

SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE.

Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur

PAR

LEO KÖNIGSBERGER

à HEIDELBERG.

[Traduit de l'allemand par L. Laugel.]

Ce n'est qu'aujourd'hui, à mon retour d'un assez long voyage d'agrément, que je puis donner suite aux demandes amicales, que vous m'avez faites verbalement et par écrit, de vous communiquer les résultats essentiels des recherches que j'ai entreprises l'an dernier sur les principes de la mécanique. Je vais essayer, bien qu'assez rapidement, de mettre en évidence quelques points qui pourront peut-être inspirer en général de l'intérêt.

L'établissement de la loi de WEBER sur l'action entre points matériels électrisés avait exigé l'introduction de forces qui dépendent non seulement de la situation des points mais encore de leurs vitesses et de leurs accélérations, et KIRCHHOFF, HERTZ et autres ont à mainte reprise admis la possibilité de forces, définies par des fonctions des coordonnées et de leurs dérivées d'ordre quelconque prises par rapport au temps. C'est principalement la loi de WEBER qui, dans l'étude du potentiel cinétique, défini par l'expression $H = -T - U$, où T désigne la force vive de la matière pondérable et U la fonction des forces — ces mots pris dans leur sens habituel en mécanique — a conduit C. NEUMANN à soulever la question de savoir comment doit être formé U au moyen des coordonnées et de leurs dérivées premières, quand on admet que le principe de HAMILTON reste valable. Une méthode de nature essentiellement différente et d'une portée très grande en principe, est celle, introduite en mécanique par HELMHOLTZ, du traitement du potentiel cinétique comme fonction des coordonnées et de leurs dérivées premières, méthode qui ne

met pas immédiatement en évidence une séparation de l'énergie actuelle et de l'énergie potentielle, mais qui détermine d'une manière univoque la quantité d'énergie de l'ensemble du système, et qui fournit encore la fonction fondamentale qui a été l'origine des développements de la théorie des mouvements cachés établie par HELMHOLTZ et reprise par HERTZ.

Si l'on examine avec un peu plus d'attention les considérations exposées par C. NEUMANN, on est très rapidement conduit à des résultats beaucoup plus généraux, qui révèlent la source propre des théorèmes antérieurs, et qui de plus permettent aussi d'étendre les recherches de HELMHOLTZ à des forces appartenant à des potentiels cinétiques qui dépendent de dérivées d'ordre quelconque.

Après avoir, pour une fonction

$$R = f(t, x, y, z, \dots),$$

où x, y, z, \dots dépendent de t , développé la relation

$$\frac{\partial R^{(\rho)}}{\partial x^{(\lambda)}} = \frac{\rho(\rho-1)\dots(\rho-\lambda+1)\partial R^{(\rho-\lambda)}}{1.2\dots\lambda \partial x}$$

et l'identité

$$\frac{\partial R^{(\rho)}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial R^{(\rho)}}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial R^{(\rho)}}{\partial x''} + \dots + (-1)^\rho \frac{d^\rho}{dt^\rho} \frac{\partial R^{(\rho)}}{\partial x^{(\rho)}} = 0,$$

que l'on en tire, on obtient, pour chaque fonction

$$V = F(t, R_1, R_1', R_1'', \dots, R_1^{(\nu)}, R_2, R_2', \dots, R_2^{(\nu)}, \dots)$$

où R_1, R_2, \dots sont des fonctions de t et des μ grandeurs p_1, p_2, \dots, p_μ , qui elles-mêmes doivent encore être regardées comme fonctions de t , la relation

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial p_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial p_i'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial p_i''} - \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial V}{\partial p_i^{(\nu)}} \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial R_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial R_1'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial R_1''} - \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial V}{\partial R_1^{(\nu)}} \right) \frac{\partial R_1}{\partial p_i} \\ &+ \left(\frac{\partial V}{\partial R_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial R_2'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial R_2''} - \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial V}{\partial R_2^{(\nu)}} \right) \frac{\partial R_2}{\partial p_i} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

sur laquelle reposent les recherches qui suivent.

