}{\partial \chi(a)} \chi'(a). \end{cases}$$

Quand on regarde a, $\pi(a)$, $\pi'(a)$, $\chi(a)$ comme des constantes *données*, la première des équations (60) représente une famille de surfaces S dépendant de *quatre* paramètres. Nous excluons le cas où toutes ces surfaces S seraient des intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, car les surfaces enveloppes vérifieraient aussi la même équation du premier ordre. Nous pouvons aussi supposer que les quatre paramètres dont dépendent les surfaces S sont essentiellement distincts, et ne peuvent se réduire à trois; on sait en effet (n° 13) que les surfaces enveloppes d'une famille de surfaces à 3 paramètres satisfont à une même équation du second ordre, linéaire en r, s, t, $rt - s^2$, quelles que soient les relations que l'on établit entre ces trois paramètres.

Cela posé, considérons les courbes C représentées par l'ensemble des équations (60), où on regarde a, $\pi(a)$, $\pi'(a)$, $\pi''(a)$, $\chi(a)$, $\chi'(a)$ comme des paramètres. Les surfaces étudiées ici sont évidemment engendrées par des courbes de cette famille associées d'une certaine façon; de plus, les valeurs de p et de q, le long de chacune de ces courbes, ont pour expressions

$$(61) \qquad p = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial F}{\partial y},$$

et ne dépendent non plus que de a, $\pi(a)$, $\pi'(a)$, $\pi''(a)$, $\chi(a)$, $\chi'(a)$. Nous définissons ainsi un système de multiplicités M_1, et toutes les surfaces enveloppes des surfaces S sont des lieux de multiplicités M_1.

D'ailleurs, par chacune de ces multiplicités, il passe une infinité de surfaces enveloppes, formant un système continu, et n'ayant entre elles qu'un contact du premier ordre. On peut, en effet, prendre pour $\pi(a)$ et $\chi(a)$ des fonctions telles que, pour $a = a_0$, $\pi(a_0)$, $\pi'(a_0)$, $\pi''(a_0)$, $\chi(a_0)$, $\chi'(a_0)$ aient des valeurs données à l'avance et, comme les valeurs des dérivées suivantes $\pi'''(a_0)$, $\chi''(a_0)$, ... restent absolument arbitraires, les surfaces correspondantes auront seulement un contact du premier ordre le long de la multiplicité M_1 correspondante aux valeurs données a_0, $\pi(a_0)$, $\pi'(a_0)$, $\pi''(a_0)$, $\chi(a_0)$, $\chi'(a_0)$. Si on se reporte au n° 10, on peut conclure de là que le problème proposé est équivalent à celui-ci: *Quelles sont les conditions pour que les multiplicités M_1, définies par les relations* (60) *et* (61) *vérifient deux relations distinctes de la forme*

$$H(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0, \qquad H_1(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0.$$

28. Ecrivons toutes les relations entre $x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq$

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} z &= F(x, y, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)),\\ p &= \frac{\partial F}{\partial x},\\ q &= \frac{\partial F}{\partial y},\\ dp &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dy,\\ dq &= \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy,\\ &\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \pi(a)}\pi'(a) + \frac{\partial F}{\partial \pi'(a)}\pi''(a) + \frac{\partial F}{\partial \chi(a)}\chi'(a) = 0,\\ &d\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right) + d\left(\frac{\partial F}{\partial \pi(a)}\right)\pi'(a) + d\left(\frac{\partial F}{\partial \pi'(a)}\right)\pi''(a) + d\left(\frac{\partial F}{\partial \chi(a)}\right)\chi'(a) = 0,\end{aligned}\right.$$

en posant, d'une manière générale,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy.$$

