MÉMOIRE SUR L'ÉLIMINATION

PAR

J. HADAMARD
à BORDEAUX.

1. La méthode des fonctions symétriques apprend à éliminer les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre les équations

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{n+1} = 0$$

en formant le produit $\Pi f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, étendu aux systèmes de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui vérifient les n premières équations (1).

On obtient ainsi pour le résultant $n+1$ expressions différentes en considérant successivement comme la dernière chacune des équations données. Il peut être utile de savoir comparer entre elles ces différentes expressions, ou plutôt leurs numérateurs. Cette comparaison peut même se présenter comme nécessaire dans certaines méthodes d'élimination (voir, par exemple, OTTO BIERMANN, *Über die Bildung der Eliminanten eines Systems algebraischer Gleichungen*[1]).

Comme on arrive à des résultats intéressant différents points de la théorie de l'élimination, nous sommes amenés à reprendre l'ensemble de cette théorie, après quoi nous aurons à présenter certaines applications géométriques.

---

[1] Monatshefte für Mathematik und Physik, 5e année, pag. 17—33; Vienne 1894.

I.

2. Rappelons d'abord ce qui se passe pour le cas d'une seule inconnue. Soient les deux équations $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, ou, en rendant homogéne,

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \qquad f_2(x_1, x_2) = 0 \tag{1'}$$

de degrés m_1, m_2 respectivement. Le résultant de ces deux équations, que nous désignerons par R_{12} est le produit

$$\Pi f_2(x_1, x_2)$$

où les x_1, x_2 sont définis par l'égalité (identique par rapport aux u)

$$\Pi(u_1 x_1 + u_2 x_2) = f_1(u_2, -u_1). \tag{2}$$

Cette expression R_{12} est liée à l'expression analogue R_{21} par la relation

$$R_{12} = (-1)^{m_1 m_2} R_{21}.$$

3. Les fonctions $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ étant représentées symboliquement par $a_x^{m_1}$, $b_x^{m_2}$, la quantité invariante R_{12} s'exprimera par une combinaison de déterminants symboliques.

Prenons d'abord f_2 seul sous forme symbolique, f_1 étant donné par l'égalité (2). Il faudra remplacer R_{12} par la quantité

$$\frac{1}{\underline{|m_1}} \Sigma (b_1^{(1)} x_1^{(1)} + b_2^{(1)} x_2^{(1)})^{m_2} (b_1^{(2)} x_1^{(2)} + b_2^{(2)} x_2^{(2)})^{m_2} \ldots (b_1^{(m_1)} x_1^{(m_1)} + b_2^{(m_1)} x_2^{(m_1)})^{m_2}$$

où la sommation est étendue aux $\underline{|m_1}$ permutations des m_1 couples $(b_1^{(1)}, b_2^{(1)})$, $(b_1^{(2)}, b_2^{(2)})$, ... Le problème de l'expression symbolique du résultant est donc identique au suivant: *La forme*

$$f_1(u_2, -u_1) = (u_1 x_1^{(1)} + u_2 x_2^{(1)}) \ldots (u_1 x_1^{(m_1)} + u_2 x_2^{(m_1)})$$

étant représentée symboliquement par $(au)^{m_1}$ *(ou encore par* $u_a^{m_1}$*, en posant*

$a_1 = \alpha_2$, $a_2 = -\alpha_1$), *trouver sous forme symbolique la somme des puissances* $m_2^{\text{èmes}}$ *des* $\underline{|m_1}$ *produits tels que*

$$\varpi = (u_1^{(1)}x_1^{(1)} + u_2^{(1)}x_2^{(1)})(u_1^{(2)}x_1^{(2)} + u_2^{(2)}x_2^{(2)}) \ldots (u_1^{(m_1)}x_1^{(m_1)} + u_2^{(m_1)}x_2^{(m_1)}).$$

Les deux expressions $\Sigma\varpi^{m_2}$ et R_{12} sont effectivement équivalentes moyennant le remplacement des u par les b.

4. Le produit ϖ est racine d'une équation de degré $\underline{|m_1}$ dont les coefficients sont des contrevariants de f_1; le dernier terme de cette équation est du reste immédiatement connu. Il est évidemment

$$[f_1(u_2^{(1)}, -u_1^{(1)})f_1(u_2^{(2)}, -u_1^{(2)}) \ldots f_1(u_2^{(m_1)}, -u_1^{(m_1)})]^{\underline{|(m_1-1)}}.$$

Il suffira donc d'avoir formé les $\underline{|m_1} - 1$ premières sommes de puissances pour pouvoir calculer toutes les autres.

Le nombre $\underline{|m_1} - 1$ augmentant rapidement avec m_1, cette remarque n'a pas d'application à partir de $m_1 = 4$. Mais c'est elle que l'on emploie dans le cas de $m_1 = 2$, et elle conduit directement au calcul de R_{12} pour $m_1 = 3$. M. GORDAN a en effet[1] formé les résultants de l'équation du 3ᵉ degré avec les équations de degré inférieur à 6. Or ceci suffit, d'après ce qui vient d'être dit, pour passer au cas de m_2 quelconque.

En désignant par $\frac{S_1}{6}, \frac{S_2}{6}, \ldots, \frac{S_5}{6}$ les expressions de R_{12} pour les cinq premiers degrés, on devra[2] en déduire les quantités

$$A_1 = -S_1, \qquad A_2 = \frac{1}{2}S_1^2 - \frac{1}{2}S_2, \qquad A_3 = -\frac{S_1^3}{6} + \frac{S_1S_2}{2} - \frac{S_3}{3},$$

$$A_4 = \frac{S_1^4}{24} - \frac{S_1^2S_2}{4} + \frac{S_1S_3}{3} + \frac{S_2^2}{8} - \frac{S_4}{4},$$

$$A_5 = -\frac{S_1^5}{120} + \frac{S_1^3S_2}{12} - \frac{S_1S_2^2}{8} - \frac{S_1^2S_3}{6} + \frac{S_2S_3}{6} + \frac{S_1S_4}{4} - \frac{S_5}{5},$$

$$A_6 = (ab)^3(a'b')^3(a''b'')^3(a'''b''')^3(ab)^3(a^{\text{IV}}b')^3(a^{\text{V}}b'')^3,$$

[1] Math. Annalen, t. 3, pag. 355 et suiv.

[2] Voir SERRET, *Algèbre supérieure*, t. 1, pag. 460.

et le résultant de la forme cubique avec une autre de degré quelconque m_2 sera[1]

$$\frac{1}{6}\sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_6} m_2 \underline{|(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_6-1)}}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_6}} A_1^{\lambda_1} A_2^{\lambda_2}\dots A_6^{\lambda_6},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ désignant successivement les différents systèmes d'exposants entiers et positifs qui vérifient la condition

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + 6\lambda_6 = m_2;$$

il faut seulement observer que, dans les multiplications, les a doivent être remplacés chaque fois par des symboles synonymes, mais non les b.

5. La résolution du problème du n° 3 permettrait de résoudre sous sa forme générale le problème de l'expression des fonctions symétriques, tel qu'il se pose dans la théorie des formes. En effet, de l'expression $\Sigma\varpi^{m_2}$ peut se déduire par formation polaire l'expression plus générale

$$P = \sum (u_1^{(1)}x_1^{(1)} + u_2^{(1)}x_2^{(1)})(u_1^{(2)}x_1^{(1)} + u_2^{(2)}x_2^{(1)})\dots = \sum\prod \gamma_k^i$$

où chaque couple $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$ $(k = 1, 2, \dots, m_1)$ figure dans m_2 facteurs, les couples des u correspondants étant ou non différents. La sommation est étendue aux $\underline{|m_1}$ permutations des x et l'on a posé

$$(3) \qquad \gamma_k^i = u_1^{(i)}x_1^{(k)} + u_2^{(i)}x_2^{(k)}.$$

Or cette expression est la fonction symétrique la plus générale dans les termes de laquelle n'entrent que des facteurs contrevariants. Les facteurs covariants se ramènent d'ailleurs aux précédents par la substitution $u_1 = y_2$, $u_2 = -y_1$ et les facteurs invariants par l'identité

$$(4) \qquad x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_2^{(1)}x_1^{(2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u_1^{(1)}} & \dfrac{\partial}{\partial u_2^{(1)}} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1^{(2)}} & \dfrac{\partial}{\partial u_2^{(2)}} \end{vmatrix} \gamma_1^1\gamma_2^2.$$

6. Le calcul d'une expression P conduit à une quantité du même degré total $m_1 m_2$ par rapport aux lettres u et aux lettres a, et qui par

[1] Serret, ibid., pag. 449

suite peut s'écrire à l'aide de facteurs du seul type (au) (ou u_a); car si un terme quelconque renferme des facteurs (uu') il renferme un même nombre de facteurs $(\alpha\alpha')$ que l'on peut accoupler aux premiers pour utiliser l'identité

$$(\alpha\alpha')(uu') = u_\alpha u'_{\alpha'} - u_{\alpha'} u'_\alpha. \tag{5}$$

Ce résultat peut d'ailleurs être atteint de plusieurs façons différentes, d'où, pour la quantité cherchée, plusieurs formes symboliques équivalentes. Néanmoins certaines de ces formes devront être considérées de préférence aux autres.

Remarquons en effet qu'une expression symbolique où n'entrent que des facteurs u_α peut immédiatement s'exprimer en fonction des x par la relation

$$u_\alpha^{(1)} u_\alpha^{(2)} \ldots u_\alpha^{(m_1)} = \frac{1}{|\underline{m_1}} \Sigma \gamma_1^1 \gamma_2^2 \ldots \gamma_{m_1}^{m_1} \tag{6}$$

où dans le second membre les indices inférieurs subissent toutes les permutations possibles.

L'expression symbolique devra être telle que cette opération conduise à une quantité P_1 identique à P. Mais deux cas peuvent se présenter. Ou bien l'égalité $P_1 = P$ est une identité *par rapport aux* γ; ou bien elle ne devient telle qu'en remplaçant ces γ par leurs valeurs (3). Dans le premier cas nous dirons, pour abréger, que la relation $P_1 = P$ est essentiellement identique. Nous allons faire voir dans un instant que pour toute quantité P existe une forme symbolique satisfaisant à cette condition, autrement dit une forme symbolique essentiellement équivalente.

7. L'avantage des formes symboliques essentiellement équivalentes est de se conserver lorsqu'on passe à un nombre de variables supérieur à deux.