Supposons maintenant que n points d'un système ayant pour coordonnées $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ soient soumis aux conditions restrictives exprimées par les m équations linéaires homogènes par rapport aux déplacements virtuels

$$\begin{aligned} f_{\lambda 1} \delta x_1 + \varphi_{\lambda 1} \delta y_1 + \psi_{\lambda 1} \delta z_1 + f_{\lambda 2} \delta x_2 + \varphi_{\lambda 2} \delta y_2 + \psi_{\lambda 2} \delta z_2 + \dots \\ + f_{\lambda n} \delta x_n + \varphi_{\lambda n} \delta y_n + \psi_{\lambda n} \delta z_n = 0, \end{aligned} \quad (\lambda=1, 2, \dots, m)$$

et que, H désignant une fonction donnée de t , des $3n$ coordonnées et de leurs dérivées prises par rapport au temps jusqu'à l'ordre ν , les variables soient pendant le cours du temps t , variable indépendante, soumises au principe de d'Alembert généralisé; on aura:

$$\begin{aligned} \sum_1^n \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x'_k} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}} - Q_k \right\} \delta x_k \\ + \sum_1^n \left\{ \frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial y'_k} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}} - R_k \right\} \delta y_k \\ + \sum_1^n \left\{ \frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial z'_k} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}} - S_k \right\} \delta z_k = 0, \end{aligned}$$

où Q_k, R_k, S_k sont des fonctions données du temps et des coordonnées, et où H , par analogie avec la mécanique, peut être nommé le potentiel cinétique. *D'où s'ensuit aisément la première forme des équations de Lagrange généralisées*

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x'_k} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}} - Q_k + \lambda_1 f_{1k} + \lambda_2 f_{2k} + \dots + \lambda_m f_{mk} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial y'_k} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}} - R_k + \lambda_1 \varphi_{1k} + \lambda_2 \varphi_{2k} + \dots + \lambda_m \varphi_{mk} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial z'_k} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}} - S_k + \lambda_1 \psi_{1k} + \lambda_2 \psi_{2k} + \dots + \lambda_m \psi_{mk} = 0, \end{aligned}$$

tandis que le théorème auxiliaire précité fournit, sous l'hypothèse de l'inté-

grabilité des précédentes équations aux variations, la seconde forme des équations de Lagrange généralisées

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p'_s} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} + P_s = 0 \quad (s=1, 2, \dots, \mu)$$

où l'on a posé

$$P_s = - \sum_1^n \left\{ Q_k \frac{\partial x_k}{\partial p_s} + R_k \frac{\partial y_k}{\partial p_s} + S_k \frac{\partial z_k}{\partial p_s} \right\}.$$

Maintenant nous pouvons donner une autre interprétation à ces équations. On nommera adjointe à une fonction

$$F(r_1, r'_1, \dots, r_1^{(\nu)}, r_2, r'_2, \dots, r_2^{(\nu)}, \dots, r_k, r'_k, \dots, r_k^{(\nu)}),$$

où r_1, r_2, \dots, r_k dépendent d'une variable t , une autre fonction f formée au moyen de $r, \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial r'}, \dots, \frac{\partial F}{\partial r^{(\nu)}}$ et de leurs dérivées prises par rapport à t jusqu'à un ordre quelconque, quand celle-ci lors de la transformation des variables r_1, r_2, \dots, r_k en μ autres p_1, p_2, \dots, p_μ , jouit de la propriété que ladite fonction, formée au moyen de $p_s, \frac{\partial F}{\partial p_s}, \frac{\partial F}{\partial p'_s}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_s^{(\nu)}}$ et de leurs dérivées totales, est égale à la somme des projections des fonctions f , qui appartiennent à r_1, r_2, \dots, r_k prises sur la direction de p_s , et par conséquent vérifie l'équation

$$\begin{aligned} & f\left(p_s, p'_s, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_s}, \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial p_s}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p'_s}, \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial p'_s}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_s^{(\nu)}}, \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial p_s^{(\nu)}}, \dots\right) \\ &= \sum_1^k f\left(r_\varepsilon, r'_\varepsilon, \dots, \frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon}, \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon}, \dots, \frac{\partial F}{\partial r'_\varepsilon}, \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial r'_\varepsilon}, \dots, \frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon^{(\nu)}}, \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon^{(\nu)}}, \dots\right) \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial p_s}, \end{aligned}$$

en sorte que

$$-\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_i}, \quad -\frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial y'_i}, \quad -\frac{\partial T}{\partial z_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial z'_i}$$

sont fonctions adjointes de la force vive.

