

SUR LES SÉRIES DE POLYNOMES ET DE FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

EMILE BOREL

à PARIS.

Introduction.

1. L'étude des séries de fractions rationnelles, qui renferment comme cas particulier les séries de polynomes, paraît devoir suivre naturellement la théorie des séries de puissances. Il y a cependant près d'un siècle que cette dernière théorie est achevée dans ses traits essentiels et l'on ne sait presque rien de général sur les séries de fractions rationnelles. Ce fait étonnera moins, si l'on se rappelle certains résultats récents, obtenus notamment par MM. RUNGE et PAINLEVÉ et sur lesquels nous reviendrons: retenons-en simplement ce fait, que les séries de fractions rationnelles et même les séries de polynomes sont un instrument analytique infiniment plus général que les séries de puissances; cette grande généralité peut être un avantage pour certaines applications; mais elle crée des difficultés presque insurmontables dans la recherche des propriétés communes à toutes les séries considérées.

2. Aussi paraît-il nécessaire, si l'on désire que ces séries puissent être utilisées commodément, de ne pas les considérer dans toute leur généralité, mais d'étudier tout d'abord parmi elles des classes plus ou moins étendues.

Dans cet ordre d'idées, on doit signaler tout d'abord l'étude déjà ancienne de séries dont les termes sont proportionnels à des polynomes P_n , donnés à l'avance et dépendant seulement de l'entier n . Sans méconnaître l'intérêt de ces recherches, ni leur grande importance dans bien des appli-

cations, on doit observer qu'à chaque classe remarquable de polynomes correspond une théorie particulière, et qu'on ne peut guère espérer obtenir par cette voie des résultats un peu généraux.

A un autre point de vue, rappelons que, à la suite des travaux mémorables de WEIERSTRASS, M. MITTAG-LEFFLER a donné, pour représenter les fonctions analytiques uniformes dont les points singuliers sont dénombrables, des séries de fractions rationnelles, d'une forme spéciale appropriée au but à atteindre. Pour la classe de fonctions analytiques considérées, ces séries fournissent un mode de représentation très remarquable par ce double caractère: la série converge dans tout le domaine d'existence de la fonction et les singularités de cette dernière y sont mises en évidence de la manière la plus simple.

Des séries de fractions rationnelles plus compliquées ont été étudiés, notamment par MM. POINCARÉ, GOURSAT, LERCH, PRINGSHEIM; j'en ai repris l'étude dans ma thèse,¹ à un point de vue nouveau, sur lequel j'aurai à revenir dans la première partie de ce mémoire.

Enfin, il y a peu de temps, M. MITTAG-LEFFLER a attiré l'attention sur certaines séries très remarquables de polynomes et ses recherches ont été suivies de plusieurs autres, dont nous parlerons plus loin.

3. Je voudrais essayer d'esquisser ici une théorie générale des séries de polynomes et de fractions rationnelles, et de leurs applications à la théorie des fonctions, en m'inspirant des idées que j'ai développées dans ma thèse et dans mes Leçons sur la théorie des fonctions. J'indiquerai, chemin faisant, un certain nombre de résultats nouveaux que j'ai obtenus depuis un an. Dans la recherche, j'ai été guidé par des idées que j'ai exposées dans mon Mémoire sur les séries divergentes; je n'y reviendrai pas, me réservant d'étudier plus tard les rapports de ma théorie des séries sommables avec le sujet de ce mémoire. Les principaux résultats nouveaux de ce mémoire ont été communiqués à l'Académie des sciences les 23 mai 1899, 17 et 23 avril 1900; j'en ai exposé aussi une partie dans un cours que j'ai eu l'honneur de faire au Collège de France pendant l'hiver 1899—1900 (Fondation Claude-Antoine Peccot).

¹ *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* Annales de l'Ecole normale, 1895.

4. Ce mémoire est divisé en trois parties.

Dans la première, j'étudie les séries générales de fractions rationnelles au moyen de méthodes analogues à celles que j'ai appliquées dans ma thèse aux séries de fractions simples. Je cherche à obtenir des résultats aussi étendus que possible au moyen seulement d'hypothèses *d'inégalités* relatives aux numérateurs. Des hypothèses de cette nature sont d'ailleurs indispensables si l'on veut éviter qu'il puisse n'y avoir aucun rapport entre les singularités des séries et les singularités des fonctions qu'elles représentent.

Dans la seconde partie, j'étudie avec soin la mesure de la convergence des développements en série de polynômes de M. MITTAG-LEFFLER. Cette étude pourra rendre, je pense, d'importants services, dans les applications de ces séries. Mais mon but principal est d'obtenir, à l'aide de ces séries de polynômes, des propriétés nouvelles des séries de fractions rationnelles étudiées dans la première partie.

Dans la troisième partie enfin, j'indique comment les résultats précédents suggèrent naturellement l'idée d'une généralisation de la théorie du prolongement analytique et j'esquisse, dans ses traits essentiels, cette théorie nouvelle. J'espère indiquer là une direction dans laquelle il y a encore beaucoup à faire et où d'importants résultats pourront être obtenus, soit dans le champ des variables réelles, soit dans le champ des variables complexes.

Je termine par une brève conclusion, dans laquelle j'indique les conséquences que me paraissent avoir les résultats de ce mémoire, au point de vue de la notion de fonction et les recherches principales qu'il y aurait encore à faire.

PREMIÈRE PARTIE.

Les séries de fractions rationnelles.

5. Nous avons déjà remarqué qu'il y a certainement bien peu de propriétés communes à toutes les séries de fractions rationnelles; c'est une conséquence du fait qu'il est possible d'introduire beaucoup d'arbitraire

dans les représentations connues des fonctions analytiques par de telles séries. Il est donc indispensable de faire, sur les séries que l'on étudie, certaines hypothèses restrictives; pour que le lecteur se rende bien compte de la mesure dans laquelle ces hypothèses sont nécessaires, il ne sera pas inutile de rappeler rapidement quelques résultats relatifs à la représentation des fonctions analytiques par les séries de fractions rationnelles.

6. WEIERSTRASS a le premier démontré la possibilité de former des séries de fractions rationnelles représentant des fonctions analytiques différentes dans leurs diverses régions de convergence. Une méthode déduite par M. APPELL de la considération de l'intégrale de CAUCHY permet d'obtenir ce résultat sous la forme la plus simple.¹ Etant donnés, par exemple, trois cercles tels que la région du plan extérieure aux trois cercles se compose de deux domaines séparés D_1 et D_2 , et deux fonctions analytiques F_1 et F_2 régulières respectivement dans ces deux domaines, on peut trouver une série

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{(n)}}{(z-a)^n} + \frac{B^{(n)}}{(z-\beta)^n} + \frac{C^{(n)}}{(z-\gamma)^n}$$

convergeant uniformément et absolument dans D_1 et dans D_2 , et telle que l'on ait

$$F(z) = F_1(z)$$

dans tout D_1 et

$$F(z) = F_2(z)$$

dans tout D_2 .

Ce résultat conduit à exclure de nos recherches les séries renfermant des puissances de $\frac{1}{z-a}$ dont l'exposant grandit indéfiniment.²

¹ Acta mathematica, t. 1.