Soit

$$u_\alpha^m = \prod_{k=1}^{m} \gamma_k \tag{7}$$

où γ_k a cette fois la valeur

$$\gamma_k = u_1 x_1^{(k)} + \ldots + u_h x_h^{(k)}$$

une forme, décomposable en facteurs linéaires, à h variables, h étant un nombre que nous pourrons faire varier à volonté. Formons dans ces nouvelles conditions la quantité

$$P = \Sigma \Pi \gamma_k^i.$$

Cette quantité peut s'exprimer sous une forme symbolique qui, étant du même degré par rapport aux u et aux α, peut être ramenée comme précédemment à ne contenir que des facteurs u_α. Comme de cette forme symbolique on revient à la forme primitive en employant précisément la même relation (6) que dans le cas de $h = 2$, une forme symbolique *essentiellement équivalente* trouvée dans ce dernier cas conviendra également à notre problème actuel.

Inversement, si une forme symbolique de l'expression P convient pour h suffisamment grand, elle est essentiellement équivalente.

Ceci revient à dire que l'on peut prendre h assez grand pour que les γ_k^i soient tous indépendants. Or, dans l'hypothèse contraire, comme toute relation existant entre ces quantités pour une certaine valeur de h reste évidemment vraie pour les valeurs moindres, il existerait pour le nombre h une certaine valeur à partir de laquelle le système E des équations qui lient les γ entre eux ne changerait plus jusqu'à $h = \infty$. Ce système devrait être tel que, vérifié pour certaines valeurs $\gamma_k'^i$ des γ et pour d'autres valeurs $\gamma_k''^i$, il soit par cela même vérifié pour les valeurs $\gamma_k'^i + \gamma_k''^i$ (cette addition revenant au doublement du nombre h). De pareilles équations ne peuvent être que linéaires, ce qui est manifestement impossible dans l'espèce.

En particulier, ceci nous permet d'affirmer l'existence d'une expression symbolique essentiellement équivalente pour toute expression P.

8. La formation générale de l'expression P permettrait d'obtenir, pour un nombre quelconque h de variables, les fonctions symétriques invariantes des systèmes $x_1^{(k)}, \ldots, x_h^{(k)}$ qui figurent dans une forme du type (7).

En effet, de telles fonctions peuvent s'exprimer à l'aide de facteurs symboliques du type γ_k^i et de facteurs déterminants: ces derniers se ramènent aux premiers à l'aide d'une formule analogue à la formule (4).

9. Si nous appliquons spécialement au résultant de deux formes binaires $(au)^m = u_\alpha^m$ et $(bu)^n = u_\beta^n$, nous pouvons nous demander s'il existe pour ce résultant une forme symbolique qui, lorsqu'on remplace, soit les lettres b, soit les lettres a par des u, soit dans les deux cas essentiellement équivalente.

Pour résoudre cette question, nous considérerons les deux formes

$$F = u_a^m, \qquad \Phi = b_x^n$$

à un nombre quelconque h de variables (les variables tangentielles u pour l'une, les variables ponctuelles x pour l'autre).

Si la première forme est décomposable en facteurs linéaires

$$F = \prod_{i=1}^{m} (u_1 \xi_1^{(i)} + u_2 \xi_2^{(i)} + \dots + u_h \xi_h^{(i)}), \tag{8}$$

le produit des résultats de substitution des systèmes des ξ dans la deuxième forme s'exprime par un invariant commun à F et Φ. Soit A l'expression ainsi obtenue, qui n'est pas complètement déterminée en ce sens qu'on peut lui ajouter une quelconque des expressions G qui s'annulent lorsque F est un produit de facteurs linéaires.

Si de même Φ se décompose en facteurs du premier degré

$$\Phi = \prod_{k=1}^{n} (g_1^{(k)} x_1 + \dots + g_h^{(k)} x_h), \tag{9}$$

le produit des résultats de substitution des différents systèmes de x dans F sera un invariant commun B, déterminé seulement aux expressions D près qui s'annulent lorsque Φ admet une telle réduction.

Je dis que l'on peut disposer des quantités additionnelles C et D de manière à rendre les invariants A et B identiques.

Pour cela, remarquons que lorsque F et Φ sont tous deux décomposables en facteurs linéaires, on a nécessairement $A = B$, ces deux expressions représentant toutes deux le produit

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} (\xi_1^{(i)} g_1^{(i)} + \dots + \xi_h^{(i)} g_h^{(k)}).$$

Il ressort de là presque évidemment que la différence B peut s'exprimer par la somme d'une expression C et d'une expression D: c'est là un fait général dont un cas particulier est fourni par le théorème de NÖTHER sur les courbes planes passant par l'intersection de deux courbes données. Ici cette conclusion peut s'établir directement de la façon suivante.

Supposons F réductible et représenté par le produit (8). La différence $A-B$, qui est un polynôme homogène et symétrique par rapport aux ξ, est par suite une somme de termes de la forme PQ, où P est une fonction symétrique élémentaire des ξ et Q une fonction des coefficients de Φ. Cette dernière est nécessairement une expression D, puisque la somme ΣPQ est nulle, quels que soient les ξ, lorsque F et Φ ont respectivement les formes (8), (9). Si donc nous remplaçons les fonctions symétriques P par leurs valeurs en fonction des coefficients de F, nous aurons une expression D, identiquement égale à la différence $A-B$ chaque fois que F est réductible et qui par suite n'en différera, pour F quelconque, que d'une expression C, ce que nous voulions établir.

Dans l'identité

$$A-B=C+D,$$

les polynômes C et D ne sont pas, il est vrai, nécessairement des invariants. Mais ils le deviennent par l'application de la méthode ordinaire (substitution linéaire la plus générale et application répétée de l'opération désignée dans la théorie des formes par la lettre Ω).

Dès lors, si h a été pris suffisamment grand, la quantité

$$A-C\equiv B+D$$

fournit, en y réduisant le nombre des variables à deux, une expression jouissant de la propriété cherchée (les formes binaires données étant u_a^m, b_x^n).

10. Soient maintenant

$$(\mathrm{E}) \qquad \begin{cases} (1) & f_1=0, \\ (2) & f_2=0, \\ (3) & f_3=0, \end{cases}$$

trois équations de degrés m_1, m_2, m_3 aux inconnues x, y. Les termes de plus haut degré des polynômes f_1, f_2, f_3 nous donnent trois formes binaires f_1^0, f_2^0, f_3^0, dont nous formerons les résultants. Nous désignerons par $R_{\alpha\beta}^0$ le résultant de f_α^0, f_β^0, et, tout d'abord, nous supposerons ces résultants différents de o. Désignons par $x^{(i)}, y^{(i)}$ les solutions communes aux équations E_1, E_2 et considérons le produit

$$P_3 = \prod_i f_3(x^{(i)}, y^{(i)}).$$

Ce produit s'exprime rationnellement à l'aide des coefficients des équations E, mais dans son expression figure un dénominateur lequel n'est autre que $R_{12}^{0m_3}$. En effet, dans l'équation finale résultant de l'élimination de y entre E_1 et E_2, le coefficient de $x^{m_1m_2}$ est R_{12}^0; il en est de même de l'équation en $x + \lambda y$, à cause des propriétés invariantes de R_{12}^0. L'expression P_3, qui est de degré m_3 par rapport aux x, y ne peut donc renfermer d'autre dénominateur que ce coefficient élevé à la puissance m_3. Nous poserons

$$R_{123} = P_3 . R_{12}^{0m_3}. \tag{10}$$

En partant des équations E_2, E_3, nous formerons les expressions analogues P_1 et $R_{231} = P_1 . R_{23}^{0m_1}$. Nous nous proposons de rechercher la relation entre P_1 et P_3 (ou entre R_{231} et R_{123}).

11. Considérons à cet effet le produit Π_1 analogue à P_1, mais où f_3 est remplacé par $f_3 - \lambda$. Ce produit s'exprime par un polynôme en λ qui, égalé à o, exprime que $\lambda = f_3(x^{(i)}, y^{(i)})$. Le produit des racines de l'équation $\Pi_1 = 0$ (considérée comme équation en λ) est donc P_3; le terme indépendant de λ est P_1. Le rapport $\frac{P_1}{P_3}$ est par suite égal au coefficient de $\lambda^{m_1m_2}$ dans Π_1, multiplié par $(-1)^{m_1m_2}$.

Or, si nous effectuons la transformation

$$x = \frac{1}{x'}, \qquad y = \frac{y'}{x'}$$

qui, aux équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 - \lambda = 0$, substitue les équations

$$(E') \qquad \begin{cases} (1) \quad F_1 \equiv x'^{m_1} f_1\left(\frac{1}{x'}, \frac{y'}{x'}\right) = 0, \\ (2) \quad F_2 \equiv x'^{m_2} f_2\left(\frac{1}{x'}, \frac{y'}{x'}\right) = 0, \\ (3) \quad F_3 \equiv x'^{m_3}\left[f_3\left(\frac{1}{x'}, \frac{y'}{x'}\right) - \lambda\right] = 0 \end{cases}$$

le produit Π_1 sera remplacé par le produit

$$\Pi_1' = \Pi_1 \cdot (\Pi x')^{m_1} = \frac{\Pi_1}{(\Pi x)^{m_1}},$$

la multiplication étant étendue aux solutions communes aux deux dernières équations (E').

Pour $\lambda = \infty$, le produit Π_1' prend une valeur finie et déterminée, car l'équation E_3' se réduit à $x'^{m_3} = 0$, de sorte que Π_1' devient égal à $\left(\frac{R_{21}^0}{b^{m_1}}\right)^{m_3}$, en désignant par b le coefficient de y^{m_2} dans f_2. Nous aurons donc à multiplier cette quantité par la puissance $m_1^{\text{ème}}$ du coefficient de λ^{m_2} dans $\Pi(x)$. Ce dernier s'obtient en formant par l'élimination de y entre $f_2 = 0$ et $f_3 - \lambda = 0$ l'équation en x. Pratiquant cette élimination par la méthode des fonctions symétriques en partant de l'équation $f_2 = 0$, nous voyons que le coefficient de $x^{m_2 m_3}$ est $\frac{R_{23}^0}{b^{m_3}}$ et le terme indépendant de x un polynôme de degré m_2 en λ avec $(-1)^{m_2}$ pour premier coefficient, de sorte que le coefficient de λ^{m_2} dans $\Pi(x)$ a la valeur $\frac{b^{m_3}}{R_{23}^0}(-1)^{m_2(1+m_3)}$, ce qui donne

$$(11) \qquad \frac{P_1}{P_3} = \frac{R_{21}^{0^{m_3}}}{R_{23}^{0^{m_1}}}(-1)^{m_1 m_2 m_3}$$

ou

$$(12) \qquad R_{231} = (-1)^{m_1 m_2 m_3} R_{213} = R_{123}.$$

Si nous remarquons que la substitution $\binom{123}{231}$ est alternée, tandis que la substitution $\binom{231}{213}$ ne l'est pas, nous voyons que notre résultat donne l'énoncé suivant: *L'expression* (10) *ne change pas par une substitution alternée des indices* 1 , 2 , 3, *au lieu qu'une substitution non alternée la multiplie par* $(-1)^{m_1 m_2 m_3}$.