Maintenant si l'on soulève en outre la question de savoir quelles sont toutes les fonctions adjointes, appartenant à chaque fonction F quelconque et

valables pour *chaque* choix arbitraire des transformations, on reconnaît qu'il existe toujours $\nu + 1$ et seulement $\nu + 1$ fonctions adjointes de la forme

$$\frac{\partial F}{\partial r^{(\nu-\lambda)}} - (\nu - \lambda + 1) \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial r^{(\nu-\lambda+1)}} + \frac{(\nu - \lambda + 2)(\nu - \lambda + 1)}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial F}{\partial r^{(\nu-\lambda+2)}} - \dots$$

$$+ (-1)^\nu \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \dots \lambda} \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial F}{\partial r^{(\nu)}}, \quad (\lambda=0, 1, 2, \dots, \nu)$$

et, si l'on nomme, d'une manière tout à fait générale, F désignant le potentiel cinétique H — par analogie avec le moment de mouvement, introduit par HELMHOLTZ, $\frac{\partial H}{\partial p_s}$, quand H ne dépend que des dérivées premières — les ν expressions

$$\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu-\lambda)}} - (\nu - \lambda + 1) \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu-\lambda+1)}} + \dots$$

$$+ (-1)^\nu \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \dots \lambda} \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}, \quad (\lambda=0, 1, 2, \dots, \nu-1)$$

les moments de mouvement, et cette expression pour $\lambda = \nu$ la force, on voit alors que la force — abstraction faite des moments — est l'unique fonction adjointe, appartenant à *chaque* potentiel cinétique dépendant des coordonnées et de leurs dérivées d'ordre quelconque, qui existe pour des conditions restrictives arbitraires imposées au système libre; en même temps les équations de Lagrange sous leur seconde forme peuvent être remplacées par le simple énoncé suivant: La force agissant sur la coordonnée p , pendant le mouvement est égale à la somme des projections des forces agissant sur le système libre sur la direction de p_s .

La question suivante qui se présente alors est relative à la valabilité des principes de la mécanique pour la définition généralisée de force et pour les équations de Lagrange généralisées. On voit d'abord immédiatement que dans le cas où le potentiel cinétique H dépend d'une manière toute générale des coordonnées et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre ν inclus, le principe de Hamilton, représenté par l'équation

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(H + \sum_1^\mu P_\lambda p_\lambda \right) dt = 0$$

est équivalent à la seconde forme des équations de Lagrange généralisées;

$$\begin{aligned}
 M = & \sum_1^n \frac{1}{\frac{\partial^2 H}{\partial x_k^{(\nu)^2}} \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x_k'} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}} - Q_k \right\}^2 \\
 & + \sum_1^n \frac{1}{\frac{\partial^2 H}{\partial y_k^{(\nu)^2}} \left\{ \frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial y_k'} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}} - R_k \right\}^2 \\
 & + \sum_1^n \frac{1}{\frac{\partial^2 H}{\partial z_k^{(\nu)^2}} \left\{ \frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial z_k'} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}} - S_k \right\}^2
 \end{aligned}$$

prend une valeur minimum, pour les valeurs, comprises parmi toutes les valeurs de $x_k^{(2\nu)}, y_k^{(2\nu)}, z_k^{(2\nu)}$, — les valeurs

$$x_k, y_k, z_k, x_k', y_k', z_k', \dots, x_k^{(2\nu-1)}, y_k^{(2\nu-1)}, z_k^{(2\nu-1)}$$

étant conservées —, qui satisfont aux équations du mouvement de Lagrange, lorsque les quantités

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_k^{(\nu)^2}}, \frac{\partial^2 H}{\partial y_k^{(\nu)^2}}, \frac{\partial^2 H}{\partial z_k^{(\nu)^2}}$$

sont toutes négatives, et que les conditions données pour les coordonnées sont conservées pour les systèmes de valeurs comparés.

Le développement du principe de la moindre action généralisé rend nécessaire la séparation de la forme de Lagrange et de la forme de Jacobi, et j'obtiens la forme la plus générale de ce principe exprimée par l'équation

$$\begin{aligned}
 & \delta \int_{t_0}^t \sum_1^\mu \left\{ p_s' \left[\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s''} + \dots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right] \right. \\
 & \left. + p_s'' \left[\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \dots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right] + \dots + p_s^{(\nu)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right\} dt \\
 = & - \int_{t_0}^t \delta E dt - \int_{t_0}^t \sum_1^\mu P_s \delta p_s dt + \left[\sum_1^\mu \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \dots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right) \delta p_s \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \dots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right) \delta p_s' + \dots + \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \delta p_s^{(\nu-1)} \right\} \right]_{t_0}^t,
 \end{aligned}$$

où l'on suppose que H ne contient pas explicitement le temps t , équation qui, dans le cas où le potentiel cinétique ne renferme que les dérivées premières des coordonnées, et où par conséquent $E = h - \int \sum_1^\mu P_i dp_i$, se transforme en

$$\delta \int_{t_0}^t \sum_1^\mu p_i' \frac{\partial H}{\partial p_i'} dt = - \int_{t_0}^t \delta E dt - \int_{t_0}^t \sum_1^\mu P_i \delta p_i dt + \left[\sum_1^\mu \frac{\partial H}{\partial p_i'} \delta p_i \right]_{t_0}^t,$$

et qui dans le cas où H désigne la fonction caractéristique de Hamilton, fournit le principe de la moindre action.