² En effet dans le cas où une telle série serait convergente pour toute valeur de $\frac{1}{z-a}$, la difficulté du texte ne se présenterait pas, mais on aurait alors, si a est isolé, un point singulier essentiel en a , cas bien connu. Un cas plus général a été étudié par M. MITTAG-LEFFLER dans le tome 4 des Acta, et enfin le cas où les points singuliers essentiels seraient aussi denses que le sont les pôles dans les séries que nous étudierons est bien plus compliqué et son étude doit suivre celle que nous tentons ici.

Nous supposons donc que, dans les divers termes de la série, le degré de multiplicité de chaque pôle est limité. Mais cette hypothèse n'est pas suffisante; on peut, en effet, comme l'a montré M. PAINLEVÉ former des séries de fractions rationnelles *n'ayant que des pôles simples* et représentant, dans des régions séparées du plan, des fonctions très diverses.

7. Voici un exemple, que j'ai donné, dans mon Cours du Collège de France, pour montrer quels résultats singuliers on peut obtenir, même avec des pôles simples. Désignons par $\varphi(m)$ la fonction arithmétique bien connue depuis GAUSS et posons

$$F(z) = \sum \frac{\varphi(m)z^m}{1 - z^m}.$$

Cette série est manifestement convergente pour toute valeur de z dont le module est inférieur à un ; elle converge absolument et uniformément dans tout cercle de rayon plus petit que un . On a d'ailleurs

$$F(z) = \sum [\sum \varphi(\delta_m)] z^m = \sum m z^m = \frac{z}{(1 - z)^2},$$

en désignant par δ_m les divers diviseurs de l'entier m .

Ainsi la série $F(z)$, qui n'a que des pôles simples, représente une fonction analytique dont l'unique singularité est un pôle double. Ce pôle double est d'ailleurs le seul point singulier de la fonction sur le cercle de rayon un , alors que les points singuliers des termes de la série forment un ensemble dense sur tout arc de ce cercle.

On pourrait varier à l'infini les exemples; mais il est temps d'aborder notre sujet principal; nous en avons dit assez pour justifier la nécessité d'hypothèses restrictives; nous ne prétendons pas d'ailleurs que celles que nous serons amenés à faire soient les seules qui conduisent à des résultats simples; mais on se convaincra aisément qu'elles sont presque toutes imposées par la nature de la question.

8. Soit

$$(1) \quad F(z) = \sum \frac{P_n(z)}{R_n(z)}$$

une série de fractions rationnelles. Nous supposons tout d'abord que les

degrés des polynomes P_n et R_n sont limités; ¹ si la série est convergente pour au moins un point $z = z_0$, nous poserons $z = z_0 + \frac{1}{z'}$ et il viendra

$$F(z) = \sum \frac{P_n(z_0)}{R_n(z_0)} + \sum \left[\frac{P_n\left(z_0 + \frac{1}{z'}\right)}{R_n\left(z_0 + \frac{1}{z'}\right)} - \frac{P_n(z_0)}{R_n(z_0)} \right].$$

Dès lors, dans la seconde somme, on obtiendra visiblement des fractions rationnelles telles que le degré du numérateur soit *inférieur* à celui du dénominateur; nous pouvons donc supposer, afin de ne pas multiplier les notations, que cette condition est remplie par la série (1). Nous supposons de plus, *bien que ce ne soit pas indispensable*, que les modules des zéros de tous les polynomes $R_n(z)$ sont supérieurs à un nombre fixe R . Cela revient à supposer que le point z_0 n'est pas un point limite de l'ensemble formé par tous ces zéros. Enfin, nous désignerons par m le degré le plus élevé de tous les polynomes $R_n(z)$ et nous supposons que, dans chacun d'eux, le coefficient de la plus haute puissance de z est égal à l'unité. On pourra donc écrire

$$(2) \quad P_n(z) = A_n^{(1)} z^{m-1} + A_n^{(2)} z^{m-2} + \dots + A_n^{(m-1)} z + A_n^{(m)},$$

$$(3) \quad R_n(z) = z^m + B_n^{(1)} z^{m-1} + B_n^{(2)} z^{m-2} + \dots + B_n^{(m)},$$

certains des coefficients A et B pouvant être nuls. L'hypothèse que nous avons faite sur les zéros de $R_n(z)$ entraîne visiblement

$$(4) \quad |B_n^{(k)}| < \frac{m}{k(m-k)} R^k.$$

Notre hypothèse fondamentale est maintenant la suivante; il existe une série convergente à termes positifs

$$(5) \quad \sum u_n$$

telle que l'on ait

$$(6) \quad |A_n^{(k)}| < u_n^{m+1}.$$

¹ En ce qui concerne la possibilité de lever cette restriction, voir p. 351.

Nous allons voir que cette hypothèse permet d'étudier la série proposée, sans rien supposer sur la distribution dans le plan des zéros des $R_n(z)$. Posons

$$(7) \quad R_n(z) = (z - a_n)(z - b_n) \dots (z - l_n),$$

le nombre des lettres $a, b, \dots, l$ étant égal à m . Les divers nombres $a_n, b_n, \dots, l_n$ correspondant à la même valeur de n , ou à des valeurs différentes, peuvent être d'ailleurs distincts ou non; nous ne supposons rien à ce sujet.

Traçons un cercle ayant pour centre le point a_n et pour rayon hu_n , h étant une constante positive; il est clair que si le point z est extérieur à ce cercle, l'on aura:

$$(8) \quad |z - a_n| > hu_n,$$

Si donc le point z est extérieur à tous les cercles analogues C et intérieur au cercle de rayon R , on aura, en vertu de (2), (6), (7), (8),

$$(9) \quad \left| \frac{P_n(z)}{R_n(z)} \right| < \frac{u_n^{m+1}(R^{m-1} + R^{m-2} + \dots + R + 1)}{h^m u_n^m} < ku_n,$$

k étant un nombre fixe. La série (1) a donc ses termes respectivement inférieurs en module à ceux d'une série convergente à termes positifs. Elle converge donc absolument et uniformément pour toutes les valeurs de z qui satisfont à la condition énoncée. Mais existe-t-il de telles valeurs de z ? Nous allons montrer que l'on peut choisir le nombre h de telle manière que, dans toute région aussi petite que l'on veut donnée à l'avance, il existe, non seulement des *points de convergence*, mais des lignes de convergence *uniforme*.¹ Considérons en effet des droites parallèles à une direction déterminée quelconque et une perpendiculaire commune D à ces droites. Les points intérieurs aux divers cercles C que nous avons construits se projettent sur D suivant des segments dont la longueur est égale au diamètre

¹ Si l'on avait voulu seulement prouver l'existence de *points de convergence*, on aurait pu remplacer l'inégalité (8) par $|z - a_n| > h\sqrt{u_n}$ et l'inégalité (6) par $A_n^{(k)} < u^{\frac{m}{2}+1}$, inégalité moins restrictive.

de ces cercles; l'un de ces segments a donc pour longueur $2u_n$ et leur longueur totale est

$$2mh\sum u_n$$

et est par suite *finie*, la série $\sum u_n$ étant convergente.