C'est à cette expression entière R_{123}, indépendante au signe près, comme on le voit, de l'ordre dans lequel on prend les équations, qu'il convient de donner le nom de *résultant* des polynômes f_1, f_2, f_3.

12. Si nous voulons étudier la même question au point de vue projectif, il faudra considérer les trois équations

$$(E) \qquad \begin{cases} (1) & f_1 = 0, \\ (2) & f_2 = 0, \\ (3) & f_3 = 0 \end{cases}$$

comme homogènes et de degrés respectifs m_1, m_2, m_3 par rapport aux variables x_1, x_2, x_3 qui correspondent à x, y par les relations $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$.

Pour voir ce qui remplacera le résultant $R^0_{\alpha\beta}$, considérons le résultant des deux formes binaires $a_x^{m_\alpha}$, $b_x^{m_\beta}$, lequel s'exprime par des facteurs déterminants symboliques binaires, et appliquons-lui le principe de translation, c'est à dire changeons chaque facteur déterminant binaire en un déterminant ternaire par l'addition d'une lettre u. Nous obtenons ainsi un contrevariant commun des formes f_α, f_β, que nous nommerons $R^u_{\alpha\beta}$. Ce contrevariant se réduit à $R^0_{\alpha\beta}$ pour $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = 1$. Il peut d'ailleurs se définir sans que l'on connaisse la forme symbolique du résultant. Il suffit d'appliquer aux deux formes données une substitution linéaire où la nouvelle variable correspondant à x_3 soit $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$, de former sur les nouvelles formes le résultant $R^0_{\alpha\beta}$ et de diviser par la puissance $m_\alpha m_\beta$ du déterminant de la substitution.

Egalée à 0, la fonction R^u_{12} exprime que la droite $u_x = 0$ passe par un point $(f_1 = 0, f_2 = 0)$. Elle est identiquement nulle si ces deux courbes ont une partie commune. Sinon, $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}$ désignant les coordonnées de leurs points communs, on a

$$R^u_{12} = \mu \prod_i (u_1 x_1^{(i)} + u_2 x_2^{(i)} + u_3 x_3^{(i)}),$$

chaque facteur étant élevé à une puissance convenable, qui n'est autre que le degré de multiplicité du point correspondant; et μ étant un facteur constant. Autrement dit, le rapport

$$(13) \qquad \mu = \frac{R^u_{12}}{\prod_i (u_1 x_1^{(i)} + u_2 x_2^{(i)} + u_3 x_3^{(i)})}$$

est indépendant des u. Mais ce rapport dépend des déterminations adoptées pour les x (lesquels ne sont définis qu'à un facteur de proportionnalité près). Pour $x_3^{(1)} = x_3^{(2)} = \ldots = 1$, on a

$$\mu = R_{12}^0,$$

comme on le voit en faisant $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = 1$. Dès lors R_{123} peut être défini: le produit $\prod_i f_3(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$ multiplié par la puissance m_3 ème de la quantité (13), soit

$$(14) \qquad R_{123} = \prod_i f_3(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) \left[\frac{R_{12}^u}{\prod_i (u_1 x_1^{(i)} + u_2 x_2^{(i)} + u_3 x_3^{(i)})} \right]^{m_3}$$

où le second membre est cette fois indépendant des u d'une part, des facteurs de proportionnalité qui figurent dans les x, de l'autre. En prenant le cas de $\mu = 1$, on voit que *le résultant est donné par le produit* $\prod_i f_3(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$, où les x sont définis par l'égalité (identique par rapport aux u)

$$\prod_i (u_1 x_1^{(i)} + u_2 x_2^{(i)} + u_3 x_3^{(i)}) = R_{12}^u.$$

13. Le résultant considéré sous forme symbolique est donc une expression de la forme P considérée au n° 7. En particulier on saurait calculer cette expression symbolique si l'on savait résoudre le problème posé au n° 6: *trouver pour le résultant de deux formes binaires une expression essentiellement équivalente.* Ceci permettrait en effet d'abord de calculer la forme R_{12}^u, puis de passer au résultant R_{123} par la considération du résultant de deux formes, l'une de degré $m_1 m_2$, l'autre le degré m_3.

14. *L'équation $R_{123} = 0$ exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les équations* E *aient une solution commune* (autre que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$). Si en effet R_{12}^u n'est pas identiquement nul, l'équation de définition (14) montre que les conditions $R_{123} = 0$, $\prod_i f_3(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) = 0$ sont équivalentes. Dans le cas contraire, le résultant, que l'on peut regarder comme composé à l'aide des coefficients de R_{12}^u et de f_3, se réduit à 0, et d'autre part, il est manifeste que les équations E ont une solution, puisque les deux courbes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ ont une partie commune, laquelle coupe $f_3 = 0$ en un certain nombre de points.

15. Le résultant fourni par la méthode dialytique, telle qu'elle est indiquée par Cayley,[1] coïncide, au signe près, avec le résultant R_{123}. C'est ce que l'on voit en constatant: 1° que l'expression R de Cayley est de degré $m_2 m_3$ par rapport aux coefficients de f_1, d'où résulte que le rapport $\frac{R}{R_{123}}$ est indépendant de f_1, et pareillement de f_2, f_3; 2° que les deux expressions R, R_{123} se réduisent toutes deux à 1 pour $f_1 = x_1^{m_1}$, $f_2 = x_2^{m_2}$, $f_3 = x_3^{m_3}$.

16. Les conclusions auxquelles nous venons de parvenir s'étendent d'elles-mêmes au cas d'un nombre quelconque n d'inconnues. On peut, à cet égard, répéter identiquement les raisonnements précédents; cette fois, nous les présenterons sous une forme plus simple à certains égards en partant directement des équations rendues homogènes.

Soient $n+1$ polynômes $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ de degrés $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$ respectivement par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Nous allons définir le résultant $R_{1,2,\ldots,n+1}$ de ces polynômes et démontrer que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant une permutation quelconque des indices $1, 2, \ldots, n+1$, on a

$$R_{\alpha\beta\gamma\ldots} = R_{1,2,\ldots,n+1}(-1)^{s m_1 m_2 \ldots m_{n+1}}, \tag{15}$$

où s est égal à 0 ou à 1 suivant que la substitution $\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, n+1 \\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots \end{pmatrix}$ est ou non alternée.

Supposons pour cela que l'on ait défini le résultant de n équations homogènes à n inconnues. Ce sera un polynôme entier par rapport aux coefficients des différentes équations et dont le degré par rapport aux coefficients de chacune sera marqué par le produit des ordres de toutes les autres. Ce sera un invariant commun à tous les premiers membres. Egalé à zéro, il exprimera la condition nécessaire et suffisante pour que les équations aient une solution commune (non nulle). Enfin il ne changera pas si l'on change l'ordre des équations données, sauf dans le cas ou ces équations sont toutes d'ordre impair et la permutation effectuée non alternée, auquel cas il changera simplement de signe.

---

[1] *Cambridge and Dublin Mathematical Papers*, t. 3.

Revenant alors aux équations

$$
\text{(E)} \qquad \left\{\begin{array}{ll}
(1) & f_1 = 0, \\
(2) & f_2 = 0, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
(n+1) & f_{n+1} = 0,
\end{array}\right.
$$

nous considérons d'abord les n premières d'entre elles. En y faisant $x_{n+1} = 0$, nous aurons n équations à n inconnues dont nous pourrons former le résultant $R^0_{1,2,\ldots,n}$. De cette expression, nous déduirons, comme il a été expliqué plus haut, la forme $R^u_{1,2,\ldots,n}$. Egalée à zéro, cette forme exprime que l'équation linéaire $u_1 x_1 + \ldots + u_{n+1} x_{n+1} = 0$ est vérifiée par une solution commune $x^{(i)}_1, x^{(i)}_2, \ldots, x^{(i)}_{n+1}$ des n premières équations E. Elle peut être identiquement nulle: ceci arrivera alors et alors seulement, que les surfaces représentées par ces n équations auront en commun, non pas seulement un certain nombre de points, mais une multiplicité algébrique à au moins une dimension. Sinon, elle sera un produit de facteurs

$$R^u_{1,2,\ldots,n} = \mu \prod_i (u_1 x^{(i)}_1 + \ldots + u_{n+1} x^{(i)}_{n+1}),$$

chaque facteur sous le signe Π étant compté un nombre de fois égal au degré de multiplicité de la solution commune correspondante, et μ étant un nombre indépendant des u, mais dépendant du facteur de proportionnalité qui figure dans les x_i.

Le degré de la forme R^u par rapport aux u étant $m_1 m_2 \ldots m_n$, il est par cela même démontré que ce nombre est celui des solutions communes aux équations $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Cela posé, formons le produit

$$
(16) \qquad R_{1,2,\ldots,n+1} = \left(\frac{R^u_{1,2,\ldots,n}}{\prod_i (u_1 x^{(i)}_1 + \ldots + u_{n+1} x^{(i)}_{n+1})} \right)^{m_{n+1}} P_{n+1},
$$

$$P_{n+1} = \prod_i f_{n+1}(x^{(i)}_1, \ldots, x^{(i)}_{n+1}).$$

Ce produit est indépendant des u, ainsi que des déterminations choisies pour les $x^{(i)}$. On peut en particulier choisir ceux-ci de manière que $\mu = 1$ et définir notre quantité comme le produit

$$R_{1,2,\ldots,n+1} = \prod_i f_{n+1}(x^{(i)}_1, \ldots, x^{(i)}_{n+1}),$$

les quantités x étant définies par l'identité

$$\prod_i (u_1 x_1^{(i)} + \ldots + u_{n+1} x_{n+1}^{(i)}) = R^u_{1,2,\ldots,n}.$$

L'expression $R^u_{1,2,\ldots,n+1}$ est donc une fonction entière des coefficients de $R^u_{1,2,\ldots,n}$ et des coefficients de f_{n+1}, de degré m_{n+1} par rapport aux premiers, de degré $m_1 m_2 \ldots m_n$ par rapport aux seconds; par suite une fonction entière des coefficients des équations E, et dont le degré par rapport aux coefficients de chaque équation est marqué par le produit des ordres des autres. C'est un invariant commun aux polynômes $f_1, \ldots, f_{n+1}$, car dans l'expression (16) tous les facteurs sont invariants. Son expression symbolique comprend $m_1 m_2 \ldots m_{n+1}$ facteurs déterminants symboliques. On saurait d'ailleurs former cette expression symbolique si l'on savait trouver pour le résultant de deux formes binaires une expression essentiellement équivalente.

