SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \ldots$$

PAR

CARL STÖRMER
à CHRISTIANIA.

1. La formule bien connue

$$(1) \qquad \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \ldots \qquad (|\varphi| < \pi)$$

est susceptible d'une généralisation assez curieuse, que j'ai publiée dans un petit travail paru en norvegien en 1892 (*Summation af nogle trigonometriske rækker*, Christiania Videnskabs-Selskabs Forhandlinger).

Voici le théorème dont il s'agit:

Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont assujettis à l'inégalité

$$|\varphi_1| + |\varphi_2| + \ldots + |\varphi_n| + |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_m| < \pi,$$

on a

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n}{2} = {} & \frac{\sin\varphi_1}{1}\,\frac{\sin\varphi_2}{1}\ldots\frac{\sin\varphi_n}{1}\cos\alpha_1\ \cos\alpha_2\ \ldots\cos\alpha_m \\ & - \frac{\sin 2\varphi_1}{2}\,\frac{\sin 2\varphi_2}{2}\ldots\frac{\sin 2\varphi_n}{2}\cos 2\alpha_1\ \cos 2\alpha_2\ \ldots\cos 2\alpha_m \\ & + \frac{\sin 3\varphi_1}{3}\,\frac{\sin 3\varphi_2}{3}\ldots\frac{\sin 3\varphi_n}{3}\cos 3\alpha_1\ \cos 3\alpha_2\ \ldots\cos 3\alpha_m \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La démonstration est facile et peut se faire de plusieurs manières. La plus simple est peut-être celle qui suit.

Supposons la formule vraie pour n quantités φ et m quantités α. Alors, si l'on a

$$|\varphi_1| + |\varphi_2| + \dots + |\varphi_n| + |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_m| + |\alpha_{m+1}| < \pi,$$

on aura à la fois

$$|\varphi_1 + \alpha_{m+1}| + |\varphi_2| + \dots + |\varphi_n| + |\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| < \pi$$

et

$$|\varphi_1 - \alpha_{m+1}| + |\varphi_2| + \dots + |\varphi_n| + |\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| < \pi.$$

Par conséquent:

$$\frac{(\varphi_1 + \alpha_{m+1})\varphi_2 \dots \varphi_n}{2}$$
$$= \sum_1^\infty (-1)^{\lambda+1} \frac{\sin \lambda(\varphi_1 + \alpha_{m+1})}{\lambda} \frac{\sin \lambda\varphi_2}{\lambda} \dots \frac{\sin \lambda\varphi_n}{\lambda} \cos \lambda\alpha_1 \dots \cos \lambda\alpha_m,$$

$$\frac{(\varphi_1 - \alpha_{m+1})\varphi_2 \dots \varphi_n}{2}$$
$$= \sum_1^\infty (-1)^{\lambda+1} \frac{\sin \lambda(\varphi_1 - \alpha_{m+1})}{\lambda} \frac{\sin \lambda\varphi_2}{\lambda} \dots \frac{\sin \lambda\varphi_n}{\lambda} \cos \lambda\alpha_1 \dots \cos \lambda\alpha_m.$$

En faisant la demi-somme de ces deux formules, on obtient immédiatement

$$(3) \quad \frac{\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_n}{2} = \sum_1^\infty (-1)^{\lambda+1} \frac{\sin \lambda\varphi_1}{\lambda} \frac{\sin \lambda\varphi_2}{\lambda} \dots \frac{\sin \lambda\varphi_n}{\lambda} \cos \lambda\alpha_1 \dots \cos \lambda\alpha_m \cos \lambda\alpha_{m+1},$$

ce qui est notre formule pour les indices n et $m + 1$.

De l'autre côté, en multipliant la formule (3) par $d\alpha_{m+1}$ et en intégrant de zéro à φ_{n+1}, ce qui est permis si l'on a

$$|\varphi_1| + |\varphi_2| + \dots + |\varphi_n| + |\varphi_{n+1}| + |\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| < \pi,$$

on obtient

$$(4) \quad \frac{\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_n\varphi_{n+1}}{2} = \sum (-1)^{\lambda+1} \frac{\sin \lambda\varphi_1}{\lambda} \dots \frac{\sin \lambda\varphi_n}{\lambda} \frac{\sin \lambda\varphi_{n+1}}{\lambda} \cos \lambda\alpha_1 \dots \cos \lambda\alpha_m.$$

C'est la formule (2) pour les indices $n + 1$ et m.

Notre formule (2) découle de cette manière immédiatement de la formule (1).

En faisant dans (2)

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = \alpha,$$

nous aurons la formule curieuse que voici

$$(5) \qquad \frac{\varphi^n}{2} = \left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^n \cos^m\alpha - \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^n \cos^m 2\alpha + \left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^n \cos^m 3\alpha - \ldots$$

qui est vraie pour

$$n|\varphi| + m|\alpha| < \pi.$$

Des formules démontrées, on peut tirer une foule d'autres, plus ou moins intéressantes. Nous citerons quelques-unes des plus simples.