Dès lors, étant donné sur D un segment AB aussi petit que l'on veut, il existe à l'intérieur de AB une infinité non dénombrable de points n'appartenant qu'à un *nombre limité* des segments considérés.¹ Soit P l'un de ces points, ne coïncidant avec la projection du centre d'aucun des cercles et soit Δ la perpendiculaire à D menée par le point P . Cette droite Δ a les propriétés suivantes: elle ne passe par aucun des points $a_n, \dots, l_n, \dots$ elle ne coupe qu'un nombre limité des cercles C . Dans ces conditions, la série (1) est absolument et uniformément convergente sur tout Δ . Il est en effet possible, pour étudier la convergence de cette série, de supprimer les termes, en nombre limité, qui correspondent² aux cercles C rencontrant Δ ; en effet, aucun de ces termes ne devient infini sur Δ , d'après la première des propriétés que nous avons reconnues à cette droite. Ces termes étant supprimés, les termes restants sont, en vertu des inégalités (9) et de la deuxième des propriétés de Δ , respectivement inférieurs en module aux termes d'une série convergente à termes positifs. Notre proposition est donc démontrée.

9. Il résulte de propositions bien connues que la somme de la série $F(z)$ est une fonction continue sur Δ , dont on obtient l'intégrale en intégrant la série terme à terme. La droite Δ sera dite une droite de continuité. Il existe donc des droites de continuité parallèles à toute direction, dans tout intervalle aussi petit que l'on veut donné à l'avance. Il en résulte, en particulier, que l'on peut construire un polygone de continuité différant aussi peu que l'on veut d'une courbe donnée à l'avance.

Relativement à la construction de courbes de continuité autres que

¹ Voir mes Leçons sur la théorie des fonctions, ch. III, pour la démonstration rigoureuse de ce point, que l'on peut regarder comme presque évident.

² Il est essentiel de remarquer que, si en un même point α coïncident une infinité de pôles $a_n, b_n, c_n, a_n'', \dots$, il correspond à chacun de ces pôles un cercle C différent; et, comme il n'y a qu'un nombre limité de cercles C rencontrant Δ , on devra supprimer seulement un nombre limité des termes dans lesquels $R_n(z)$ s'annule pour $z = \alpha$.

des droites, je renverrai aux détails que j'ai donnés dans ma thèse, où j'ai traité un cas particulier de la question qui vient de nous occuper.

10. Soit C une courbe de continuité fermée (courbe continue ou polygone, peu importe). Quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_C F(z) dz,$$

intégrale que nous savons avoir un sens?

La série uniformément convergente pouvant être intégrée terme à terme, on a

$$\int_C F(z) dz = \sum \int_C \frac{P_n(z)}{R_n(z)} dz = 2i\pi \sum_{n=1}^{n=\infty} (\Sigma \rho_n)$$

en désignant par $\Sigma \rho_n$ la somme des résidus de la fraction rationnelle $\frac{P_n(z)}{R_n(z)}$, relativement aux pôles intérieurs à C .

Il résulte de ce qui précède que la série :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (\Sigma \rho_n)$$

est convergente; mais il n'est pas inutile d'observer que l'on n'a pas le droit de supprimer les parenthèses qui groupent les résidus ρ_n correspondant à une même fraction rationnelle; il peut, en effet, fort bien arriver, que la série

$$\Sigma \rho_n,$$

soit *divergente*, la sommation étant étendue à tous les résidus, intérieurs à C , de tous les termes de la série $F(z)$, pris dans un ordre quelconque. Pour s'en rendre compte, il suffit d'observer que, si un même nombre α annule une infinité de $R_n(z)$, il peut arriver que la série dont les termes sont les résidus de toutes les fractions $\frac{P_n(z)}{R_n(z)}$ relativement à ce pôle soit *divergente*. Ce fait n'est nullement incompatible avec nos hypothèses, lesquelles ne portent que sur les coefficients des P_n . Supposant, pour fixer

les idées que le pôle a_n soit simple, le résidu de la fraction rationnelle $\frac{P_n(z)}{R_n(z)}$ relativement à ce pôle est, comme l'on sait

$$\frac{P_n(a_n)}{(a_n - b_n)(a_n - c_n) \dots (a_n - l_n)}.$$

Il est donc possible, les coefficients des P étant choisis, de prendre $a_n - b_n$, $a_n - c_n$, ..., $a_n - l_n$, ou même seulement l'une de ces différences assez petite pour que ce résidu dépasse tout nombre donné à l'avance. Si l'on procède de même pour tous les termes dans lesquels figure en dénominateur $z - a_n$ on voit que l'on peut rendre aussi divergente que l'on veut la série des résidus des diverses fractions relativement à un même pôle. Si ce pôle est intérieur au contour C , la série

$$\sum \rho_n$$

ne peut donc être convergente, si l'on ne considère pas ses termes comme convenablement groupés. Il est assez remarquable que le théorème fondamental de CAUCHY

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) dz = \sum \rho_n,$$

la somme étant étendue aux résidus intérieurs à C , s'applique, en un certain sens, à la fonction $F(z)$, même dans le cas où les divers pôles n'ont pas de résidus déterminés: quel que soit le contour C , pourvu que l'intégrale existe, la série divergente $\sum \rho_n$ devient convergente par un arrangement convenable de ses termes. Nous étudierons plus loin, à la fin de cette première partie, des cas où les résidus ont, pour chaque pôle, une existence individuelle et des propriétés encore plus précises.

11. Mais nous allons terminer d'abord ce que nous avons à dire des séries que nous considérons en ce moment; cherchons quelles conditions d'inégalité doivent être vérifiées pour que les séries obtenues par la dérivation terme à terme possèdent aussi des courbes de convergence.

Nous avons posé

$$F(z) = \sum \frac{P_n(z)}{R_n(z)};$$

nous écrirons

$$F'(z) = \sum \frac{P'_n(z) R_n(z) - R'_n(z) P_n(z)}{[R'_n(z)]^2}$$

et nous allons chercher quelles conséquences entraînent les égalités et inégalités de la page 314. Nous remplaçons seulement l'inégalité (6) par l'inégalité plus générale

$$(6') \quad |A_n^{(k)}| < u_n^\mu,$$

μ étant un nombre arbitraire que nous nous réservons de fixer ultérieurement.

Il est manifeste alors que, si l'on pose,

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{(1)} z^{m'-1} + A_n^{(2)} z^{m'-2} + \dots + A_n^{(m')}}{z^{m'} + B_n^{(1)} z^{m'-1} + \dots + B_n^{(m')}},$$

on aura tout d'abord

$$m' = 2m$$

et que, de plus, les A' et les B' vérifieront des inégalités tout à fait semblable aux inégalités (4) et (6') que vérifient les A et les B . En effet, dans l'inégalité (6') l'introduction d'un facteur constant dans le second membre n'a aucune importance, puisque l'essentiel est que la série

$$\sum u_n$$

soit convergente, ce qui ne dépend pas de la multiplication des u_n par une constante.

Le seul changement essentiel qu'éprouve la série lorsqu'on la remplace par sa dérivée est donc le changement de m en $2m$. On devra donc, pour pouvoir appliquer à la dérivée les résultats que nous avons obtenus pour la série, supposer que dans l'inégalité (6), m est remplacé par $2m$, c'est à dire que, dans (6'), l'on a

$$\mu \geq 2m + 1.$$

On verra de même que, si l'on a,

$$\mu \geq \lambda m + 1,$$

la série

$$F^{(\lambda)}(z) = \sum \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} \left(\frac{P_n(z)}{R_n(z)} \right)$$

possède des droites (et même des courbes) de convergence uniforme. On peut d'ailleurs, sur chacune de ces droites, intégrer la série terme à terme, ce qui justifie les notations $F'(z)$, ..., $F^{(\lambda)}(z)$ que nous avons adoptées pour désigner les séries obtenues en dérivant terme à terme la série $F(z)$.