L'élimination de a, $\pi(a)$, $\pi'(a)$, $\pi''(a)$, $\chi(a)$, $\chi'(a)$ entre ces sept équations doit conduire à deux relations distinctes. Les cinq premières ne renferment que $a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)$; l'élimination de ces quatre paramètres entre ces cinq équations ne peut conduire à deux relations distinctes. D'abord, on peut toujours résoudre les trois premières par rapport à trois des quantités $a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)$; s'il en était autrement, on pourrait éliminer $a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)$ entre ces trois équations, et toutes les surfaces S seraient des intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, cas que nous avons écarté. Supposons, par exemple, qu'on ait tiré des trois premières équations $a, \pi(a), \pi'(a)$ en fonction de $x, y, z, p, q, \chi(a)$; en portant ces valeurs dans les deux suivantes, on ne pourra obtenir deux relations distinctes entre $x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq$ que si $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ deviennent, après cette substitution, indépendantes de $\chi(a)$. La fonction F devrait donc satisfaire à trois équations de la forme

$$r = \varphi_1(x, y, z, p, q),$$

$$s = \varphi_2(x, y, z, p, q),$$

$$t = \varphi_3(x, y, z, p, q);$$

l'intégrale générale d'un pareil système dépend de *trois* constantes arbitraires, au plus. Les surfaces S ne dépendraient donc, en réalité, que de trois constantes essentiellement distinctes; c'est encore un cas que nous avons écarté.

Les quantités $\pi''(a), \chi'(a)$ ne figurent que dans les deux dernières équations (62). Il faudra donc que l'on puisse déduire de ces deux dernières équations une relation indépendante de $\pi''(a), \chi'(a)$. La question revient à celle-ci. Soit

$$U = \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \pi(a)} \pi'(a),$$

$$V = \frac{\partial F}{\partial \pi'(a)}, \qquad W = \frac{\partial F}{\partial \chi(a)};$$

si on considère $a, \pi(a), \pi'(a), \chi'(a)$ comme des constantes données, $\pi''(a)$ et $\chi'(a)$ comme des paramètres variables A et B, l'équation

$$U + AV + BW = 0$$

représente une famille de courbes planes dépendant de deux paramètres A et B. Pour qu'on puisse déduire des deux relations

$$U + AV + BW = 0,$$
$$dU + AdV + BdW = 0,$$

une relation indépendante de A et de B, il faut et il suffit que toutes ces courbes vérifient, quelles que soient les constantes A et B, une même équation différentielle du premier ordre. S'il en est ainsi, les courbes

$$\frac{V}{U} = \text{const.}$$

obtenues en supposant $B = 0$, et les courbes

$$\frac{W}{U} = \text{const.},$$

obtenues en prenant $A = 0$, représentent l'intégrale générale de la même équation; il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\frac{W}{U} = \varphi\left(\frac{V}{U}\right).$$

Lorsque cette condition est vérifiée, toutes les courbes

$$U + AV + BW = 0$$

satisfont bien à l'équation différentielle du premier ordre

$$d\left(\frac{V}{U}\right) = 0.$$

En revenant à la question proposée, on voit que la fonction F doit satisfaire à une relation de la forme

$$(63)\qquad \frac{\dfrac{\partial F}{\partial a} + \dfrac{\partial F}{\partial \pi(a)}\pi'(a)}{\dfrac{\partial F}{\partial \chi(a)}} = \varphi\left|\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \pi'(a)}}{\dfrac{\partial F}{\partial \chi(a)}}\,;\, a\,,\, \pi(a)\,,\, \pi'(a)\,,\, \chi(a)\right|,$$

où la fonction φ ne dépend ni de x, ni de y. Cette condition est d'ailleurs suffisante. D'une manière plus générale, prenons pour $\Phi(x, y, z, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a))$ une fonction satisfaisant à une relation de la forme (63); de la seconde des relations (55) qui définissent les multiplicités M_1, on tirera

$$\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial a} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi(a)}\pi'(a)}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial \chi(a)}} = K,$$

K dépendant de a, $\pi(a)$, $\pi'(a)$, $\pi''(a)$, $\chi(a)$, $\chi'(a)$ et étant indépendant de x, y, z, de sorte que les multiplicités M_1 ne dépendront en réalité que de *cinq* paramètres, a, $\pi(a)$, $\pi'(a)$, $\chi(a)$, K. Donc, d'après ce qu'on a démontré plus haut (n° 13) toutes les surfaces représentées par l'ensemble des équations (55) satisfont bien à une même équation aux dérivées partielles du second ordre.