Il est alors facile de trouver la source des théorèmes qui, dans la mécanique habituelle définissent les deux principes qui restent encore; d'abord *comme principe généralisé de la conservation des aires l'on a ce théorème: Lorsque le potentiel cinétique a la forme*

$$H = \omega(x_k^2 + y_k^2, x_k'^2 + y_k'^2, \dots, x_k^{(\nu)^2} + y_k^{(\nu)^2}) \\ + \Omega(t, R_1, R_1', \dots, R_1^{(\nu)}, R_2, R_2', \dots, R_2^{(\nu)}, \dots),$$

où ω et Ω sont des fonctions quelconques des grandeurs entre parenthèse et de z_1, z_2, \dots, z_n , et où R_1, R_2, \dots désignent des fonctions de $t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ pour lesquelles on a

$$\sum_1^n \left(y_k \frac{\partial R_\mu}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial R_\mu}{\partial y_k} \right) = 0,$$

et lorsqu'en outre les forces extérieures aussi bien que les fonctions $f_{\mu k}, \varphi_{\mu k}, \psi_{\mu k}$, qui définissent les contraintes du système, satisfont aux conditions

$$\sum_1^n (y_k Q_k - x_k R_k) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_1^n (y_k f_{\mu k} - x_k \varphi_{\mu k}) = 0,$$

on obtient alors comme intégrale des équations du mouvement l'équation différentielle du $(2\nu - 1)^{\text{ème}}$ ordre

$$\sum_1^n \sum_1^\nu (-1)^r \sum_0^{r-1} (-1)^\lambda \left\{ y_k^{(\lambda)} \frac{d^{r-\lambda-1}}{dt^{r-\lambda-1}} \frac{\partial \omega}{\partial x_k^{(r)}} - x_k^{(\lambda)} \frac{d^{r-\lambda-1}}{dt^{r-\lambda-1}} \frac{\partial \omega}{\partial y_k^{(r)}} \right\} = c,$$

qui pour le potentiel habituel se transforme en le théorème connu des aires, et qui peut aussi être aisément étendu au cas où dans le potentiel cinétique l'énergie actuelle et l'énergie potentielle ne sont pas encore séparées. Enfin nous obtenons le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité, étendu à des potentiels cinétiques arbitraires sous la forme suivante:

Lorsque le potentiel cinétique a la forme

$$H = \omega(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2, x_k'^2 + y_k'^2 + z_k'^2, \dots, x_k^{(\nu)2} + y_k^{(\nu)2} + z_k^{(\nu)2})$$

$$+ \omega_1(t, x_p - x_\sigma, \dots, x_p^{(\nu)} - x_\sigma^{(\nu)}, y_p - y_\sigma, \dots, y_p^{(\nu)} - y_\sigma^{(\nu)}, z_p - z_\sigma, \dots, z_p^{(\nu)} - z_\sigma^{(\nu)}),$$

et que ω est une fonction linéaire des arguments $x_k^{(r)2} + y_k^{(r)2} + z_k^{(r)2}$ à coefficients constants a_{kr} , entre les grandeurs

$$2(a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \dots + a_{nr}x_n) = A_r, \quad 2(a_{1r}y_1 + a_{2r}y_2 + \dots + a_{nr}y_n) = B_r,$$

$$2(a_{1r}z_1 + a_{2r}z_2 + \dots + a_{nr}z_n) = C_r$$

ont lieu des relations

$$A_0 - A_1'' + A_2''' - \dots + (-1)^\nu A_\nu^{(2\nu)} - \sum_1^n Q_k = 0,$$

$$B_0 - B_1'' + B_2''' - \dots + (-1)^\nu B_\nu^{(2\nu)} - \sum_1^n R_k = 0,$$

$$C_0 - C_1'' + C_2''' - \dots + (-1)^\nu C_\nu^{(2\nu)} - \sum_1^n S_k = 0;$$

pour $a_{1r} = -\frac{m_1}{2}$, $a_{2r} = -\frac{m_2}{2}$, \dots , $a_{nr} = -\frac{m_n}{2}$, $A_r = -MA$, $B_r = -MB$, $C_r = -MC$, les équations différentielles du mouvement du centre de gravité sont