En faisant dans (5) $n = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, il vient:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\cos^m\alpha}{1} - \frac{\cos^m 3\alpha}{3} + \frac{\cos^m 5\alpha}{5} - \ldots$$

et cette formule est vraie pour

$$|\alpha| < \frac{\pi}{2m}.$$

C'est une généralisation de la formule bien connue

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\cos\alpha}{1} - \frac{\cos 3\alpha}{3} + \frac{\cos 5\alpha}{5} - \ldots.$$

Faisant en (2)

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi, \qquad \varphi_{n+1} = \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0,$$

nous aurons l'égalité curieuse

$$\frac{\pi}{4}\varphi^n = \left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^n + \frac{1}{5}\left(\frac{\sin 5\varphi}{5}\right)^n - \ldots$$

qui est vraie pour

$$|\varphi| < \frac{\pi}{2n}.$$

Des résultats intéressants s'obtiennent aussi par dérivation des formules par rapport aux quantités φ et α.

Il y a lieu de remarquer que la formule (2) sous la forme

$$\frac{x}{2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda} \frac{\sin \lambda\varphi_1}{\lambda\varphi_1} \frac{\sin \lambda\varphi_2}{\lambda\varphi_2} \cdots \frac{\sin \lambda\varphi_n}{\lambda\varphi_n} \cos \lambda\alpha_1 \ldots \cos \lambda\alpha_m \sin \lambda x$$

représente un développement de la fonction $\frac{x}{2}$ en série de Fourier, où les coefficients ont *une infinité de valeurs différentes*. Ce résultat est en accord avec une remarque de M. Jordan (*Cours d'analyse*, II, 2me édit. p. 242): en effet, la fonction étant donnée seulement dans l'intervalle

$$|x| < \pi - |\varphi_1| - \ldots - |\varphi_n| - |\alpha_1| - \ldots - |\alpha_m|$$

et *cet intervalle étant moindre que celui de* $-\pi$ *à* $+\pi$, *les coefficients ne sont pas uniques.*

2. Il est évident que les considérations qui précèdent suffisent pour déterminer la valeur de la série au second membre de (2) pour toutes les valeurs réelles de $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, $\alpha_1 \ldots \alpha_m$.

Nous nous bornerons à considérer, à titre d'exemples, les cas les plus simples.

Désignons par $F(\varphi_1, \varphi_2)$ la fonction représentée par la série

$$\frac{\sin \varphi_1}{1} \frac{\sin \varphi_2}{1} - \frac{\sin 2\varphi_1}{2} \frac{\sin 2\varphi_2}{2} + \frac{\sin 3\varphi_1}{3} \frac{\sin 3\varphi_2}{3} - \ldots.$$

C'est une fonction continue de φ_1, φ_2, qui satisfait aux équations suivantes

$$\begin{aligned} F(\varphi_2, \varphi_1) &= F(\varphi_1, \varphi_2), \\ F(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2) &= F(\varphi_1, \varphi_2), \\ F(-\varphi_1, \varphi_2) &= -F(\varphi_1, \varphi_2), \\ F(\pi - \varphi_1, \pi - \varphi_2) &= F(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Il suit de ces équations, qu'il suffit de pouvoir calculer la valeur de la fonction pour des arguments satisfaisant aux conditions

$$0 \leqq \varphi_1 \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi_2 \leqq \pi,$$
$$\varphi_1 + \varphi_2 \leqq \pi.$$

Pour $\varphi_1 + \varphi_2 < \pi$, on a, comme nous avons vu:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_2} F(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)\right] = \frac{1}{2}\varphi_1$$

donc, parce que $F(\varphi_1, 0) = 0$

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2. \tag{a}$$

On voit aisément que cette formule subsiste encore pour $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$.

Si l'on a, au contraire:

$$0 \leqq \varphi_1 \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi_2 \leqq \pi$$

mais

$$\varphi_1 + \varphi_2 \geqq \pi$$

on aura, par suite de la relation

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = F(\pi - \varphi_1, \pi - \varphi_2),$$

$\pi - \varphi_1 + \pi - \varphi_2$ étant $\leqq \pi$,

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}(\pi - \varphi_1)(\pi - \varphi_2). \tag{b}$$

Comme on le voit, les formules (a) et (b) s'accordent pour le cas limite $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$.