Comme vérification, reprenons l'exemple du n° 26, où on a

$$\Phi = z + ax + y\pi(a) + \{x + \pi'(a)\chi(a)\}^2 \psi\left\{\frac{y - \chi(a)}{x + \pi'(a)\chi(a)}\right\};$$

on trouve pour les caractéristiques une équation de la forme

$$y - \chi(a) = K\{x + \pi'(a)\chi(a)\},$$

et, par suite

$$\Phi = z + ax + y\pi(a) + \{x + \pi'(a)\chi(a)\}^2 \psi(K).$$

Les caractéristiques sont donc des paraboles ayant leur axe parallèle à l'axe des z; elles dépendent bien de cinq paramètres seulement.

29. Afin d'avoir des notations plus symétriques, nous poserons

$$a = \xi_1, \qquad \pi(a) = \xi_2, \qquad \pi'(a) = \xi_3, \qquad \chi(a) = \xi_4,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = p_1, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \pi(a)} = p_2, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \pi'(a)} = p_3, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \chi(a)} = p_4;$$

il suffira de prendre pour Φ une fonction de $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, contenant en outre 3 paramètres x, y, z, et satisfaisant à une équation de la forme

$$\Pi\left\{\frac{p_1 + \xi_3 p_2}{p_4}, \frac{p_3}{p_4}; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\right\} = 0. \tag{64}$$

Imaginons qu'on ait résolu l'équation $\Phi = 0$ par rapport à ξ_4,

$$\xi_4 = V(\xi_1, \xi_2, \xi_3);$$

l'équation (64) est remplacée par la suivante

$$\Pi\left(\frac{\partial V}{\partial \xi_1} + \xi_3 \frac{\partial V}{\partial \xi_2}, \frac{\partial V}{\partial \xi_3}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, V\right) = 0. \tag{65}$$

D'après ce qui précède, il suffira de connaître une intégrale complète, avec trois constantes arbitraires x, y, z, d'une équation de la forme (65) pour en déduire une fonction Φ satisfaisant à la condition trouvée et, par suite, une équation aux dérivées partielles du second ordre dont l'intégrale générale est représentée par un système de deux équations de la forme (59).

Etant donnée une équation du premier ordre de la forme (65), il lui correspond une infinité d'intégrales complètes et, par conséquent, une infinité d'équations du second ordre s'intégrant de la façon précédente. Mais toutes ces équations du second ordre peuvent se déduire de l'une d'elles par des transformations de contact. Soit, en effet,

$$\varphi(V, \xi_1, \xi_2, \xi_3; x, y, z) = 0 \tag{66}$$

une première intégrale complète de l'équation (65); pour avoir une nouvelle intégrale complète, il suffit d'établir une, deux ou trois relations entre x, y, z et trois nouveaux paramètres X, Y, Z, puis d'appliquer la méthode de la variation des constantes. Supposons, par exemple, qu'on établisse une seule relation entre x, y, z, X, Y, Z

$$\psi(x, y, z; X, Y, Z) = 0; \tag{67}$$

pour appliquer la méthode de la variation des constantes, il faut éliminer x, y, z entre les équations (66), (67) et (68)

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\psi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\frac{\partial\psi}{\partial z}}. \tag{68}$$

Or, si nous regardons maintenant V, ξ_1, ξ_2, ξ_3 comme constants et (x, y, z), (X, Y, Z) comme les coordonnées de deux points variables, le calcul précédent revient à chercher l'enveloppe de la surface Σ, représentée par l'équation (67), où X, Y, Z sont les coordonnées courantes, lorsque le point de coordonnées (x, y, z) décrit la surface S représentée par l'équation (66). Cette surface enveloppe se déduit donc de la surface S au moyen de la transformation de contact qui a pour équation directrice l'équation (67). La conclusion est encore la même, s'il y avait deux ou trois relations entre x, y, z, X, Y, Z; dans le dernier cas, la transformation se réduirait à une transformation ponctuelle.

On voit donc que les équations du second ordre qui correspondent à deux intégrales complètes différentes d'une équation de la forme (65) peuvent se déduire l'une de l'autre par une transformation de contact. Si l'on convient de dire que toutes les équations du second ordre qui peuvent se déduire d'une équation par une transformation de contact forment une *classe,* on voit qu'à toute équation de la forme (65) correspond une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, dont l'intégrale générale peut être représentée par un système de formules de la forme (55).