$$M\{-A + A'' - \dots + (-1)^\nu A^{(2\nu)}\} - \sum_1^n Q_k = 0,$$

$$M\{-B + B'' - \dots + (-1)^\nu B^{(2\nu)}\} - \sum_1^n R_k = 0,$$

$$M\{-C + C'' - \dots + (-1)^\nu C^{(2\nu)}\} - \sum_1^n S_k = 0,$$

et par conséquent

$$\bar{H} = -\frac{M}{2}\{A^2 + B^2 + C^2 + A'^2 + B'^2 + C'^2 + \dots + A^{(\nu)2} + B^{(\nu)2} + C^{(\nu)2}\}$$

est le potentiel cinétique du mouvement du centre de gravité, lorsque la masse totale est concentrée en ce point et que les composantes de la force $\sum_1^n Q_k$, $\sum_1^n R_k$, $\sum_1^n S_k$ agissent sur le point.

Après avoir établi les principes généralisés de la mécanique je me suis appliqué à une recherche purement analytique, afin de voir jusqu'à quel point sont liés à la forme que donne par hypothèse Helmholtz au potentiel cinétique, les théorèmes, énoncés dans son célèbre travail *die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung*, sur la relation entre les forces P_i d'une part, telles qu'elles sont données par les équations de Lagrange comme fonctions des coordonnées et de leur dérivées, et entre les accélérations, les vitesses et les coordonnées d'autre part. Dans l'hypothèse d'une composition arbitraire du potentiel cinétique, lorsque les dérivées s'étendent jusqu'à l'ordre ν , j'obtiens les relations suivantes tout à fait analogues

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_\sigma^{(2\nu)}} = \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_i^{(2\nu)}},$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_i^{(2\nu-1)}} = (-1)^{\nu+1} 2 \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_i^{(\nu)} \partial p_\sigma^{(\nu-1)}} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\sigma^{(\nu)} \partial p_i^{(\nu-1)}} \right\},$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} + \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_i^{(2\nu-1)}} = 2\nu \frac{d}{dt} \frac{\partial P_i}{\partial p_\sigma^{(2\nu)}} = 2\nu \frac{d}{dt} \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_i^{(2\nu)}},$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_\sigma^{(2\nu-2)}} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_i^{(2\nu-2)}} = \frac{2\nu-1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial P_i}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_i^{(2\nu-1)}} \right\}$$

etc. et enfin

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_i} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}}{\partial p_i'} - \frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_i}}{\partial p_\sigma'} \right] - \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}}{\partial p_i''} - \frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_i}}{\partial p_\sigma''} \right] + \dots \\ &\quad - (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left[\frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}}{\partial p_i^{(\nu)}} - \frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_i}}{\partial p_\sigma^{(\nu)}} \right]; \end{aligned}$$

après avoir ainsi démontré que les théorèmes de Helmholtz, dont il a donné d'importantes interprétations en Physique et en Mécanique, n'ont rien à faire avec le caractère que possède le potentiel cinétique de dépendre seulement des dérivées premières des coordonnées, je puis aborder la démonstration du théorème relatif au potentiel cinétique restreint, énoncé par lui sans preuve, et qui repose, ainsi qu'il le fait ressortir, sur la théorie des fonctions potentielles dans un espace à trois dimensions, théorème d'après lequel, lorsque les expressions de la force P_s satisfont aux équations de condition, il existe toujours un potentiel cinétique, au moyen duquel les forces peuvent s'exprimer sous la forme de Lagrange. En vue de simplifier l'exposition j'ai développé cette démonstration seulement pour des potentiels cinétiques au sens de Helmholtz et pour deux coordonnées indépendantes, mais on peut par la même voie en établir la légitimité pour des potentiels cinétiques de forme toute générale. En employant les relations précédentes entre P_s et les coordonnées, vitesses, etc., l'énoncé relatif à l'existence d'un potentiel cinétique peut être exprimé comme il suit: *Lorsque les expressions P_s sont des fonctions de $p_1, p_2, p'_1, p'_2, p''_1, p''_2$, linéaires par rapport aux dérivées secondes des coordonnées, telles que les trois équations de condition*

$$\frac{\partial P_s}{\partial p''_\sigma} = \frac{\partial P_\sigma}{\partial p''_s}, \quad \frac{\partial P_s}{\partial p'_\sigma} + \frac{\partial P_\sigma}{\partial p'_s} = \frac{d}{dt} \frac{\partial P_\sigma}{\partial p''_s}, \quad \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial P_s}{\partial p'_\sigma} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p'_s} \right\}$$

soient satisfaites, il existe toujours une fonction H , ne renfermant pas t , des grandeurs p_1, p_2, p'_1, p'_2 , qui vérifie les deux équations différentielles

$$P_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p'_1}, \quad P_2 = -\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p'_2}.$$