17. $R_{1,2,\ldots,n+1} = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les équations E aient une solution commune non nulle. C'est ce qui résulte immédiatement de la formule (16) si $R^u_{1,2,\ldots,n}$ n'est pas identiquement nul. Si au contraire on a $R^u_{1,2,\ldots,n} \equiv 0$, on aura aussi $R_{1,2,\ldots,n+1} = 0$, puisque $R_{1,2,\ldots,n+1}$ est une fonction homogène des coefficients de $R^u_{1,2,\ldots,n}$. D'ailleurs les équations E auront une solution commune, car les n premières d'entre elles définissent une multiplicité algébrique à au moins une dimension, laquelle coupe nécessairement la surface $f_{n+1} = 0$.

Il est donc légitime de nommer *résultant* cette expression $R_{1,2,\ldots,n+1}$.

18. Soient maintenant $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta, \theta$ les indices $1, 2, 3, \ldots, n+1$ rangés dans un ordre différent et formons l'expression, analogue à $R_{1,2,3,\ldots,n+1}$

$$R_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\eta,\theta} = \left[\frac{R^u_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\eta}}{\prod_k (u_1 x_1^{(k)} + \ldots + u_{n+1} x_{n+1}^{(k)})}\right]^{m_\theta} P_\theta, \tag{16'}$$

$$P_\theta = \prod_k f_\theta(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n+1}^{(k)}).$$

Le rapport $\dfrac{R_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta}}{R_{1,2,3,\ldots,n+1}}$ est indépendant des coefficients de l'une quelconque, f_1 par exemple, des équations E. En général, en effet, les équations $E_2, E_3, \ldots, E_{n+1}$ ont leurs $m_2 m_3 \ldots m_{n+1}$ solutions communes distinctes (puisqu'en y faisant $x_{n+1} = 1$, de manière à les prendre sous forme non homogène, 1° il n'y aura pas, en général, de solutions commune infinie, le résultant que nous avons appelé $R^0_{2,3,\ldots,n+1}$ n'étant pas identiquement nul; 2° le résultant des équations $E_2, E_3, \ldots, E_{n+1}$ et de leur déterminant fonctionnel, qui est une fonction entière des coefficients de ces équations, n'est pas identiquement nul, ainsi qu'on le voit en prenant pour ces équations des produits de facteurs linéaires quelconques). Considérées comme équations entre les coefficients de f_1, les équations $R_{\alpha,\beta,\ldots,\theta} = 0$, $R_{1,2,\ldots,n+1} = 0$ représentent donc la même multiplicité algébrique, en général sans partie multiple; elles coïncident donc bien à un facteur près indépendant de f_1. Cette conclusion, établie dans le cas où les n dernières équations E ont leurs solutions communes distinctes, subsiste par cela même d'une façon absolument générale.

On peut dès lors, dans l'évaluation du rapport $\frac{R_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta}}{R_{1,2,\ldots,n+1}}$, supposer les polynômes $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ remplacés respectivement par les puissances $m_1{}^{\text{ème}}, m_2{}^{\text{ème}}, \ldots, m_{n+1}{}^{\text{ème}}$ d'autant de polynômes du premier degré.

D'autre part, le résultant $R_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta}$ des formes $f_1^p, f_2, \ldots, f_{n+1}$ est la puissance $p^{\text{ème}}$ du résultant $R_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta}$ relatif aux formes $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$. Cela est évident si $\theta = 1$. Dans le cas contraire, on voit immédiatement d'après la formule (16') qu'il suffit d'établir la propriété en question pour la quantité $R^u_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\eta}$. Or celle-ci, se déduisant du résultant de n équations homogènes à n inconnues ne change pas par une substitution alternée, substitution par laquelle nous pouvons rendre η égal à 1.

Dès lors le rapport $\frac{R_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta}}{R_{1,2,3,\ldots,n+1}}$ est la puissance $m_1 m_2 \ldots m_{n+1}{}^{\text{ème}}$ de ce qu'il serait si les polynômes donnés étaient du premier degré. Mais, dans ce cas, le résultant, qui se réduit au déterminant des $(n+1)^2$ coefficients, est une fonction alternée par rapport aux indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta$. Nous pouvons donc écrire

$$R_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta} = (-1)^{s m_1 m_2 \ldots m_{n+1}} R_{1,2,3,\ldots,n+1} \tag{17}$$

et nous aurons ainsi démontré toutes les propriétés énoncées.

19. Les formules (16) et (17) permettent de comparer entre eux les produits $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$. Que devient cette comparaison lorsque

nos équations ont des solutions communes? Prenons, pour simplifier, le cas de trois équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ représentant trois courbes qui ont un certain nombre de points communs A. Sur un cycle de f_1 ayant pour origine un de ces points, f_2 sera de l'ordre l et f_3 de l'ordre l', de sorte que le nombre des intersections B de f_1, f_2 non communes avec f_3 sera $m_1 m_1 - \Sigma l$ et le nombre des intersections C de f_1 et de f_3, non communes avec f_2, $m_1 m_3 - \Sigma l'$. Proposons-nous de comparer le produit des valeurs de f_3 aux points B avec le produit des valeurs de f_2 aux points C.

Remplaçons, dans ce but, f_3 par $f_3 + \lambda\varphi_3$ (φ_3 étant un polynôme quelconque de degré m_3); nous voyons que le produit des valeurs de f_3 aux points B, multiplié par le produit des valeurs de φ_3 aux points A, égale le coefficient de $\lambda^{\Sigma l}$ dans le produit P_3 relatif aux polynômes $f_1, f_2, f_3 + \lambda\varphi_3$, lequel produit est égal, aux facteurs près dont nous avons donné l'expression plus haut, au produit des valeurs de f_2 aux points $f_1 = 0$, $f_3 + \lambda\varphi_3 = 0$. Ces derniers peuvent se diviser en deux catégories: $m_1 m_3 - \Sigma l'$ qui, pour λ infiniment petit, tendent vers les points C et $\Sigma l'$ qui tendent vers les points A.

Sur chaque cycle de f_1 ayant pour origine un point A,[1] donnons-nous les développements de f_2, f_3, φ_3:

$$f_2 = t^l(a + bt + \ldots),$$
$$f_3 = t^{l'}(a' + b't + \ldots),$$
$$\varphi_3 = \alpha + \beta t + \ldots.$$

Les l' valeurs de t correspondant aux points d'intersection de f_1 avec $f_3 + \lambda\varphi_3$ auront leurs parties principales données par $a't^{l'} + \lambda\alpha = 0$, de sorte que leur produit aura pour valeur principale $(-1)^{l'}\frac{\lambda\alpha}{a'}$ et le produit des valeurs de f_2, $(-1)^{ll'}\lambda^l\alpha^l\frac{a^{l'}}{a'^l}$. Si nous supprimons le facteur λ^l et remarquons que les facteurs α^l donnent le produit des valeurs de

[1] Il est bien entendu que les développements de x_1, x_2, x_3 sur le cycle doivent être tels que, pour $t = 0$, on trouve les valeurs mêmes qui figurent dans les formules (13) et suivantes (et non simplement des valeurs proportionnelles).

φ_3 aux points A, nous voyons que le cycle en question figurera par le facteur $(-1)^{ll'}\frac{a^{l'}}{a^{l}}$, c'est à dire, au signe près, la *vraie valeur* de $\frac{f_2^{l'}}{f_3^{l}}$ sur le cycle en question.[1] Tel est donc le facteur qu'il faudra, dans la formule de comparaison, introduire pour chaque intersection commune que l'on supprimera.

20. En particulier, ceci nous permettra de voir ce que devient la formule

$$(10') \qquad R = \prod_i f_3(x^{(i)}, y^{(i)}) R_{12}^{0^{m_3}}$$

qui exprime le résultant en supposant connus les points d'intersection de $f_1 = 0$ et de $f_2 = 0$, lorsqu'un ou plusieurs de ces points sont à l'infini. Soient

$$x^{(i)}, y^{(i)}, 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_1 m_2 - \mu)$$

les points communs de f_1, f_2 situés à distance finie,

$$a^{(k)}, b^{(k)}, 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

les points communs à l'infini. On a

$$(14') \quad R = \prod_{(i)} f_3(x^{(i)}, y^{(i)}) \prod_k f_3^0(a^{(k)}, b^{(k)}) \left[\frac{R_{12}^u}{\prod_i (u_1 x^{(i)} + u_2 y^{(i)} + u_3) \prod_k (u_1 a^{(k)} + u_2 b^{(k)})}\right]^{m_3},$$

et c'est la quantité $\frac{R_{12}^u}{\prod_i (u_1 x^{(i)} + u_2 y^{(i)} + u_3) \prod_k (u_1 a^{(k)} + u_2 b^{(k)})}$ qu'il nous reste à évaluer. Or R_{12}^u est le résultant des polynômes $f_1, f_2, u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ Autrement dit, si

$$\xi_1^{(h)}, \xi_2^{(h)}, \xi_3^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m_1)$$

désignent les points d'intersection de $f_1 = 0$, $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$, on aura

$$(18) \quad R_{12}^u = \prod_h f_2(\xi_1^{(h)}, \xi_2^{(h)}, \xi_3^{(h)}) \left[\frac{f_1(u_2 v_3 - v_2 u_3, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - v_1 u_2)}{\prod_h (v_1 \xi_1^{(h)} + v_2 \xi_2^{(h)} + v_3 \xi_3^{(h)})}\right]^{m_2}.$$

[1] D'après la note précédente, il est clair que cette vraie valeur dépendra, comme cela doit être, du facteur de proportionnalité qui figure dans les coordonnées de l'origine du cycle.