12. Nous avons d'ailleurs fait observer que les droites de convergence uniforme peuvent être prises parallèles à une direction arbitraire et qu'il en existe une infinité non dénombrable dans tout intervalle, si petit qu'il soit. On peut ajouter qu'il existe une infinité de points tels que par chacun d'eux il passe une infinité de droites de convergence uniforme, intérieures à un angle quelconque donné à l'avance (voir mes Leçons sur la théorie des fonctions ch. V). Considérons l'un de ces points et les diverses droites de convergence qui y passent: *sur chacune d'elles la fonction $F(z)$ a la même dérivée $F'(z)$* . Si l'on prend deux droites de convergence uniforme rectangulaires, et les axes des x et des y parallèles à ces droites, la partie réelle u de $F(z)$, satisfait, en leur point d'intersection, à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

On pourrait convenir de dire que la fonction $F(z)$ est *quasi-monogène* et la fonction u *quasi-harmonique*. Pour nous borner à $F(z)$ on peut retenir que cette fonction a les propriétés suivantes: *elle est continue, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre λ au moins, sur une infinité non dénombrable de droites, parallèles à toute direction, dans tout intervalle; il existe d'ailleurs dans tout domaine une infinité non dénombrable de points par lesquels passent, dans tout angle, des droites de convergence en infinité non dénombrable; enfin, en tout point par lequel il passe plus d'une droite de convergence, la dérivée est la même dans toutes les directions où elle existe*. Il serait intéressant de rechercher *si une fonction satisfaisant à ces conditions peut être nulle sur un segment de droite sans être identiquement nulle*; mais c'est là une question que je n'ai pu résoudre, même en adjoignant l'hypothèse que *toutes les dérivées existent*, cas que nous allons étudier dans un instant. Si l'on résolvait par la négative la question que nous venons de poser,

on aurait généralisé beaucoup la notion de fonction analytique; nous devons nous contenter d'une généralisation bien moins étendue, qui nous a été suggérée en grande partie par les considérations précédentes et qui mettra peut être sur la voie de la solution complète.

13. Mais revenons aux dérivées successives de $F(z)$; nous avons vu que la condition de convergence, pour la dérivée d'ordre λ , peut s'écrire

$$(6') \quad |A_n^{(k)}| < u_n^\mu$$

avec

$$\mu \geq \lambda m + 1.$$

Supposons que l'inégalité (6') soit vérifiée quel que soit μ , à partir d'une certaine valeur de n (cette valeur de n est évidemment fonction de μ). Alors, quel que soit λ , il existe des droites sur lesquelles la série converge ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre λ inclusivement. On ne peut en conclure immédiatement qu'il existe des droites sur lesquelles la série converge ainsi que *toutes ses dérivées*; ce résultat est cependant exact, comme on s'en assurera aisément en reprenant les démonstrations qui précèdent.¹

On peut remarquer que l'on peut trouver, d'une infinité de manières, un système unique d'inégalités, entraînant les inégalités (6') pour toute

¹ On peut même aller plus loin; les inégalités

$$(1) \quad |A_n^{(k)}| < u_n^\mu$$

expriment que la série

$$(2) \quad \sum |A_n^{(k)}|^{\frac{1}{\mu}}$$

est convergente. Si dans les inégalités (1) les u_n dépendent de μ , mais sont toujours tels que la série $\sum u_n$ soit convergente, la série (2) est toujours convergente, quel que soit μ . Or l'ensemble des séries (2) que l'on obtient en donnant à μ des valeurs entières est visiblement tel (voir les travaux du P. DU BOIS REYMOND et le mémoire de M. HADAMARD dans le tome 18 des Acta mathematica) qu'il existe une série à termes positifs moins convergente que chacune d'elles. Si, pour ne pas compliquer les notations, on désigne cette série par $\sum u_n$, on aura, pour n assez grand, les inégalités (1), quel que soit μ , les u_n ne dépendant pas de μ .

valeur de μ (pourvu que n soit assez grand). Par exemple, on peut écrire :

$$|A_n^k| < e^{-u_n^h},$$

h étant un nombre positif quelconque. Mais nous ne pouvons nous attarder sur ces détails.

14. Nous allons rechercher maintenant comment se comporte la série que nous étudions, dans le voisinage d'un point quelconque du plan. Nous serons ainsi amenés, par la voie la plus simple, à connaître les propriétés spéciales des séries de fractions rationnelles qui restent convergentes après la décomposition en éléments simples. Mais occupons-nous d'abord des séries les plus générales que nous écrivons toujours

$$F(z) = \sum \frac{P_n(z)}{R_n(z)}$$

en supposant :

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{k=m} A_n^{(k)} z^{m-k},$$

$$R_n(z) = z^m + \sum_{k=1}^{k=m} B_n^{(k)} z^{m-k} = (z - a_n) \dots (z - l_n),$$

$$|A_n^k| < u_n^{m+1},$$

la série $\sum u_n$ étant convergente.

Cela posé soit α un point quelconque du plan; nous dirons que ce point α est un pôle d'ordre m pour la série $F(z)$ si l'un au moins des dénominateurs $R_n(z)$ est égal à $(z - \alpha)^m$; il résulte des inégalités relatives aux $A_n^{(k)}$ qu'il est alors possible de mettre la série $F(z)$ sous la forme

$$(10) \quad F(z) = \frac{A}{(z - \alpha)^m} + F_1(z),$$

A étant une constante et $F_1(z)$ une série analogue à $F(z)$, mais pour laquelle α n'est pas un pôle d'ordre m .

Nous dirons que A est le numérateur correspondant à α ; dans le cas où α n'est pas un pôle d'ordre m , nous conviendrons de dire que le numérateur correspondant est *zéro*; de cette manière à tout point α du plan correspond un nombre bien déterminé A . On a dès lors le théorème suivant.

Etant donné un point quelconque α et un chemin quelconque C aboutissant en ce point et sur lequel la série $F(z)$ converge, sauf peut être en α , si le produit $(z - \alpha)^m F(z)$ tend vers une limite lorsque z tend vers α en suivant le chemin C , cette limite est égale au numérateur correspondant A . De plus, il existe effectivement des chemins C aboutissant à α et tels que la limite considérée existe. Ces chemins C sont en infinité non dénombrable; la démonstration même fera voir combien d'arbitraire subsiste dans leur formation.

Il est manifeste qu'il suffit de démontrer la proposition précédente dans le cas où le point α n'est pas un pôle d'ordre m ; car, si elle est vraie pour la fonction $F_1(z)$ l'égalité (10) montre qu'elle sera vraie aussi pour $F(z)$.

Nous supposons donc que α n'est pas un pôle d'ordre m pour $F(z)$, c'est à dire qu'aucun des dénominateurs $R_n(z)$ n'est égal à $(z - \alpha)^m$; nous allons montrer tout d'abord qu'il existe une infinité de chemins C sur lesquels la série $F(z)$ est convergente et tels que le produit $(z - \alpha)^m F(z)$ tende vers zéro lorsque z tend vers α .