Faisant $\varphi_1 = \varphi_2$, on trouve que la série

$$\left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^2 - \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^2 - \ldots$$

est égale à

$$\frac{1}{2}\varphi^2, \quad \text{si} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2},$$

mais égale à

$$\frac{1}{2}(\pi - \varphi)^2, \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \pi.$$

Passons maintenant à

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{\sin\varphi_1}{1}\frac{\sin\varphi_2}{1}\frac{\sin\varphi_3}{1} - \frac{\sin 2\varphi_1}{2}\frac{\sin 2\varphi_2}{2}\frac{\sin 2\varphi_3}{2} + \ldots.$$

Cette fonction est continue pour toutes les valeurs réelles de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, de même que ses dérivées du premier ordre. Elle satisfait aux équations suivantes

$$\begin{aligned} F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) &= F(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2) = F(\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3), \\ F(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2, \varphi_3) &= \quad F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \\ F(-\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) &= -F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \\ F(\pi - \varphi_1, \pi - \varphi_2 . \varphi_3) &= \quad F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3). \end{aligned}$$

Par conséquent, il suffit de savoir la calculer pour des arguments satisfaisant aux conditions suivantes

$$\varphi_1 \geqq \varphi_2 \geqq \varphi_3,$$
$$0 \leqq \varphi_1 \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi_2 \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi_3 \leqq \pi,$$
$$\varphi_1 + \varphi_2 \leqq \pi.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi_3} F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) &= \frac{1}{2}[F(\varphi_1 + \varphi_3, \varphi_2) + F(\varphi_1 - \varphi_3, \varphi_2)] \\ &= \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2, \end{aligned}$$

si $\varphi_3 \leqq \pi - \varphi_1 - \varphi_2$,

$$\begin{aligned} \text{mais } &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\pi - \varphi_1 - \varphi_3)(\pi - \varphi_2) + \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_3)\varphi_2\right] \\ &= \frac{1}{4}\pi(\pi - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) + \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2, \end{aligned}$$

si $\varphi_3 \geqq \pi - \varphi_1 - \varphi_2$.

Intégrant, et remarquant que $F(\varphi_1, \varphi_2, 0) = 0$, on trouve

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2\varphi_3, \quad \text{si} \quad \varphi_3 \leqq \pi - \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\text{mais } = \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2\varphi_3 - \frac{1}{8}\pi(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi)^2,$$

si $\varphi_3 \geqq \pi - \varphi_1 - \varphi_2$.

Dans le cas où $\varphi_1 + \varphi_2 \geqq \pi$, on trouve

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{1}{2}(\pi - \varphi_1)(\pi - \varphi_2)\varphi_3, \quad \text{si} \quad \varphi_3 \leqq \varphi_1 + \varphi_2 - \pi,$$

$$\text{mais} \ = \frac{1}{2}(\pi - \varphi_1)(\pi - \varphi_3)\varphi_3 - \frac{1}{8}\pi(\pi - \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)^2,$$

si $\varphi_3 \geqq \varphi_1 + \varphi_2 - \pi$.

La dernière formule peut être transformée en

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2\varphi_3 - \frac{1}{8}\pi(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi)^2$$

et est démontrée, nous le répétons, pour

$$\varphi_1 \geqq \varphi_2 \geqq \varphi_3,$$

$$0 \leqq \varphi_1 \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi_2 \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi_3 \leqq \pi,$$

$$\varphi_3 \geqq |\varphi_1 + \varphi_2 - \pi|.$$

Si nous faisons dans ces formules

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi,$$

on trouve que la série

$$\left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^3 - \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^3 - \dots$$

représente une fonction impaire, continue avec sa première dérivée pour toutes les valeurs réelles de φ, et qui est égale à

$$\frac{1}{2}\varphi^3, \quad \text{si} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{3},$$

et à

$$\frac{1}{2}\varphi^3 - \frac{1}{8}\pi(3\varphi - \pi)^2 = \frac{1}{8}(4\varphi - \pi)(\varphi - \pi)^2, \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{3} \leqq \varphi \leqq \pi.$$

3. Comme on le voit, les résultats obtenus au moyen de ce mode de calcul, ne sont pas bien faciles à résumer sous une forme concise. Aussi, si on voulait déterminer, dans le cas général, la somme de la série

$$\sum_1^\infty (-1)^{\lambda+1} \frac{\sin\lambda\varphi_1}{\lambda} \frac{\sin\lambda\varphi_2}{\lambda} \dots \frac{\sin\lambda\varphi_n}{\lambda} \cos\lambda\alpha_1 \cos\lambda\alpha_2 \dots \cos\lambda\alpha_m$$

il semble préférable de se servir d'un procédé que j'ai indiqué dans mon travail déjà cité, et qui est basé sur la transformation du produit $\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_n \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_m$ en une somme algébrique de sinus et cosinus des arguments de la forme

$$[\varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \cdots \pm \varphi_n \pm \alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \cdots \pm \alpha_m].$$

De cette manière, tout est réduit à la sommation des séries

$$S_p(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{1^{2p+1}} - \frac{\sin 2\varphi}{2^{2p+1}} + \frac{\sin 3\varphi}{3^{2p+1}} - \cdots,$$

$$C_p(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{1^{2p}} - \frac{\cos 2\varphi}{2^{2p}} + \frac{\cos 3\varphi}{3^{2p}} - \cdots,$$

sommation qui est très facile.