Divisant cette valeur par le dénominateur

$$\prod_i (u_1 x^{(i)} + u_2 y^{(i)} + u_3) \prod_k (u_1 a^{(k)} + u_2 b^{(k)}),$$

nous allons pouvoir prendre pour la droite $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ la droite de l'infini $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = 1$. Dans ces conditions, en effet, les points $\xi_1^{(h)}, \xi_2^{(h)}, \xi_3^{(h)}$ sont, d'une part,[1] les points $a^{(k)}, b^{(k)}, 0$, d'autre part, les autres points à l'infini $(a^{(k')}, b^{(k')}, 0)$, points dont nous pouvons supposer les coordonnées choisies de manière à ce que le produit

$$\prod_{k'} (v_1 a^{(k')} + v_2 b^{(k')}) = f_1'^0(v_2, -v_1)$$

soit égal au quotient de $f^0(v_2, -v_1)$ par[2] $\prod (v_1 a^{(k)} + v_1 b^{(k)})$. Dans ces conditions, le second facteur de la valeur (18) de R_{12}^u devient égal à l'unité. Quant au rapport $\dfrac{\prod_h f_2(\xi_1^{(h)}, \xi_2^{(h)}, \xi_3^{(h)})}{\prod_i (u_1 x^{(i)} + u_2 y^{(i)} + u_3) \prod_k (u_1 a^{(k)} + u_2 b^{(k)})}$, il se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, mais nous venons d'apprendre dans le numéro précédent à lever cette indétermination, et nous obtenons

$$(19) \qquad R = \prod_i f_3(x^{(i)}, y^{(i)}) \prod_k f_3^0(a^{(k)}, b^{(k)}) (\prod f_2^0(a^{(k')}, b^{(k')}) \prod L)^{m_3}.$$

Les facteurs L sont relatifs aux différentes branches infinies de f_1. Si sur une telle branche, f_2 est d'ordre l, x_3 d'ordre l', le facteur L sera la vraie valeur de $\dfrac{f_2^{l'}}{x_3^{l}}$, multipliée par $(-1)^{ll'}$.

Le facteur $\Pi f_2^0(a^{(k')}, b^{(k')})$ se calcule sans que l'on connaisse les quantités $a^{(k')}, b^{(k')}$. C'est le résultant des formes binaires $f_1'^0, f_2^0$.

---

[1] Ces points ne sont pas, il est vrai, identiques avec les points $a^{(k)}, b^{(k)}, 0$ considérés tout à l'heure: ils en diffèrent par les ordres de multiplicité. Les points $a^{(k)}, b^{(k)}$ sont comptés dans la formule (14') avec l'ordre de multiplicité qu'ils ont comme points communs à f_1, f_2; ici on doit leur attribuer la multiplicité avec laquelle ils figurent comme points à l'infini de f_1.

[2] Il est bien entendu que le produit $\prod_k (v_1 a^{(k)} + v_2 b^{(k)})$ n'est pas celui qu'on déduirait du produit $\prod_k (u_1 a^{(k)} + u_2 b^{(k)})$ qui figure dans (14') en changent les u en v, ainsi qu'il résulte de la note précédente.

21. Ces résultats s'étendent immédiatement à un nombre quelconque d'équations. Le rôle que jouait tout à l'heure la courbe $f_1 = 0$ sera joué par la courbe représentée, dans l'espace à n dimensions, par les $(n - 1)$ premières équations données.

22. Les conclusions du n° 19 fournissent une identité qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier directement, et qui peut être utile dans certains raisonnements. Soient encore les trois courbes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ ayant en commun un point x_0, y_0. Sur un cycle de $f_1 = 0$ en ce point, f_2 sera de l'ordre k, f_3 de l'ordre l, et le rapport $\frac{f_2^l}{f_3^k}$ aura une certaine limite L. De même, sur un cycle de f_2 au même point, le rapport $\frac{f_3^{l'}}{f_1^{k'}}$ (en désignant par k' et l' les ordres de f_3 et de f_1 sur ce cycle) aura une certaine limite L', et, sur un cycle de f_3, le rapport $\frac{f_1^{l''}}{f_2^{k''}}$ (où k'', l'' sont les ordres de f_1, f_2) aura une limite L''. Il résulte évidemment du n° 19 que le produit des quantités L par les quantités L' et par les quantités L'' est égal à $(-1)^{\Sigma kl + \Sigma k'l' + \Sigma k''l''}$, du moins si le point x_0, y_0 est le seul point commun; mais on peut toujours supposer qu'il en est ainsi, en ajoutant aux premiers membres des équations de ces courbes des termes de degré assez élevés en $x - x_0$, $y - y_0$ pour ne pas changer les quantités L, L', L''.

II.

23. Nous avons étudié le résultant de plusieurs équations, c'est à dire une certaine fonction symétrique des solutions communes à ces équations. De pareilles quantités, susceptibles de recevoir des applications géométriques plus ou moins simples, ont été considérées par différents auteurs, auxquels elles ont fourni une série de théorèmes de géométrie.

C'est ainsi que Laguerre[1] a énoncé des théorèmes sur le produit

---

[1] Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, tome 60, pag. 71—73; 1865. — Bulletin de la Société Philomatique, p. 140; 1870.

des normales menées d'un point à une courbe, sur le produit des distances d'un point aux intersections d'une courbe et d'un cercle, etc.

Un certain nombre de ces théorèmes et d'autres analogues ont été repris par M. ELLING HOLST.[1]

Les fonctions symétriques qui font l'objet de ces différentes propositions appartiennent à une catégorie particulière: il s'agit toujours du produit des valeurs que prend une fonction rationnelle déterminée aux différents points communs à deux courbes données. Au contraire, d'autres résultats du même genre sont relatifs à l'évaluation, non d'un produit, mais d'une somme de fonctions rationnelles. Tel est, par exemple, le théorème de JACOBI sur la quantité $\sum \frac{U}{D(f, \varphi)}$ (où $D(f, \varphi)$ est le déterminant fonctionnel des polynômes f, φ).

Ces différentes recherches ont été reprises et complétées par M. HUMBERT dans une série d'importants mémoires insérés principalement au Journal de Mathématiques pures et appliquées.[2] Plus généralement, M. HUMBERT calcule, à l'aide de la théorie des fonctions fuchsiennes, les intégrales qui interviennent dans le théorème d'ABEL et dont l'expression permet d'obtenir le produit ou la somme de fonctions rationnelles, étendus aux points d'intersection de deux courbes, ou d'une courbe et d'une surface.

Je me propose de faire voir que tous les résultats que nous venons d'énumérer peuvent être considérés comme dérivant des propriétés du résultant.

24. Lorsque la fonction symétrique à évaluer affecte la forme d'un produit, nous sommes immédiatement ramenés au calcul d'un résultant. Le produit

$$\prod_i \frac{F(x^{(i)}, y^{(i)})}{\Phi(x^{(i)}, y^{(i)})}$$

[1] Math. Annalen tome 11, pag. 341—346; 1877. — Bull. de la Soc. Math. de France, tome 8, pag. 52—59; 1879.

[1] *Sur le théorème d'Abel et quelques unes de ses applications géométriques,* Journal de Math. pures et appliquées, 4[e] série, tome 3, pag. 327—405; tome 5, pag. 81—134; tome 6, pag. 233—292. — *Sur les courbes cycliques de direction,* ibid. tome 5, pag. 129. — *Propriétés des arcs des courbes algébriques planes ou gauches,* ibid. 5[e] série, tome 1, pag. 181; etc., etc. — Les théorèmes de M. HUMBERT ont été démontrés par une autre voie dans le *Traité des fonctions algébriques et de leurs intégrales* de MM. APPELL et GOURSAT.

étendu aux points d'intersection des courbes f, φ est, à un facteur près dépendant des termes du plus haut degré des polynômes f, φ, F, Φ, le quotient des résultants des polynômes f, φ, F d'une part, f, φ, Φ de l'autre; et les autres formes que nous connaissons pour ces résultants nous donneront autant de transformations du produit en question.

Soit, par exemple, le produit

$$\Pi\psi(x, y) \tag{20}$$

des valeurs prises par le polynôme entier $\psi(x, y)$ aux points d'intersection des courbes $f = 0$, $\varphi + P\psi = 0$. On est conduit à exprimer ce produit par le produit

$$\Pi(\varphi + P\psi) \tag{21}$$

étendu aux points d'intersection des courbes f, ψ, lequel est indépendant du polynôme entier P.

Le rapport des deux produits (20), (21) si le résultant des termes du plus haut degré des polynômes $f, \varphi + P\psi$ n'en dépend pas, ce qui arrivera lorsque $P\psi$ sera de degré inférieur à φ.

Lorsque la courbe $\psi = 0$ est un cercle, cette remarque prend la forme suivante: *Si une courbe fixe $f = 0$ est coupée par une autre variable, mais dont les points à l'infini et les points d'intersection avec un cercle $\psi = 0$ sont fixes, le produit des puissances, par rapport au cercle ψ, de la courbe $f = 0$ et de la courbe variable est constant.*

25. C'est encore dans le même ordre d'idées que rentre le théorème de Laguerre: *Si par un point $O(x_0, y_0)$ pris dans le plan d'une courbe $f = 0$, on mène un cercle quelconque, le produit des distances du point O aux points d'intersection*[1] *est* $(2R)^m f_O$.

On a en effet à évaluer dans ce cas le produit

$$P = \Pi[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] = (2R)^{2m}\Pi[(x - x_0)\sin\theta - (y - y_0)\cos\theta]$$

[1] Il y a ici un léger désaccord avec le résultat donné par Laguerre; cela tient à ce que nous supposons la quantité (22) (voir ci-dessous) égale à 1 et non à 2^m, ce qui était la supposition de Laguerre. La forme que nous adoptons ainsi pour f est la forme »normale» de M. Elling Holst (loc. cit.).

étendu aux points d'intersection des courbes $f = 0$,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - 2R((x - x_0)\sin\theta - (y - y_0)\cos\theta) = 0,$$

ce qui nous ramène à la remarque précédente en faisant

$$\varphi = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \qquad \psi = (x - x_0)\sin\theta - (y - y_0)\cos\theta, \qquad P = 2R.$$

Le résultant des termes de plus haut degré

$$f^0(x, y) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \ldots + a_m y^m,$$
$$x^2 + y^2$$

des polynômes f, φ est la quantité

$$(22) \qquad f^0(1, i) f^0(1, -i) = (a_0 - a_2 + a_4 - \ldots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \ldots)^2$$

que nous supposons égale à 1; de sorte que P est le résultant des trois polynômes f, $\varphi - 2R\psi$, ψ, ou, ce qui revient au même, f, φ, ψ. Nous pouvons évaluer ce dernier en formant le produit des valeurs de $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ aux points $f = 0$, $\psi = 0$, lequel s'obtient aisément en posant $x - x_0 = \rho\cos\theta$, $y - y_0 = \rho\sin\theta$, et a la valeur

$$\left[\frac{fo}{f^0(\cos\theta, \sin\theta)}\right]^2.$$

Comme le résultant des termes de plus haut degré des polynômes f, ψ est précisément $f^0(\cos\theta, \sin\theta)$, on trouve bien le résultat annoncé.

Une méthode semblable peut s'appliquer aux deux produits

$$\Pi[(x - x_0) \pm i(y - y_0)]$$

relatifs aux points d'intersection de la droite et du cercle et, par le quotient de ces deux produits,[1] conduit au second théorème de LAGUERRE: *L'orientation du système des droites qui vont du point O aux points d'intersection est la même que celle des asymptotes de la courbe* $f = 0$.