Dans ce but, donnons-nous un nombre positif η que nous ferons tendre ultérieurement sur zéro, mais qui est actuellement bien déterminé; nous allons montrer qu'il y a des points voisins de α et tels qu'en chacun d'eux l'on ait

$$|(z - \alpha)^m F(z)| < \eta.$$

Traçons d'abord autour de α un cercle de rayon arbitraire ρ , duquel nous ne sortirons pas et soit r le maximum du module de z dans ce cercle; on a, dans ce cercle,

$$|P_n(z)| < u_n^{m+1}(r^{m-1} + r^{m-2} + \dots + r + 1);$$

la série $\sum u_n$ étant convergente, nous pouvons choisir q assez grand pour que l'on ait

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} (r^{m-1} + \dots + r + 1)u_n < \frac{\eta}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=q+1}^{\infty} u_n < \frac{1}{2m}.$$

Ayant ainsi choisi q , considérons la somme

$$S_q(z) = \sum_1^q \frac{P_n(z)}{R_n(z)};$$

c'est une fraction rationnelle qui admet le point α comme pôle d'ordre $m - 1$ au plus; nous tracerons autour de α un cercle de rayon ρ' assez petit pour qu'il n'y ait pas à l'intérieur de ce cercle d'autre pôle de $S_q(z)$ et, pour que l'on ait, en tout point intérieur à ce cercle

$$|(z - \alpha)^m S_q(z)| < \frac{\eta}{2};$$

cela est évidemment possible.

Ceci fait, soit ε un nombre positif inférieur à ρ et à ρ' ; traçons un cercle I' ayant pour centre α et pour rayon ε ; traçons de plus des cercles C ayant pour centres les divers zéros de $R_n(z)$ (pour $n \geq q + 1$), et pour rayons respectifs εu_n . Si le point z est extérieur à ces cercles et intérieur au cercle I' de rayon ε , on aura, d'une part

$$\left| \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{P_n(z)}{R_n(z)} \right| < \sum \frac{u_n^{m+1} (r^{m-1} + \dots + r + 1)}{\varepsilon^m u_n^m} < \frac{\eta}{2\varepsilon^m}$$

et, d'autre part

$$|z - \alpha| < \varepsilon.$$

On aura donc

$$\left| (z - \alpha)^m \sum_{q+1}^{\infty} \frac{P_n(z)}{R_n(z)} \right| < \frac{\eta}{2}$$

et par suite

$$|(z - \alpha)^m F(z)| < \eta.$$

Cette inégalité est vérifiée pour les points *intérieurs* au cercle I' et *extérieurs* aux cercles C ; il faut prouver qu'il existe de tels points. On y arrive sans peine par un raisonnement analogue à celui de la page 316. Si l'on projette orthogonalement sur une direction quelconque le cercle I' et les cercles C , le premier se projette sur un segment 2ε tandis que la somme des projections des cercles C est au plus égal à

$$m \sum_{q+1}^{\infty} 2\varepsilon u_n < \varepsilon.$$

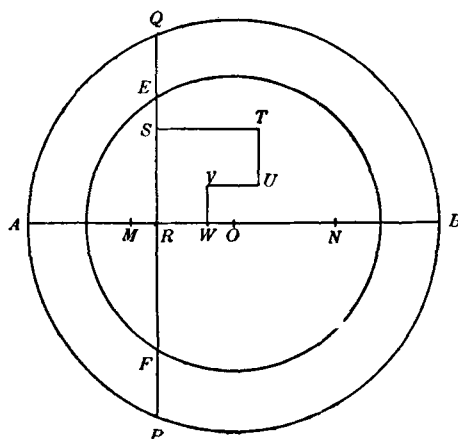
Il existe donc une infinité non dénombrable de droites parallèles à une direction arbitraire et rencontrant le cercle C tout en ne rencontrant aucun des cercles I' .

Mais il y a plus; soit AB le diamètre du cercle C parallèle à la direction sur laquelle on projette, M et N les milieux des deux rayons OA , OB ; la longueur MN étant égale à ε , il existe une perpendiculaire à AB , satisfaisant aux conditions requises, en rencontrant AB entre M et N ; soit PQ cette perpendiculaire, rencontrant AB en R ; l'on a visiblement

$$(15) \quad PQ < 2\varepsilon,$$

$$QR < \varepsilon.$$

Considérons un cercle C' de centre O et de rayon $\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$; il est aisé de voir que la corde EF interceptée par ce cercle sur le segment PQ est supérieure ou égale au rayon OE (elle est égale dans le cas limite où R coïncide



avec M). Dès lors, si l'on remplace le cercle C par le cercle C' de rayon $\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$, et si l'on prend pour direction des projetantes une direction perpendiculaire à PQ , on trouvera, en procédant de même (c'est à dire en prenant une droite dont la distance au centre de C' est au plus égale à la moitié du rayon) une droite ST qui rencontrera EF à l'intérieur de C' et l'on aura d'ailleurs l'inégalité analogue à (15)

$$ST < \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}}.$$

En continuant de même on construira une ligne polygonale $RSTUVJW\dots$ dont les angles sont tous droits et dont les côtés sont inférieurs aux termes successifs d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{3}}$; leurs distances au point O sont aussi respectivement inférieures aux termes d'une autre progression géométrique de même raison. La ligne ainsi formée a donc une longueur finie et tend vers le point O .

Il reste à montrer que l'on peut supposer que le nombre désigné par η tend vers zéro; en effet, si l'on remplace η par un nombre plus petit, cela conduit à prendre n plus grand et par suite, à considérer comme cercle initial C , un cercle plus petit. Mais les cercles successifs $C, C', \dots$ ont leurs rayons en progression géométrique décroissante; donc ils deviennent de plus en plus petits et tendent vers zéro; donc à mesure que l'on avance dans la construction de la ligne polygonale, le nombre η tend vers zéro et l'on a bien, en suivant cette ligne

$$\lim (z - \alpha)^m F(z) = 0.$$

C. Q. F. D.

On peut remarquer que, si l'on part d'un point P situé à une distance du point O égale à ε , la longueur de la ligne est au plus égale à

$$2\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}} + \frac{2\varepsilon}{(\sqrt{3})^2} + \frac{2\varepsilon}{(\sqrt{3})^3} + \dots = \frac{2\varepsilon\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}.$$

On remarquera aussi qu'au lieu de supposer droits les angles de la ligne polygonale, on pourrait d'arranger de manière qu'ils soient tous égaux à un angle donné d'avance; le facteur $\frac{1}{\sqrt{3}}$ serait seulement remplacé par un autre. On peut aussi les supposer inégaux sans grande difficulté; sans entrer dans tous les détails, indiquons que l'on peut s'arranger pour que les côtés de la ligne polygonale fassent des angles de plus en plus petits avec une direction issue du point O , de sorte que l'on peut dire que la ligne polygonale d'une infinité de côtés arrive au point O tangentiellement à cette direction; elle finit par être comprise toute entière à l'intérieur d'un angle aussi petit que l'on veut comprenant cette direction.

Nous avons ainsi démontré la seconde partie de notre théorème; la

première est une conséquence immédiate de notre démonstration. Cette première partie consiste en ce que si, sur un chemin quelconque, le produit

$$(z - \alpha)^m F(z)$$

a une limite, cette limite ne saurait différer de zéro. Or étant donné un chemin quelconque tendant vers le point α il existe évidemment au moins une direction (il y en a une infinité) telle que toutes les droites parallèles à cette direction rencontrent le chemin, en des points qui se rapprochent indéfiniment du point α en même temps que ces droites. Or, nous avons vu, qu'étant donné un nombre arbitrairement petit η , on pouvait trouver des droites parallèles à la direction donnée et telles que sur ces droites, ou du moins dans la partie voisine du point O , le produit $(z - \alpha)^m F(z)$ soit inférieur à η ; ces droites sont d'ailleurs aussi voisines que l'on veut du point O . Il suffit de considérer les points d'intersection de ces droites avec le chemin donné pour avoir le résultat énoncé.