La démonstration du théorème peut être effectuée en mettant P_s sous la forme

$$P_s = f_{0s}(p_1, p_2, p'_1, p'_2) + f_{1s}(p_1, p_2, p'_1, p'_2)p''_1 + f_{2s}(p_1, p_2, p'_1, p'_2)p''_2$$

et en tirant des équations de conditions ci-dessus les relations entre les dérivées des fonctions f_{0s}, f_{1s}, f_{2s} , à l'aide desquelles l'on intégrera les équations de Lagrange précédentes regardées comme équations aux dérivées partielles en H , et de la sorte l'on pourra établir, non seulement l'existence du potentiel cinétique, mais encore sa forme.

A cette recherche se rattache la question des transformations analytiques du potentiel cinétique. Dans son travail déjà cité Helmholtz a fait ressortir deux cas d'équations du mouvement où se présente une diminution dans le nombre des coordonnées, et cela non comme d'habitude parceque la liberté du mouvement du système est soumis à des restrictions, qui s'expriment par des équations entre les coordonnées, mais plutôt à cause de la propriété spéciale du potentiel cinétique et à cause de la nature des équations du mouvement de Lagrange. L'hypothèse, que le potentiel cinétique $H = -T - U$ ne renferme pas p_1, p_2, \dots, p_ρ et que les forces extérieures correspondantes s'évanouissent, permit à Helmholtz de conclure, qu'en éliminant $p'_1, p'_2, \dots, p'_\rho$ entre les équations de Lagrange correspondantes, les $\mu - \rho = \sigma$ équations du mouvement restantes prennent, quand on a posé $p_{\rho+\sigma} = p_\sigma$, la forme

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_\sigma} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p'_\sigma} = \mathfrak{P}_\sigma, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, \sigma)$$

où

$$\mathfrak{H} = (H) - c_1(p'_1) - c_2(p'_2) - \dots - c_\rho(p'_\rho),$$

les grandeurs entre parenthèses désignant les valeurs que doivent prendre ces grandeurs après que l'on a exécuté la substitution et c_1, \dots, c_ρ étant des constantes d'intégration. Le potentiel cinétique \mathfrak{H} renferme ici aussi des termes du premier degré par rapport aux vitesses, et ce cas, par une analogie donnée par la mécanique des corps pondérables, ainsi que d'autres cas appartenant à la physique où le potentiel cinétique renferme aussi des termes linéaires par rapport aux vitesses, Helmholtz les nomme *cas à mouvements cachés*, cas sur lesquels lui aussi bien que HERTZ ont édifié une belle et vaste théorie. Outre ce cas Helmholtz en fait ressortir encore un, qui permet d'effectuer une élimination, à savoir où les forces extérieures P_1, P_2, \dots, P_ρ sont continuellement nulles et où dans le potentiel cinétique les dérivées premières des coordonnées p_1, p_2, \dots, p_ρ ne se présentent au second degré que multipliées entr'elles; il montre que les équations du mouvement restantes prennent encore la forme de Lagrange et que le potentiel cinétique représente alors une fonction arbitrairement compliquée des dérivées des coordonnées restantes, et il nomme ce cas *le problème incomplet*.

Ensuite j'attaque le problème de l'élimination des coordonnées entre les équations du mouvement de Lagrange d'une manière tout à fait générale en considérant ma forme généralisée de ces équations, mais, pour simplifier l'exposition, je suppose encore que le potentiel cinétique renferme seulement les dérivées premières des coordonnées. Je trouve d'abord que la condition nécessaire et suffisante pour que les équations du mouvement de Lagrange correspondant aux coordonnées p_1, \dots, p_ρ soient des dérivées exactes, prises par rapport au temps, de fonctions de toutes les coordonnées et des dérivées premières de celles-ci, ne renfermant pas les coordonnées p_1, \dots, p_ρ elles-mêmes, est que le potentiel cinétique ait la forme