---

[1] On sait que l'orientation θ du système des droites allant de l'origine aux points $x^{(h)}$, $y^{(h)}$, c'est à dire la somme des angles que font ces droites avec l'axe des x, est donnée par la formule

$$e^{2i\theta} = \prod_h \frac{x^{(h)} + iy^{(h)}}{x^{(h)} - iy^{(h)}}$$

26. Soit encore à trouver le produit des longueurs des sécantes menées du point O à la courbe $f = 0$ de manière à la couper sous un angle donné V et l'orientation du système de ces droites.

Les points $x^{(h)}, y^{(h)}$ $(h = 1, 2, \ldots, m^2)$ seront définis par les équations

$$(23) \qquad f(x, y) = 0,$$

$$(24) \qquad [(x - x_0)f'_y - (y - y_0)f'_x] \sin V - (x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z) \cos V = 0$$

et nous considérerons les produits

$$\Pi[(x - x_0) \pm i(y - y_0)].$$

Prenons d'abord le résultant R^0 relatif aux polynômes (23), (24). En décomposant $f^0(x, y)$ en facteurs $b^{(k)}x - a^{(k)}y$ et substituant $a^{(k)}, b^{(k)}$ dans les termes de plus haut degré de (24), on trouve pour ce résultant (en désignant par Δ le discriminant de f^0)

$$\pm \Delta \sin^m V \prod_k (a^{(k)2} + b^{(k)2}) = \pm \Delta \sin^m V f^0(1, i) f^0(1, -i).$$

Nous connaissons d'ailleurs le résultant R^0 pour les équations (23) et

$$(25) \qquad x - x_0 + i(y - y_0) = 0$$

lequel est $f^0(1, i)$, de sorte que nous sommes ramenés au calcul du produit des résultats de substitution, dans le premier membre de l'équation (24), des solutions communes à (23) et à (25). Or, moyennant ces dernières, le premier membre de (24) peut s'écrire sous l'une des deux formes

$$(26) \qquad -(x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z) e^{iV},$$

$$(27) \qquad -(x - x_0)(f'_x + i f'_y) e^{iV}.$$

Partons de la première forme: elle nous représente, à un facteur près, le résultant des polynômes $f, x - x_0 + i(y - y_0)$ et $x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z$, c'est à dire le produit $\Pi'((x - x_0) + i(y - y_0))$ relatif aux tangentes menées du point O à la courbe, multiplié par le résultant des termes de plus haut degré des polynômes $f, x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z$, lequel est égal au produit de

$\frac{\Delta}{\sqrt{\Pi(a^{(k)^2} + b^{(k)^2})}}$ par le produit Π_d des distances du point O aux asymptotes de $f = 0$. Nous obtenons donc

$$\Pi((x - x_0) + i(y - y_0)) = \Pi'(x - x_0 + i(y - y_0)) \frac{e^{miV}}{\sin^m V} \sqrt{\frac{f^0(1, i)}{f^0(1, -i)}} \Pi_d.$$

La seconde forme (27) se traite par des procédés tout semblables et nous donne

$$\Pi(x - x_0 + i(y - y_0)) = f_0 \Pi(\xi - x_0 + i(\eta - y_0)) \frac{e^{miV}}{\sin^m V f^0(1, -i)},$$

ξ, η désignant les coordonnées des foyers réels de la courbe.

Si, dans ces formules nous changeons i en $-i$, elles nous feront connaître le produit $\Pi(x - x_0 - i(y - y_0))$. En multipliant, nous aurons le produit des longueurs des sécantes, égal au produit des longueurs des tangentes, multiplié par le produit des obliques menés du point O aux asymptôtes et les coupant sous l'angle V, ou encore à f_0 multiplié par le produit des distances du point O aux foyers réels et divisé par $\sin^m V$ (en supposant $f^0(1, i) f^0(1, -i) = 1$).

En divisant, au contraire, les deux produits conjugués l'un par l'autre, on a l'orientation du système de sécantes, égale à l'orientation des tangentes, plus celle des asymptôtes, plus m fois l'angle V; l'orientation des tangentes étant la même que celle des droites qui vont aux foyers réels.

Ces théorèmes sont établis, il est vrai, dans l'hypothèse où la courbe donnée n'a pas de point double. Mais, dans le cas contraire, les points doubles figureraient avec le même ordre de multiplicité comme extrêmité de tangentes, ou de normales, ou comme foyers. Ils s'élimineraient par conséquent des résultats.

27. D'autres théorèmes du même type ont encore été donnés dans les mémoires précédemment cités. Nous les laissons de côté pour rechercher si les propriétés du résultant nous permettent de calculer des fonctions symétriques autres que des produits.

Il y a tout d'abord lieu d'observer que la remarque donnée dans la première partie, n° 8, permet de ramener à la recherche d'un résultant l'expression de toute fonction symétrique des solutions communes à plusieurs équations donnée sous forme invariante.

Nous nous bornerons ici à considérer les fonctions symétriques qui se présentent comme la somme des valeurs que prend une certaine fonction rationnelle aux points communes à plusieurs courbes ou surfaces. Ces quantités se ramènent immédiatement à des produits à l'aide de l'identité

$$\frac{U}{V} = \frac{d}{d\lambda_{\lambda=0}} \log(V + \lambda U). \tag{28}$$

Supposons que U et V soient deux polynômes homogènes du même degré p aux trois variables x, y, z, et proposons-nous de calculer la somme des valeurs de $\frac{U}{V}$ aux points d'intersection des deux courbes $f = 0$, $\varphi = 0$.

Nous devons admettre tout d'abord que V ne s'annule en aucun de ces points, sans quoi la valeur correspondante de $\frac{U}{V}$ serait, en général, infinie ou indéterminée. Dans ces conditions, le produit $\Pi(V + \lambda U)$ étendu aux points $(f = 0,\ \varphi = 0)$ se calculera à l'aide du produit $\Pi\varphi$ étendu aux points

$$(f = 0,\ V + \lambda U = 0). \tag{29}$$

De ces derniers, certains seront fixes, ceux qui seront communs aux trois courbes $f = 0$, $U = 0$, $V = 0$. Ils donneront dans notre produit des facteurs indépendants de λ, lesquels ne formeront aucun terme à la dérivée logarithmique. Nous n'aurons donc à considérer que les points d'intersection (29) mobiles, lesquels seront, pour λ très petit, infiniment voisins des intersections de $f = 0$ avec $V = 0$, mais non confondus avec elles. En particulier, nous n'aurons pas à faire entrer en ligne de compte les points ou V s'annule sans que $\frac{U}{V}$ soit infini.

Considérons donc un cycle de la courbe $f = 0$ sur lequel $\frac{U}{V}$ est infini. Les coordonnées homogènes x, y, z seront données par des séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable t, nulle à l'origine du cycle. Soient alors

$$\frac{U}{V} = -\frac{1}{\lambda} = t^{-k}(A + Bt + \ldots) = \frac{1}{\psi(t)}, \tag{30}$$

$$\frac{d \log \varphi}{dt} = a + bt + \ldots.$$

La courbe $V + \lambda U = 0$ aura, pour λ très petit, k points d'intersection avec notre cycle infiniment voisins de son origine, et correspondant aux k racines infiniment petites de l'équation (30).

Supposons d'abord, pour simplifier, $k = 1$. Alors la courbe $V + \lambda U = 0$ coupera le cycle en un point μ dont le paramètre t aura pour valeur principale $t = - \lambda A$, de sorte qu'on a

$$\frac{d \log \varphi_\mu}{d\lambda} = \frac{d \log \varphi_\mu}{dt_\mu}\frac{dt_\mu}{d\lambda} = - aA + \ldots .$$

Donc le cycle en question fournira à la quantité $\frac{d \Sigma \log \varphi}{d\lambda}$ un terme égal à $- aA$. c'est à dire *au coefficient de* $\frac{1}{t}$ *dans le développement de* $-\frac{U}{V}\frac{d \log \varphi}{dt}$, ou à *l'intégrale* $-\frac{1}{2i\pi}\int \frac{U}{V} d \log \varphi$ prise le long d'un contour infiniment petit entourant le point analytique origine du cycle.

La même conclusion subsiste pour une valeur quelconque de k. C'est ce qui peut se voir en traçant dans le plan de la variable t un cercle de petit rayon autour du point $t = 0$. La somme des valeurs de $\frac{d \log \varphi}{d\lambda} = - \frac{\frac{d \log \varphi}{dt}}{\frac{d\psi}{dt}}$ aux points racines de l'équation (30) situés à l'intérieur de ce cercle (et, si le cercle a été pris une fois pour toutes, les k points racines infiniment voisins de l'origine seront à son intérieur pour λ suffisamment petit) sera l'intégrale $-\frac{1}{2i\pi}\int \frac{1}{\psi(t) + \lambda}\frac{d \log \varphi}{dt} dt$ prise le long du cercle, laquelle, pour $\lambda = 0$, donnera bien $\int \frac{U}{V} d \log \varphi$.

Nous constaterons le même fait directement en posant $\lambda = \nu^k$. t est alors une série en μ commençant par un terme du premier degré. Les k valeurs infiniment petites de t s'obtiennent en multipliant μ par les différentes racines $k^{\text{èmes}}$ de l'unité. Si d'autre part on a

$$F(t) = \frac{1}{\psi(t)}\frac{d \log \varphi}{dt} = \frac{\alpha_{-k}}{t^k} + \frac{\alpha_{-k+1}}{t^{k-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{-1}}{t} + \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots ,$$

il viendra

$$\frac{d\log\varphi}{d\lambda} = -\frac{1}{\psi(t)}\frac{d\log\varphi}{dt}\frac{dt}{d\log\lambda} \tag{31}$$

$$= \frac{\nu}{k}\frac{dt}{d\nu}\left(\frac{\alpha_{-k}}{t^k} + \frac{\alpha_{-k+1}}{t^{k-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{-1}}{t} + \alpha_0 + \alpha_6 t + \ldots\right).$$

Or tous les termes de $F(t)$, autres que $\frac{\alpha_{-1}}{t}$, sont des dérivées de fonctions rationnelles de t, et par suite, après multiplication par $\frac{\nu}{k}\frac{dt}{d\nu}$, ne donneront pas de termes indépendants de ν. Ils s'élimineront donc, d'après les propriétés de l'équation binôme, lorsqu'on fera la somme des valeurs que prend l'expression (31) en y multipliant ν successivement par les différentes racines $k^{\text{ème}}$ de l'unité. Reste le seul terme $\frac{\alpha_{-1}}{t}$, qui donnera α_{-1}; d'où la conclusion annoncée.