15. La proposition que nous venons d'établir permet de faire une distinction très nette entre les séries de fractions rationnelles que l'on peut décomposer en éléments simples sans que les numérateurs cessent de satisfaire aux inégalités fondamentales et celles pour lesquelles une telle décomposition n'est pas possible.

Pour plus de netteté, bornons nous au cas où tous les dénominateurs $R_n(z)$ ont des zéros *simples*; dans ce cas, en décomposant en éléments simples chaque terme de la série, on met $F(z)$ sous la forme

$$F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{A_n}{z - a_n} + \frac{B_n}{z - b_n} + \dots + \frac{I_n}{z - l_n} \right);$$

le même dénominateur $z - a_n$ peut figurer dans plusieurs termes de la série et même dans une infinité. Si l'on se trouve dans ce dernier cas, il peut arriver que la série $\sum A_n$ des numérateurs qui correspondent à un même dénominateur $z - a_n$, soit *divergente*: le pôle $z = a_n$ de $F(z)$ n'a pas alors de résidu déterminé. Si la série $\sum A_n$ est convergente, ce qui se présente nécessairement lorsqu'elle se compose d'un nombre limité de termes, c'est à dire lorsque le facteur $z - a_n$ figure dans un nombre limité de $R_n(z)$, on peut en désignant sa somme par $\mathfrak{A}_n$, dire que $\mathfrak{A}_n$ est le résidu de $F(z)$

correspondant à $z = a_n$. Mais si la même circonstance se présente pour tous les pôles il n'en résulte pas que l'on puisse écrire

$$F(z) = \sum \frac{\mathfrak{A}_n}{z - a_n}$$

car cette série pourrait fort bien ne pas être convergente; nous en verrons des exemples. Enfin si cette série est convergente (ce qui exige la convergence de la série $\sum |\mathfrak{A}_n|$) il peut arriver que les $\mathfrak{A}_n$ ne vérifient pas les conditions nécessaires pour qu'il existe des courbes de convergence.

16. Ainsi nous avons quatre cas possibles:

- 1° Les résidus, ou du moins certains-d'entre eux, n'existent pas;
- 2° Les résidus existent, mais ne forment pas une série convergente;
- 3° Les résidus forment une série convergente, mais ne vérifient pas d'inégalités supplémentaires;
- 4° Les résidus vérifient des inégalités supplémentaires.

Il résulte de ce qui précède que ce dernier cas est de beaucoup le plus aisé à étudier; les pôles des divers termes peuvent alors être légitimement appelés pôles de la série, même dans le cas où les inégalités supplémentaires sont de la forme la plus simple, c'est à dire entraînent seulement l'existence de courbes de convergence pour la série et non pour ses dérivées, c'est à dire dans le cas où l'on suppose simplement la convergence de la série

$$\sum \sqrt{|\mathfrak{A}_n|}.$$

La proposition démontrée plus haut prend alors une forme extrêmement simple; je ne l'énoncerai pas: on la trouvera dans ma note des Comptes Rendus du 17 avril 1900.

Dans le troisième cas, on ne peut pas obtenir des résultats aussi complets, mais, cependant, il semble encore légitime de penser que les pôles ont encore une existence individuelle, en tant que pôles simples.¹ Des

¹ Par exemple, on voit aisément que l'intégrale le long d'une courbe de convergence fermée est égale au produit par $2\pi i$ de la somme des résidus relatifs aux pôles situés à l'intérieur. Si l'on considère un pôle déterminé, la convergence de la série des résidus a pour conséquence la possibilité de trouver une courbe entourant ce pôle et telle que l'intégrale diffère aussi peu que l'on veut du produit par $2\pi i$ du résidu correspondant.

résultats intéressants ont été obtenus, dans ce troisième cas, par MM. POINCARÉ, GOURSAT, LERCH, PRINGSHEIM en faisant des hypothèses sur la distribution des pôles a_n .

Enfin, dans le premier et le second cas, la question est beaucoup plus compliquée; je n'ai même pu trouver de différence intrinsèque simple entre ces deux cas, par la seule considération des valeurs de la série sur les courbes de convergence.

17. Pour montrer la nature des difficultés qui se présentent, un exemple ne sera pas inutile. Considérons la série

$$F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{p=-n}^{p=+n} \sum_{q=-n}^{q=+n} \frac{e^{-n}}{\left(z - \frac{p+qi}{n}\right) \left(z + e^{-n^2} - \frac{p+qi}{n}\right)}.$$

Il est clair que cette série satisfait aux conditions nécessaires à l'existence de courbes de convergence pour la série et toutes ses dérivées; car si l'on range ses termes en une série simple, en ayant soin que n ne décroisse jamais en passant d'un terme au suivant, on voit que e^{-n} sera le numérateur des termes dont le rang sera compris entre

$$3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (2n-1)^2 + 1$$

et

$$3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (2n+1)^2,$$

c'est à dire de termes dont le rang est du même ordre de grandeur que n^3 ; le numérateur A_n du terme de rang n est donc égal à $e^{-k\sqrt[3]{n}}$, k étant compris entre des limites finies; il suffit dès lors de se reporter à la page 321 pour constater que la série que nous considérons rentre bien dans la catégorie de celles qui y sont étudiées.

Mais il est impossible d'effectuer la décomposition en éléments simples et de grouper les termes correspondants; soit $\frac{p+qi}{n}$ une fraction irréductible, c'est à dire telle que l'un au moins des entiers p et q soit premier avec n ; le facteur $z - \frac{p+qi}{n}$ se retrouve avec tous les multiples de n , sous les formes successives

$$z - \frac{2p+2qi}{2n}, z - \frac{3p+3qi}{3n}, \dots$$

On a d'ailleurs

$$\frac{e^{-n}}{\left(z - \frac{p+qi}{n}\right)\left(z + e^{-n^2} - \frac{p+qi}{n}\right)} = \frac{e^{n^2-n}}{z - \frac{p+qi}{n}} - \frac{e^{n^2-n}}{z + e^{-n^2} - \frac{p+qi}{n}}.$$

Les divers numérateurs qui correspondent au dénominateur $z - \frac{p+qi}{n}$ sont donc

$$e^{n^2-n}, e^{4n^2-2n}, e^{9n^2-3n}, e^{16n^2-4n}, \dots;$$

on voit qu'il forment une série divergente. La série étudiée rentre dans la première catégorie. On aurait une série de la seconde catégorie en supposant que l'on supprime dans $F(z)$ tous les termes dans lesquels $p+qi$ n'est pas premier avec n , c'est à dire tels que les trois nombres p, q, n aient un diviseur commun. Alors chaque pôle ne figurant que dans un terme de la série a un résidu déterminé; mais la série de ces résidus, tous de la forme e^{n^2-n} , est manifestement divergente.

On pourrait donner beaucoup d'exemples analogues; signalons seulement en passant les deux séries que l'on obtient en supprimant dans la série $F(z)$, soit tous les termes pour lesquels q n'est pas nul, soit tous les termes pour lesquels p n'est pas nul.