$$H = p'_1 \bar{\omega}_1 + \dots + p'_\rho \bar{\omega}_\rho + p'_1 \int \left(\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial p_1} dp_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\omega}_\rho}{\partial p_1} dp_\rho \right) + \dots \\ + p'_\sigma \int \left(\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial p_\sigma} dp_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\omega}_\rho}{\partial p_\sigma} dp_\rho \right) + \Omega(p_1, \dots, p_\sigma, p'_1, \dots, p'_\sigma, p'_1, \dots, p'_\rho),$$

où Ω est une fonction quelconque des grandeurs dans la parenthèse et où $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_\rho$ désignent des fonctions quelconques de $p_1, \dots, p_\rho, p_1, \dots, p_\sigma$, qui ne sont soumises qu'à la seule condition

$$\frac{\partial \bar{\omega}_{r_1}}{\partial p_{r_2}} = \frac{\partial \bar{\omega}_{r_2}}{\partial p_{r_1}}.$$

Alors les σ équations du mouvement ultérieures, lorsque des ρ premières, qui prennent la forme

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p'_1} = h_1, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial p'_2} = h_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial p'_\rho} = h_\rho,$$

l'on tire les grandeurs $p'_1, p'_2, \dots, p'_\rho$ comme fonctions de $p_1, \dots, p_\sigma, p'_1, \dots, p'_\sigma$, que l'on opère les substitutions, et que l'on pose

$$\mathfrak{H} = (\Omega) - h_1(p'_1) - h_2(p'_2) + \dots - h_\rho(p'_\rho),$$

se transforment de nouveau en la forme de Lagrange

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_s} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p'_s} = \mathfrak{P}_s.$$

D'où ce résultat: Dans le cas du potentiel cinétique dans la mécanique des

masses pondérables le cas du mouvement caché considéré par Helmholtz, pour lequel le potentiel cinétique doit être indépendant de certaines des coordonnées, est le cas unique où les équations de Lagrange correspondantes se transforment en dérivées exactes prises par rapport au temps et où — ce qui est alors toujours le cas — on peut effectuer une élimination des coordonnées telle que les équations du mouvement résultantes prennent encore la forme de Lagrange.

D'une manière analogue j'étudie tous les cas, dans lesquels une série d'équations du mouvement d'un système, où les forces extérieures sont nulles, jouit de cette propriété que l'on peut éliminer les coordonnées et leurs dérivées, et, par conséquent, sont aussi résolus tous les cas du mouvement caché généralisé et les problèmes incomplets, où l'on fait l'hypothèse de potentiels cinétiques qui ne dépendent que des coordonnées et de leurs dérivées premières, et cela d'ailleurs d'une manière arbitraire.

Maintenant pour traiter sur un exemple de la mécanique des masses pondérables le cas où certaines des équations du mouvement de Lagrange se transforment en dérivées exactes prises par rapport au temps, j'étudie d'abord le mouvement de trois points matériels m_1, m_2, m_3 , dont les coordonnées sont soumises à une équation de condition

$$z_1 = f(x_1, y_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3),$$

et dont les forces intérieures sont données par une fonction des forces

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3).$$

J'obtiens ce théorème que: la condition nécessaire et suffisante pour que, dans le mouvement de trois points matériels, dont les coordonnées sont soumises à une équation de condition, parmi les huit équations du mouvement il y en ait deux qui se transforment en dérivées exactes prises par rapport au temps, est que l'équation de condition ait la forme

$$z_1 = ax_1 + by_1 + \omega,$$

où a et b sont des constantes et où ω ne dépend que de $x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$, tandis que la fonction des forces a la forme

$$U = (z_1 - ax_1 - by_1 - \omega)F_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3) \\ + F(z_1 - ax_1 - by_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3);$$

dans ce cas, les six équations du mouvement pour les coordonnées $x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ prennent encore la forme de Lagrange pour le potentiel cinétique donné par l'expression

$$\mathfrak{H} = -\frac{m_1}{2(1+a^2+b^2)} \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + m_1 \frac{ac_1+bc_2}{1+a^2+b^2} \frac{d\omega}{dt} - \frac{3}{2} m_1 \frac{c_1^2(1+b^2) - 2abc_1c_2 + c_2^2(1+a^2)}{1+a^2+b^2} \\ - \frac{m_2}{2}(x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2) - \frac{m_3}{2}(x_3'^2 + y_3'^2 + z_3'^2) - F(\omega, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3).$$

Une application immédiate de ce théorème montre que:

Lorsque de trois points l'un est soumis par une liaison avec les deux autres à la condition que sa distance à un plan fixe reste toujours proportionnelle à la distance entre eux des deux autres points matériels, ces derniers s'attirant suivant la loi de Newton, le mouvement de ce point a lieu suivant la loi de Weber.