28. Nous évaluons ainsi la dérivée logarithmique par rapport à λ du produit des valeurs de φ aux points $(f = 0,\ V + \lambda U = 0)$. Celui-ci diffère du produit primitif par deux facteurs, une puissance de la quantité μ (formule (13), n° 13, première partie) relative aux polynômes f, φ, laquelle est indépendante de λ et ne figure pas dans la dérivée logarithmique, et la puissance $n^{\text{ème}}$ (n étant le degré de φ) de la quantité analogue relative aux polynômes f, $V + \lambda U$. Cette dernière donnera un terme nC, où C est indépendant de φ. Nous arrivons donc à la formule finale

$$\sum \frac{U}{V} = -\mathrm{S}\,\mathrm{E}\,\frac{U}{V}\frac{d\log\varphi}{dt} + nC, \tag{32}$$

où le signe Σ est relatif aux points $(f = 0,\ \varphi = 0)$, le signe S aux cycles de $f = 0$ sur lesquels $\frac{U}{V}$ est infini; le symbole $\mathrm{E}\,\frac{U}{V}\frac{d\log\varphi}{dt}$ désignant le résidu de $\frac{U}{V}d\log\varphi$, c'est à dire le coefficient de $\frac{1}{t}$ dans le développement de $\frac{U}{V}\frac{d\log\varphi}{dt}$.

Dans le cas le plus simple, où les cycles qui interviennent dans le second membre sont tous ordinaires, V ayant aux origines de ces cycles des zéros simples, cette formule s'écrit

$$\sum \frac{U}{V} = -\mathrm{S} \frac{U}{\varphi} \frac{D(f, \varphi)}{D(f, V)} + nC \tag{32'}$$

où $D(P, Q)$ désigne le déterminant fonctionnel des fonctions P, Q par rapport aux variables x, y. Elle correspond, au fond, à la formule (13) du premier mémoire de M. HUMBERT sur le théorème d'ABEL.[1]

29. Il n'y a pas lieu de chercher une interprétation géométrique pour la constante C, car celle-ci dépend du facteur de proportionnalité qui figure dans les coordonnées homogènes x, y, z. Ce facteur est effectivement une série en t qui donne un terme dans la dérivée $\frac{d \log \varphi}{dt}$. Mais nous pouvons obtenir une expression simple de C en faisant $\varphi = V$. Nous voyons alors que la formule (32) peut s'écrire

$$\sum \frac{U}{V} = -\mathrm{S}\mathrm{E} \frac{U}{V} \frac{d\left(\log \varphi - \frac{n}{p} \log U\right)}{dt}$$

(p étant le degré commun de U et de V).

Ce procédé de détermination de la constante C, reposant uniquement sur la disparition du premier membre de (32) lorsque $\varphi = U$, peut être appliqué plus simplement si U se décompose en facteurs. On pourra alors évaluer C en remplaçant φ par l'un de ces facteurs.[2]

En particulier, si $\frac{U}{V}$ s'annulle à l'infini, on annulera C en représentant les cycles du second membre en coordonnées absolues ($z = 1$). C'est, par exemple, le cas du théorème de JACOBI, où V est le déterminant fonctionnel $D(f, \varphi)$. Comme on a

$$\frac{dx}{f'y} = \frac{dy}{-f'x} = -\frac{d\varphi}{D(f, \varphi)},$$

[1] Journal de Mathématiques, 4e série, tome 3, page 346.

[2] Dans le cas où la courbe est représentée à l'aide des fonctions fuchsiennes ainsi que le fait M. HUMBERT, on voit aisément que la constante C est égale à la somme des intégrales $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{U}{V} d \log(\gamma t + \delta)$ étendues aux différents côtés du polynôme fuchsien, $\left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$ désignant la substitution correspondant à chaque côté.

la différentielle $\frac{U}{V} d \log \varphi$ se réduit à $-\frac{U}{\varphi}\frac{dx}{f'y}$ et ne devient pas infinie aux points $V = 0$ sauf si ces points sont des points multiples, ce que l'on peut toujours éviter en remplaçant f par $f + h\varphi$ (ce qui ne change pas $D(f, \varphi)$). La courbe $f + h\varphi = 0$ n'a en effet pour h quelconque, aucun point double, à moins que les courbes $f = 0$, $\varphi = 0$ n'aient un point double commun ou une branche entière commune, ce qui est exclu par la nature même de la question. Si donc V est de degré inférieur à $D(f, \varphi)$, ce qui entraine $C = 0$, la formule (32') nous donne bien $\sum \frac{U}{D(f, \varphi)} = 0$.

30. On peut se demander par quoi peuvent être remplacées les résultats précédents lorsque V s'annulle en un ou plusieurs points communs aux courbes $f = 0$, $\varphi = 0$.

A cet effet, on remplacera la courbe φ par une courbe voisine φ_1 ne passant pas par les points où $V = 0$, et on fera tendre φ_1 vers φ.

Si d'abord on considère un cycle de $f = 0$ où V s'annulle, mais sans que $\frac{U}{V}$ devienne infini, on voit immédiatement par ce procédé que l'on doit prendre pour valeur de $\frac{U}{V}$, dans le premier membre de la formule (32), la *vraie valeur* de cette quantité sur le cycle.

Supposons maintenant que la courbe $\varphi = 0$ passe par un ou plusieurs points de la courbe $f = 0$ où $\frac{U}{V}$ soit infini et soit C un cycle ayant pour origine tel point. La courbe auxiliaire $\varphi_1 = 0$ coupera la courbe $f = 0$ en un certain nombre de points P' situés sur les cycles C et en des points P'' non situés sur ces cycles. Nous mettrons à part, dans le premier membre de la formule (32), les termes qui se rapportent aux points P' et nous les ferons passer dans le second membre pour les joindre aux termes $\mathrm{E}\frac{U}{V}\frac{d \log \varphi_1}{dt}$ relatifs aux cycles C correspondants.

Soit

$$\frac{U}{V} = \frac{a_{-k}}{t^k} + \frac{a_{-k+1}}{t^{k-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{t} + a_0 + a_1 t + \ldots$$

le développement de $\frac{U}{V}$ sur un cycle C; ce cycle est coupé par la courbe

$\varphi_1 = 0$ en μ points $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$, les paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ tendent vers o lorsque φ_1 tend vers φ; de sorte qu'on a

$$\frac{d}{dt}\log\varphi = -\frac{\mu}{t} + P(t),$$

$$\frac{d}{dt}\log\varphi_1 = -\frac{1}{t-t_1} - \frac{1}{t-t_2} - \ldots - \frac{1}{t-t_\mu} + P_1(t),$$

$P(t)$, $P_1(t)$ étant deux développements en t dont le second a pour limite le premier. Le cycle C fournira à la formule (32), modifiée comme nous l'avons dit tout à l'heure, le terme

$$(33)\qquad \mathrm{E}\left[\left(\frac{a_{-k}}{t^k} + \frac{a_{-k+1}}{t^{k-1}} + \ldots\right)\left(-\frac{1}{t-t_1} - \frac{1}{t-t_2} - \ldots - \frac{1}{t-t_\mu} + P_1(t)\right)\right]$$
$$-\sum_{i=1}^{\mu}\left(\frac{a_{-k}}{t_i^k} + \frac{a_{-k+1}}{t_i^{k-1}} + \ldots\right)$$
$$= \mathrm{E}\left[\left(\frac{a_{-k}}{t^k} + \frac{a_{-k+1}}{t^{k-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{t} + a_0 + a_1 + \ldots\right)P_1(t)\right] - \mu P_1(0),$$

car on a, pour $h < 0$,

$$\mathrm{E}\frac{a_h t^h}{t-t_i} = -a_h t_i^h.$$

Lorsque φ_1 tend vers φ, cette quantité (33) a pour limite

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{a_{-k}}{t^k} + \frac{a_{-k+1}}{t^{k-1}} + \ldots\right)P(t)\right] - \mu P(0) = \mathrm{E}\left(\frac{a_{-k}}{t^k} + \ldots\right)\frac{d\log\varphi}{dt}.$$

On arriverait d'ailleurs au même résultat en intégrant la quantité $\frac{U}{V}\frac{d\log\varphi_1}{dt}$ le long d'un contour renfermant les points $0, t_1, t_2, \ldots, t_\mu$.

Ainsi *la formule* (32) *fait connaître la somme des valeurs de* $\frac{U}{V}$ *aux points communs aux courbes* $f=0$, $\varphi=0$ *où cette quantité a une valeur finie.*

31. Soit maintenant dI une différentielle abélienne prise sur la courbe $f=0$. Coupons cette courbe par deux autres de même degré n

$$F = 0, \qquad \Phi = 0$$

et cherchons à calculer la somme des intégrales $\int dI$ entre les points d'intersection de F et ceux de Φ. Nous poserons à cet effet

$$F = \psi - u_1\chi, \qquad \Phi = \psi - u_2\chi,$$

de sorte que $\chi = 0$ sera une courbe quelconque du faisceau (F, Φ), et nous considérerons la courbe variable

$$\psi - u\chi = 0$$

qui coupera f en un certain nombre de points fixes ou mobiles. L'élément d'intégrale $\int \Sigma dI$ pris entre les points $(f = 0,\ \psi - u\chi = 0)$ et $(f = 0,\ \psi - (u + du)\chi)$ sera

$$(34) \qquad U du = du \sum \frac{dI}{d\left(\frac{\psi}{\chi}\right)},$$

la sommation étant relative aux points d'intersection *mobiles* des courbes $f = 0$, $\psi - u\chi = 0$. Or la somme des valeurs de $\frac{dI}{d\left(\frac{\psi}{\chi}\right)}$ en tous les points $(f = 0,\ \psi - u\chi = 0)$, sauf ceux où cette quantité est infinie (lesquels appartiennent, bien entendu aux points d'intersection fixes) est égale à nC, plus la somme des résidus, par rapport aux cycles de f où $\frac{dI}{d\frac{\psi}{\chi}}$ est infini, de la quantité

$$-\frac{dI}{d\left(\frac{\psi}{\chi}\right)} \frac{d \log(\psi - u\chi)}{dt} = \frac{-I'\chi^2}{\psi'\chi - \psi\chi'} \frac{\psi' - u\chi'}{\psi - u\chi},$$

en désignant par I', ψ', etc., les dérivées $\frac{dI}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, etc.

$$(35) \qquad \sum \frac{dI}{d\left(\frac{\psi}{\chi}\right)} = \mathrm{SE}\left(\frac{-I'\chi^2}{\psi'\chi - \psi\chi'} \frac{\psi' - u\chi'}{\psi - u\chi}\right) + nC.$$

De la fraction $\frac{\psi' - u\chi'}{\psi - u\chi}$ nous retrancherons le terme $\frac{\chi'}{\chi}$. On a

$$\text{(36)} \qquad \mathrm{SE}\frac{-I'\chi^2}{\psi'\chi-\psi\chi'}\frac{\chi'}{\chi}\Big) + nC = \sum{}' \frac{dI}{d\left(\frac{\psi}{\chi}\right)},$$

la somme Σ' étant relative aux points $(f=0,\ \chi=0)$ où $\frac{dI}{d\left(\frac{\psi}{\chi}\right)}$ est fini. Parmi ceux-ci figurent les points communs à la courbe f et au faisceau (ψ, χ): ces points disparaîtront donc dans la soustraction des formules (35), (36). Mais la quantité $\frac{dI}{d\left(\frac{\psi}{\chi}\right)}$ est nulle pour $\chi = 0$, $\psi \neq 0$, à moins que χdI ne soit infini, hypothèse que nous pouvons écarter, puisque $\chi = 0$ est une courbe arbitraire du faisceau (F, Φ). Il viendra en conséquence pour le coefficient de du dans l'élément d'intégrale (34)

$$\text{(37)} \qquad U = \mathrm{SE}\left(-\frac{1}{\frac{\psi}{\chi} - u}\frac{dI}{dt}\right)$$

(à cause de l'identité $\frac{\psi' - u\chi'}{\psi - u\chi} = \frac{\chi'}{\chi} + \frac{\psi'\chi - \psi\chi'}{\chi(\psi - u\chi)}$).