Si l'on convient d'appeler pôles de $F(z)$ les pôles de ses divers termes, on voit que ces pôles sont intimement liés deux à deux de sorte que, bien qu'ils soient tous simples dans les termes de $F(z)$, cette fonction se comporte en partie comme si elle possédait des pôles doubles. Il y a là un fait curieux, signalé, je crois, pour la première fois et qu'il pourrait être intéressant d'étudier avec plus de détails, bien que de telles séries ne se présentent guère naturellement dans les applications. Mais la complication même de leur étude met en évidence, par contraste, les avantages qu'il y a à considérer les séries décomposables en éléments simples.

18. Nous allons terminer cette première partie en disant quelque mots de la convergence des séries considérées en des points non singuliers et du domaine d'existence des fonctions analytiques qu'elles définissent.

Considérons l'ensemble E des zéros des $R_n(z)$ et formons son dérivé E' ; en tout point du plan qui n'appartient ni à E , ni à E' , la série

$$F(z) = \sum \frac{P_n(z)}{R_n(z)}$$

converge manifestement en vertu des inégalités fondamentales de la page 314. On peut même tracer un cercle ayant son centre au point considéré et de rayon assez petit pour que la série $F'(z)$ converge *uniformément* à l'intérieur de ce cercle; la fonction $F(z)$ est donc régulière au point considéré.

Si l'on considère un point appartenant à E , mais non à E' , on démontre aisément que c'est un pôle pour $F(z)$; on obtient la valeur principale de $F(z)$ en ce point en faisant la somme des valeurs principales des divers termes, somme d'ailleurs ici toujours convergente.

Enfin, à priori, il semble que les points de E' doivent être en dehors du domaine d'existence de la fonction $F'(z)$ (ou des diverses fonctions analytiques que définit la série, au sens de WEIERSTRASS, dans le cas où le domaine formé des points qui n'appartiennent pas à E' se compose de plusieurs parties séparées). Mais c'est là un point qui paraît difficile à démontrer rigoureusement sans nouvelles hypothèses.

Dans les mémoires dont nous avons déjà parlé, MM. POINCARÉ¹ et GOURSAT² ont montré que si, une ligne L est telle que l'ensemble E est dense sur tout segment de L et si, de plus, d'un côté au moins de L , il n'y a pas de point de E' dans le voisinage de L , cette ligne L est certainement une coupure, sous la seule condition de la convergence des modules des numérateurs de la série décomposée en éléments simples. Mais c'est là évidemment, au point de vue de la distribution des pôles, un cas très particulier.

Un autre cas où il est évident que la ligne L est une coupure est le suivant: soient S et S_1 les régions du plan séparées par L ; si les pôles situés dans S sont isolés et ont cependant pour points limites tous les points de L , il est clair que la fonction analytique définie par la série dans S admet la ligne L comme coupure; il suffit pour en être assuré, de supposer convergente la série des modules des coefficients des numérateurs $P_n(z)$, même avant la décomposition en éléments simples. Cette condition est en effet suffisante pour qu'un pôle isolé soit certainement un point singulier de la fonction.

¹ Acta Societatis fennicæ, t. 12.

² Bulletin des sciences mathématiques, 1887.

19. Mais une question autrement délicate est la suivante: dans les hypothèses qui précèdent, si la série n'a pas de pôles dans S_1 , la ligne L est-elle une coupure pour la fonction analytique définie par la série dans S_1 ? Il est évident qu'il doit en être ainsi *en général*, c'est à dire qu'il faut qu'il y ait des relations particulières entre les coefficients pour que les singularités apparentes puissent ainsi se détruire; d'ailleurs, dans le cas où la fonction analytique ainsi définie dans S_1 pourrait être prolongée au delà de L , elle ne pourrait y coïncider avec la fonction analytique définie par la série dans S . Aussi l'importance théorique d'un exemple où le prolongement serait possible serait très considérable; il serait, d'autre part, très important de démontrer dans des conditions très larges l'impossibilité de ce prolongement. La méthode que nous développons dans la seconde partie permet d'arriver à ce dernier résultat, au moyen d'hypothèses portant seulement sur la rapidité de la convergence de la série des numérateurs, sans rien supposer sur la distribution des pôles.

SECONDE PARTIE.

Les séries de polynômes et le prolongement analytique.

20. Je me propose d'étudier, dans cette seconde partie, certaines séries remarquables de polynômes dont l'importance, au point de vue de la théorie du prolongement analytique, a été mise en évidence pour la première fois par M. MITTAG-LEFFLER.¹ Il existe d'ailleurs, comme je l'ai montré dans mon *Addition au mémoire sur les séries divergentes*² une infinité de classes de séries ayant les mêmes propriétés générales que les séries de M. MITTAG-LEFFLER;³ je montrerai d'abord que la connaissance

¹ Voir notamment, *Acta mathematica*, t. 23, où l'on trouvera l'indication des travaux antérieurement publiés en langue suédoise.

² *Annales de l'Ecole normale*, 1899.

³ Voir aussi LEAU, *Sur les développements en séries de polynômes*. *Bulletin de la société mathématique de France*, 1899.

de ces propriétés générales suffit pour le but que je désire atteindre, à savoir l'application des séries de polynomes à l'étude des séries de fractions rationnelles étudiées dans la première partie; je montrerai ensuite comment, dans le cas particulier où l'on emploie les séries de M. MITTAG-LEFFLER, on peut effectivement calculer complètement les seconds membres de certaines inégalités qui restaient indéterminés dans la théorie générale.

Je définirai d'abord une notion qui me paraît devoir être importante: celle des *classes* de séries de polynomes.

21. Etant données deux séries de polynomes, je dirai qu'elles *sont semblables*, ou qu'elles *appartiennent à une même classe*, si les coefficients d'une même puissance quelconque de z , dans les termes successifs des deux séries, sont proportionnels. En d'autres termes soient

$$F(z) = \sum P_n(z),$$

$$G(z) = \sum Q_n(z),$$

les deux séries; on pose

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{k=k_n} a_{n,k} z^k,$$

$$Q_n(z) = \sum_{k=1}^{k=k_n} b_{n,k} z^k;$$

les séries sont *semblables* si, pour chaque valeur de k , on a les égalités:

$$\frac{a_{1,k}}{b_{1,k}} = \frac{a_{2,k}}{b_{2,k}} = \frac{a_{3,k}}{b_{3,k}} = \dots$$

ou, si l'on veut, s'il existe une infinité de nombres c_k tels que l'on ait, pour toute valeur de n et de k

$$b_{n,k} = c_k a_{n,k}.$$

Les nombres c_k seront dits les coefficients de similitude de G par rapport à F . Parmi les nombres c_k certains, en nombre fini ou infini, peuvent être nuls; si aucun d'eux n'est nul, la classe des séries semblables à $G(z)$ est la même que la classe des séries semblables à $F(z)$; l'une quelconque de ces séries suffit pour définir complètement cette classe. Si, au contraire, certains des c_k sont nuls, la classe définie par $G(z)$ est comprise comme

cas particulier dans la classe (C) définie par $F(z)$; on peut dire que $F(z)$ est un représentant complet de la classe (C) , tandis que $G(z)$ en est un représentant partiel.

Par exemple les séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de z constituent une classe. Toute série de cette nature, dont aucun coefficient n'est nul, est un représentant complet de la classe; si certains coefficients sont nuls, on n'a plus qu'un représentant incomplet, qui définit une classe plus restreinte.