On trouve, en effet, en définissant le symbole $[\varphi]$ par les conditions

$$[\varphi] \equiv \varphi, \text{ mod } 2\pi,$$
$$-\pi < [\varphi] \leqq \pi$$

que les sommes de ces séries seront

$$(-1)^p S_p(\varphi)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{[\varphi]^{2p+1}}{\lfloor 2p+1} - a_1\pi^2\frac{[\varphi]^{2p-1}}{\lfloor 2p-1} + a_2\pi^4\frac{[\varphi]^{2p-3}}{\lfloor 2p-3} - \cdots + (-1)^p a_p \pi^{2p}\frac{[\varphi]}{\lfloor 1},$$

$$C_p(\varphi) = \frac{\partial S_p(\varphi)}{\partial[\varphi]}.$$

Les coefficients a_p peuvent être déterminés par la condition que S_p doit s'annuler pour $[\varphi] = \pi$, ce qui donne:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\lfloor 2p+1} - a_1\frac{1}{\lfloor 2p-1} + a_2\frac{1}{\lfloor 2p-3} - \cdots + (-1)^p a_p = 0.$$

D'ailleurs on trouve, en faisant $[\varphi] = 0$ dans C_p,

$$a_p = \pi^{-2p}\left[1 - \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} - \frac{1}{4^{2p}} + \cdots\right] = B_p\frac{2^{2p-1}-1}{\lfloor 2p},$$

B_p étant les nombres de Bernoulli.

Si l'on prend comme exemple la série

$$\left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^n - \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^n + \left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^n - \ldots,$$

le résultat est très facile à écrire.

Puisqu'on peut écrire

$$\sin^{2p+1}\varphi = A_0^{(p)}\sin\varphi + A_1^{(p)}\sin 3\varphi + \ldots + A_p^{(p)}\sin(2p+1)\varphi,$$

$$\sin^{2p}\varphi = B_0^{(p)} + B_1^{(p)}\cos 2\varphi + B_2^{(p)}\cos 4\varphi + \ldots + B_p^{(p)}\cos 2p\varphi,$$

$A_0^{(p)}\ldots A_p^{(p)}$, $B_0^{(p)}\ldots B_p^{(p)}$ étant des constantes rationnelles faciles à déterminer, on a en effet les formules

$$\left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^{2p} - \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{2p} + \left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^{2p} - \ldots$$
$$= B_0^{(p)}C_p(0) + B_1^{(p)}C_p(2\varphi) + \ldots + B_p^{(p)}C_p(2p\varphi),$$

$$\left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^{2p+1} - \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{2p+1} + \left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^{2p+1} - \ldots$$
$$= A_0^{(p)}S_p(\varphi) + A_1^{(p)}S_p(3\varphi) + \ldots + A_p^{(p)}S_p((2p+1)\varphi)$$

qui mettent en évidence les discontinuités que présentent, la dérivée d'ordre $2p-1$ de

$$\left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^{2p} - \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{2p} + \left(\frac{\sin 3\varphi}{2}\right)^{2p} - \ldots$$

pour

$$\pm\varphi \equiv \begin{array}{llll} \dfrac{\pi}{2p}, & \dfrac{\pi}{2p-2}, & \ldots, & \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{3\pi}{2p}, & \dfrac{3\pi}{2p-2}, & \ldots, & \dfrac{3\pi}{4}, \\ \dfrac{5\pi}{2p}, & \dfrac{5\pi}{2p-2}, & \ldots, & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \dfrac{(2p-1)\pi}{2p}, & & & \end{array} \pmod{2\pi}$$

et la dérivée d'ordre $2p$ de

$$\left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^{2p+1} - \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{2p+1} + \left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^{2p+1} - \cdots$$

pour $\varphi \equiv \pi$, et pour

$$\begin{aligned} \pm\varphi \equiv\ & \frac{\pi}{2p+1}, \frac{\pi}{2p-1}, \ldots, \frac{\pi}{3}, \\ & \frac{3\pi}{2p+1}, \frac{3\pi}{2p-1}, \ldots, \frac{3\pi}{5}, \\ & \frac{5\pi}{2p+1}, \frac{5\pi}{2p-2}, \ldots, \frac{5\pi}{7}, \quad \pmod{2\pi} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \frac{(2p-1)\pi}{2p+1}. \end{aligned}$$

Février 1895.