Cette formule (37) n'est autre que la formule fondamentale (3) du mémoire de M. Humbert.[1] A cause de la disparition du facteur $\psi'\chi - \psi\chi'$, la somme du second membre s'étend aux seuls cycles de f où $\frac{dI}{dt}$ devient infini.

32. Nous venons d'obtenir le coefficient de du; mais rien n'est plus aisé que d'obtenir l'intégrale elle-même. Il est clair en effet que dans la formule (37) nous avons le droit d'intégrer par rapport à u sous le signe E, ce qui nous donne (en intégrant de u_1 à u_2)

$$\text{(38)} \qquad \Sigma I = -\mathrm{SE}\left(\frac{dI}{dt}\log\frac{F}{\Phi}\right).$$

[1] Journal de Mathématiques, 4[e] série, tome 3, page 334.

33. Il est à remarquer que nous n'aurions point pu poser $\psi = F$, $\chi = \Phi$ et considérer la courbe $F - u\Phi = 0$, u variant de 0 à ∞; car l'intégrale $\displaystyle\int \frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{\psi}{\chi} - u}\, du$ est infinie avec u. On se convainc aisément que les termes infinis disparaissent dans la sommation. C'est ce qui explique comment cette difficulté a pu être écartée par l'artifice simple dont nous nous sommes servis.

34. Nous nous sommes jusqu'ici occupés de courbes planes. Mais tout ce que nous venons de dire s'applique mot pour mot aux courbes gauches.

On considérera alors l'intersection des trois surfaces $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\varphi = 0$ et l'on obtiendra pour la somme des valeurs de $\frac{U}{V}$ en ces points une formule toute semblable à la formule (32), et où figureront les cycles de la courbe ($f_1 = 0$, $f_2 = 0$) où $\frac{U}{V}$ devient infinie. (En particulier on déduira de cette formule le théorème de Jacobi généralisé au cas de trois équations.)

Cette formule, établie pour les courbes qui sont intersection complète, s'étend immédiatement aux courbes gauches algébriques quelconques puisque toute pareille courbe devient une intersection complète lorsqu'on lui adjoint une ou plusieurs droites, auxquelles la proposition est applicable.

On pourra en particulier généraliser le théorème de Jacobi à l'intersection d'une courbe gauche algébrique quelconque et d'une surface.

La formule (32) étant une fois démontrée, les déductions qui suivent subsistent sans modification et il est clair que l'on pourrait raisonner de même pour les courbes algébriques définies dans une espace à un nombre quelconque de dimensions.

35. Nous n'avons pas à développer les nombreuses applications des formules (32), (37) et (38), lesquelles ont été traités dans les mémoires précédemment cités de M. Humbert. Nous dirons simplement un mot d'un cas sur lequel ce géomètre n'a pas insisté spécialement, celui des intégrales prises le long d'une courbe fermée. Dans ce cas, la quantité

$\log\frac{F}{\Phi}$ de la formule (38) devra évidemment être remplacée par un multiple de $2i\pi$.

Soit, par exemple, une courbe Γ de degré $2m$ composée de m parties fermées $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ à l'intérieur desquelles peut passer une même droite. Par cette droite on pourra faire passer un plan mobile qui coupera chaque branche fermée en deux points. Lorsque notre plan aura accompli une demi-revolution, les points mobiles auront à eux deux parcouru la branche entière sur laquelle ils se trouvent, dans un sens déterminé.

Soit maintenant dI une différentielle abélienne qui ne devient infinie en aucun point réel de notre courbe: les formules précédentes nous permettront de calculer la somme S des intégrales $\int dI$ prises le long des m branches.

Prenons pour axe des x la droite D. Pour éviter un inconvénient analogue à celui que nous avons signalé au n° 33, nous prendrons notre plan mobile sous la forme

$$y\sin\theta - z\cos\theta = 0,$$

où θ variera dans un intervalle égal à π. On aura alors pour élément d'intégrale

$$(39)\qquad d\theta\sum\frac{dI(y^2+z^2)}{ydz-zdy} = d\theta\left[\mathrm{SE}\frac{I'(y^2+z^2)}{yz'-zy'}\frac{y'\sin\theta - z'\cos\theta}{y\sin\theta - z\cos\theta} + C\right].$$

Nous avons donc à intégrer la différentielle $d\theta\frac{y'\sin\theta - z'\cos\theta}{y\sin\theta - z\cos\theta}$ dans un intervalle égal à π ou en posant $\operatorname{tg}\theta = u$, à intégrer

$$(40)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y'u-z'}{yu-z}\frac{du}{1+u^2}.$$

Cette intégrale, au facteur $2i\pi$ près, s'obtient en prenant le résidu de la quantité sous le signe $\int$ par rapport au point $u = i$ et y ajoutant le résidu relatif au point $u = \frac{z}{y}$ si le coefficient de i dans cette dernière quantité est positif. Le résidu relatif à $u = i$ fournit à l'intégrale de la quantité (39) le terme

$$\pi \mathrm{SE} \frac{dI(y^2 + z^2)}{ydz - zdy} \frac{d}{dt} \log(y + iz),$$

lequel, ajouté à la quantité $C\pi$ provenant de l'intégration du terme constant C, donne une somme égale à

$$\pi \sum_{\Gamma, y+iz=0} \frac{dI(y^2 + z^2)}{ydz - zdy} = 0.$$

Le résidu de l'intégrale (40), relatif au point $u = \frac{z}{y}$, étant $\frac{y'z - z'y}{y^2 + z^2}$, on voit qu'il vient simplement

$$\mathrm{S} = 2i\pi \mathrm{S}' \mathrm{E} \frac{dI}{dt},$$

la somme S' étant étendue aux infinis de l'intégrale tels que le coefficient de i dans le rapport $\frac{z}{y}$ en ces points soit positif.

L'intégrale I devient infinie en 2μ points $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_\mu, Q_\mu$, imaginaires conjugués deux à deux. On voit que l'on doit faire entrer dans la formule (41) le résidu relatif à un des points de chaque couple, les points $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ par exemple.

36. La droite D n'est assujettie qu'à la condition de traverser chacune des parties fermées $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ de Γ. Si donc R est une région continue de l'espace, de chaque point de laquelle on voit ces courbes fermées sous de cônes ayant à leur intérieur une partie commune (région limitée par des portions de développables circonscrites à ces courbes), la droite D pourra prendre une position quelconque à l'intérieur de cette région.

Il est clair à priori que le choix des points $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ ne doit pas être influencé par une semblable variation de position de D. C'est ce que l'on constate de la manière suivante.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, L, M, N$ les coordonnées plückériennes de D, rapportées à des axes quelconques. Comme dans le numéro précédent on suppose qu'il a été choisi un sens sur D, ces coordonnées doivent être regardées comme définies à un même facteur *positif* près. Les anciennes coordonnées y, z seront remplacées par des polynômes du premier degré $ax + by + cz + dt$, $a'x + b'y + c'z + d't$ tels que les déterminants $bc' - cb'$, $ac' - ca'$, ... soient proportionnelles, avec un facteur de proportionnalité *positif*, aux quantités α, β, etc.

Considérons d'autre part un couple de points P_1, Q_1 imaginaires conjuguées, situés à distance finie ou à l'infini, dont les coordonnées homogènes sont $x \pm x'i$, $y \pm y'i$, $z \pm z'i$, $t \pm t'i$. Par ces deux points passe une droite réelle D_1, et au choix de l'un des points P_1, Q_1 par opposition à l'autre correspondra le choix d'un sens sur cette droite: le sens positif par rapport auquel le segment qui va du point choisi à l'autre aura la partie imaginaire positive. On obtiendra les coordonnées de la droite D_1, prise dans le sens en question (si l'on a choisi le point

$$P_1(x + x'i, y + y'i, z + z'i, t + t'i)$$

par opposition au point $Q_1(x - x'i, y - y'i, z - z'i, t - t'i)$,) en divisant par i les déterminants $(x + x'i)(t - t'i) - (x - x'i)(t + t'i)$, etc.[1]

Le coefficient de i dans le rapport

$$\frac{a'(x + x'i) + b'(y + y'i) + c'(z + z'i) + d'(t + t'i)}{a(x + x'i) + b(y + y'i) + c(z + z'i) + d(t + t'i)}$$

est égal, à un dénominateur positif près, à l'expression

$$\alpha L_1 + \beta M_1 + \gamma N_1 + \alpha_1 L + \beta_1 M + \gamma_1 N, \tag{42}$$

expression bien connue dont le signe dépend du sens de rotation d'une des semi-droites D, D_1 par rapport à l'autre. C'est donc ce sens de rotation qui décidera du choix du point P_1.

---

[1] En effet cette conclusion est vraie pour $t \pm t'i = 1$, et d'autre part, les signes des déterminants ne sont pas altérés si on multiplie les quatre coordonnées des deux points P_1, Q_1 par deux quantités imaginaires conjuguées l'une de l'autre.

D'ailleurs ce sens de rotation ne varie pas par le déplacement de D à l'intérieur de la région R, car la quantité (42) ne devient nulle que si les droites D, D_1 sont dans un même plan: ce qui ne saurait arriver, puisque ce plan couperait la courbe Γ, de degré $2m$, en $2m$ points réels et 2 imaginaires.