On obtient des théorèmes analogues dans le cas où il y a deux équations de condition entre les six coordonnées.

Après avoir résolu toutes ces questions, je me suis appliqué de nouveau à l'étude de la généralisation des principes mécaniques dans le cas du potentiel cinétique général, et, lorsque

$$\varphi = \int_{t_0}^t \left(H + \sum_1^{\mu} P_\lambda p_\lambda \right) dt$$

est défini comme fonction caractéristique, je trouve pour généralisation de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre de Hamilton, l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_1^{\mu} p_s' \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} + \sum_1^{\mu} p_s'' \frac{\partial \varphi}{\partial p_s'} + \dots + \sum_1^{\mu} p_s^{(\nu-1)} \frac{\partial \varphi}{\partial p_s^{(\nu-2)}} \\ + \sum_1^{\mu} \omega_s \left(t, p_1, \dots, p_\mu, \dots, p_1^{(\nu-1)}, \dots, p_\mu^{(\nu-1)}, \frac{\partial \varphi}{\partial p_1^{(\nu-1)}}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial p_\mu^{(\nu-1)}} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_s^{(\nu-1)}} \\ = H(t, p_1, \dots, p_\mu, \dots, p_1^{(\nu-1)}, \dots, p_\mu^{(\nu-1)}, \dots, \omega_1, \dots, \omega_\mu) + \sum_1^{\mu} P_s p_s$$

Mais le système complet d'équations différentielles de Hamilton trouve aussi une généralisation essentielle au moyen du théorème suivant:

Lorsque des équations

$$\frac{\partial H}{\partial p'_\rho} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p''_\rho} + \dots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\rho} = p_{\rho 2\nu-1},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p''_\rho} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p'''_\rho} + \dots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}} \frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\rho} = p_{\rho 2\nu-2},$$

..... (pour $\rho = 1, 2, \dots, \mu$)

$$\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu-1)}_\rho} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\rho} = p_{\rho \nu+1},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\rho} = p_{\rho \nu},$$

dont les $\nu - 1$ premières sont respectivement linéaires en $p_\rho^{(2\nu-1)}$, $p_\rho^{(2\nu-2)}$, ..., $p_\rho^{(\nu+1)}$, l'on tire les $\mu\nu$ grandeurs $p_\rho^{(\nu)}$, $p_\rho^{(\nu+1)}$, ..., $p_\rho^{(2\nu-1)}$ exprimées au moyen de p_ρ , p'_ρ , ..., $p_\rho^{(\nu-1)}$, ..., $p_{\rho 2\nu-1}$, $p_{\rho 2\nu-2}$, ..., $p_{\rho \nu}$ et qu'on les porte dans l'expression de l'énergie, que l'on désignera par (E) , alors les équations du mouvement de Lagrange généralisées peuvent être remplacées par le système généralisé d'équations différentielles hamiltoniennes

$$\frac{dp_{\rho 2\nu-1}}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial p_\rho}, \quad \frac{dp_{\rho 2\nu-2}}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial p'_\rho}, \quad \dots, \quad \frac{dp_{\rho \nu}}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial p_\rho^{(\nu-1)}},$$

$$\frac{dp_\rho^{(\nu-1)}}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_{\rho \nu}}, \quad \frac{dp_\rho^{(\nu-2)}}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_{\rho \nu+1}}, \quad \dots, \quad \frac{dp_\rho}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_{\rho 2\nu-1}}.$$

Qu'il me soit permis, finalement, d'attirer l'attention sur le théorème suivant, provenant de mes recherches sur la nature des intégrales de ce système généralisé d'équations différentielles de Hamilton.

Si le potentiel cinétique est une fonction algébrique du temps, des coordonnées et de leurs dérivées prises par rapport au temps jusqu'à l'ordre ν inclus, et si le système généralisé d'équations différentielles de Hamilton possède une fonction intégrale algébrique, celle-ci est elle-même ou bien une

fonction rationnelle du potentiel cinétique, du temps, des coordonnées et de leurs dérivées prises par rapport au temps jusqu'à l'ordre $2\nu - 1$ inclus, ou bien c'est une fonction composée algébriquement de pareilles fonctions intégrales rationnelles.

Mais j'ai déjà trop longuement profité de votre patience. — Je serais très heureux si l'une ou l'autre des remarques faites dans les précédentes communications pouvait vous intéresser. — Pour l'instant veuillez etc. etc.

Signé: *Leo Königsberger.*