30. Proposons-nous maintenant d'examiner si deux équations distinctes de la forme (65) peuvent correspondre à une même classe d'équations du second ordre. Etant donnée une famille de surfaces S à quatre paramètres

$$\Phi(x, y, z, a, b, c, d) = 0,$$

on peut évidemment, d'une infinité de manières, remplacer ces quatre paramètres a, b, c, d par quatre nouveaux paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en posant

$$a = f_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta),$$
$$b = f_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta),$$
$$c = f_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta),$$
$$d = f_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta),$$

et la famille de surfaces S est aussi représentée par l'équation

$$\Phi_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0.$$

Supposons maintenant qu'on pose $b = \pi(a)$, $c = \pi'(a)$, $d = \chi(a)$, $\pi(a)$ et $\chi(a)$ étant des fonctions quelconques de a; β, γ, δ deviennent des fonctions de α, et, si les formules de transformation sont telles que l'on ait

$$df - cda = \rho(d\beta - \gamma d\alpha),$$

on aura aussi

$$\beta = \pi_1(\alpha), \qquad \gamma = \pi_1'(\alpha), \qquad \delta = \chi_1(\alpha).$$

La fonction Φ_1 doit satisfaire à une équation de la forme (64) en même temps que la fonction Φ, et il est clair qu'à ces deux équations de la forme (65) correspond la même classe d'équations du second ordre. Par conséquent, toutes les équations du premier ordre qui peuvent se déduire de l'équation (65) par une transformation

$$(69)\qquad \begin{cases} \xi_1 = f_1(\xi_1', \xi_2', \xi_3', V'), \\ \xi_2 = f_2(\xi_1', \xi_2', \xi_3', V'), \\ \xi_3 = f_3(\xi_1', \xi_2', \xi_3', V'), \\ V = f_4(\xi_1', \xi_2', \xi_3', V'), \end{cases}$$

telle que l'on ait

$$(70)\qquad d\xi_1 - \xi_3 d\xi_2 = \rho(d\xi_1' - \xi_3' d\xi_2'),$$

correspondent à une même classe d'équations du second ordre.

Remarquons que toutes les transformations de cette espèce changent bien l'équation (65) en une équation de même forme, car les caractéristiques satisfont à la relation

$$d\xi_1 - \xi_3 d\xi_2 = 0,$$

et inversement toutes les équations du premier ordre, dont les caractéristiques vérifient cette relation, sont de la forme (65).

On trouve aisément toutes ces transformations, de la même façon qu'on détermine les transformations de contact. Les valeurs de ξ_1, ξ_2, ξ_3 ne doivent pas dépendre de V' et les formules (69) prennent la forme suivante

$$\xi_1 = f_1(\xi_1', \xi_2', \xi_3'), \qquad \xi_2 = f_2(\xi_1', \xi_2', \xi_3'), \qquad \xi_3 = f_3(\xi_1', \xi_2', \xi_3'),$$
$$V = f_4(\xi_1', \xi_2', \xi_3', V');$$

la fonction f_4 étant arbitraire et les fonctions f_1, f_2, f_3 satisfaisant à l'identité (70).

31. Supposons, par exemple, que l'équation (65) soit linéaire

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_1} + \xi_3 \frac{\partial V}{\partial \xi_2} + A \frac{\partial V}{\partial \xi_3} + B = 0,$$

A et B étant des fonctions quelconques de ξ_1, ξ_2, ξ_3, V. Toute intégrale complète est de la forme

$$V = \Phi(x, y, z, V_1, V_2, V_3),$$

V_1, V_2, V_3 désignant trois intégrales particulières distinctes. On voit que les surfaces S représentées par l'équation $V = 0$, où l'on regarde x, y, z comme des coordonnées courantes, ne dépendent que de trois paramètres. C'est le cas particulier que nous avons laissé de côté.

Considérons encore l'équation

$$p_3 - \varphi'(p_1 + \xi_3 p_2) = 0$$

qui admet l'intégrale complète

$$V = a\xi_1 + b\xi_2 + \frac{\varphi(a + b\xi_3)}{b} + c;$$

la fonction Φ correspondante peut s'écrire

$$\Phi = z + ax + \pi(a)y + \frac{\varphi(x + y\pi'(a))}{y} + \chi(a).$$

Les caractéristiques des surfaces S sont des hyperboles ayant une asymptote parallèle à l'axe des z et située dans le plan des xz.

Paris, décembre 1894.