Je ne puis développer complètement ici la théorie des classes de séries de polynômes; j'espère pouvoir en faire l'objet d'un autre mémoire;¹ je m'attacherai ici à une catégorie importante de classes de séries: les classes à région de convergence étoilée, dont le premier exemple est dû à M. MITTAG-LEFFLER.

22. Voici comment sont définies ces classes; on sait, d'une infinité de manières,² développer la fonction $\frac{1}{1-z}$ en une série de polynômes, convergeant pour toute valeur de z , sauf pour les valeurs réelles et supérieures à un; la convergence étant d'ailleurs absolue et uniforme dans toute région de convergence. Soit

$$\frac{1}{1-z} = F(z) = \sum P_n(z)$$

l'un de ces développements; la classe formée de tous les développements semblables est une classe à région de convergence étoilée.

Nous allons étudier les propriétés d'une telle classe, sans expliciter davantage le développement $F(z)$; nous supposons seulement que ce développement est déterminé, c'est à dire choisi une fois pour toutes parmi l'infinité de développements analogues qui sont possibles. Nous appliquerons plus loin les résultats généraux obtenus au cas particulier de la classe (M) formée des développements qui sont dus à M. MITTAG-LEFFLER.

¹ Cf. *Mémoire sur les séries divergentes* (Annales de l'Ecole normale, 1899, p. 63) et Comptes Rendus 23 mai 1899.

² Voir RUNGE, Acta mathematica, t. 4; PAINLEVÉ, Comptes Rendus, 1898.

23. Considérons donc une classe déterminée (C) à région de convergence étoilée et soient

$$\frac{1}{1-z} = F(z) = \sum P_n(z),$$

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{k=k_n} a_{n,k} z^k$$

les relations qui la définissent.

Soit, d'autre part,

$$f(z) = \sum c_k z^k$$

une série de TAYLOR dont le rayon de convergence n'est ni nul ni infini; sur une demi-droite quelconque OA issue de l'origine cette série définit, par prolongement analytique, une fonction bien déterminée sur tout segment OA ne renfermant aucun point singulier. Si M est le point singulier le plus voisin du point O sur la demi-droite (M peut être l'infini) nous choisirons arbitrairement un point P entre O et M et faisant tourner la demi-droite OA autour du point O , nous supposons que le point P se déplace d'une manière continue¹ (en satisfaisant toujours à la même condition); il décrit ainsi une courbe C ayant la double propriété de ne pas renfermer à son intérieur de point singulier de $f(z)$ et d'être coupée une seule fois par toute demi-droite issue de O . De la courbe C nous déduirons une courbe C' par la loi suivante (qui pourrait être modifiée, mais que nous choisissons pour fixer les idées): sur chaque demi-droite OA issue de l'origine, considérons le point P situé sur C et le point singulier M le plus voisin; les longueurs MP ont une limite inférieure h , puisque l'ensemble des points M est parfait ainsi que l'ensemble des points P ; nous définirons C' en prenant

$$OP' = OP + \frac{h}{2};$$

la courbe C' lieu des point P' satisfait aux mêmes conditions que la courbe C .

Ceci posé, formons la série semblable à $F(z)$, les coefficients de similitude étant les coefficients c_k de $f(z)$, c'est à dire posons

¹ On peut toujours supposer que le lieu du point P n'est jamais tangent à OP .

$$\begin{aligned} b_{n,k} &= c_k a_{n,k}, \\ Q_n(z) &= \sum b_{n,k} z^k, \\ G(z) &= \sum Q_n(z). \end{aligned}$$

Je dis que la série $G(z)$ converge absolument et uniformément à l'intérieur de C et y représente la branche de fonction analytique définie par $f(z)$.

On a, en effet, d'après le théorème de CAUCHY

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} \frac{f(u) du}{u - z},$$

C' étant le contour que nous avons défini et z un point quelconque de C .

Or, ce point u étant sur C' et le point z intérieur à C , le point $\frac{z}{u}$ est intérieur à un certain contour I' ne passant par aucun point correspondant à une valeur réelle supérieure ou égale à un; on a donc

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{u}} = \sum P_n\left(\frac{z}{u}\right),$$

la série étant absolument et uniformément convergente quel que soit $\frac{z}{u}$ à l'intérieur de I' , c'est à dire quel que soit z à l'intérieur de C et u sur C' .

Donc, étant donné à l'avance un nombre ε on peut choisir m assez grand pour que l'on ait

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{u}} = \sum_{n=1}^{n=m} P_n\left(\frac{z}{u}\right) + \rho_m,$$

$|\rho_m|$ étant inférieur à ε , quelque soit z à l'intérieur de C et u sur C' . On a donc

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} \sum_{n=1}^{n=m} P_n\left(\frac{z}{u}\right) \frac{f(u) du}{u} + \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} \frac{\rho_m f(u) du}{u}.$$

Soit $2\pi L$ la longueur du contour C' et M le maximum de $\frac{f(u)}{u}$ sur ce contour; on a évidemment

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} \frac{\rho_m f(u) du}{u} \right| < LM\varepsilon$$

et comme, visiblement

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C'} P_n\left(\frac{z}{u}\right) \frac{f(u)}{u} du = Q_n(z),$$

il vient

$$f(z) = \sum_{n=1}^{n=m} Q_n(z) + \theta_m,$$

$|\theta_m|$ étant inférieur à $LM\varepsilon$. Comme L et M sont donnés en même temps que le contour C' , cette égalité exprime bien que la série $G(z) = \sum Q_n(z)$ converge *uniformément* vers $f(z)$ à l'intérieur de C .

Relativement à la convergence absolue, il suffit d'observer que la série

$$\sum \left| P_n\left(\frac{z}{u}\right) \right|$$

converge uniformément quel que soit u sur C' et z à l'intérieur de C , et que l'on a:

$$\begin{aligned} |Q_n(z)| &< \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left| P_n\left(\frac{z}{u}\right) \right| \left| \frac{f(u)}{u} \right| |du| \\ &< ML \left| P_n\left(\frac{z}{u}\right) \right|. \end{aligned}$$

Notre proposition est donc complètement démontrée.

24. Elle s'applique en particulier aux dérivées successives de $\frac{1}{1-z}$; considérons, par exemple, la fonction

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots + nz^n + \dots$$

les coefficients de similitude sont ici:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad \dots, \quad c_n = n, \quad \dots$$

Le polynome $Q_n(z)$ se déduit donc du polynome $P_n(z)$ en multipliant par k le coefficient de z^k ; il en résulte

$$Q_n(z) = zP'_n(z),$$

c'est à dire

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum zP'_n(z),$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum P'_n(z)$$

la série qui donne $\frac{1}{1-z}$ peut donc être dérivée terme à terme: *c'est là une conséquence des hypothèses faites sur sa convergence absolue et uniforme dans tout domaine fini qui ne comprend pas sur son contour de valeur réelle supérieure à un.* On démontrerait d'ailleurs absolument de même qu'elle peut être dérivée terme à terme indéfiniment, c'est à dire que l'on a, quel que soit p

$$\frac{z^p}{(1-z)^{p+1}} = \sum P_n^{(p)}(z),$$

la série du second membre convergeant absolument et uniformément dans les mêmes conditions que $F(z)$. Il est clair que les mêmes conséquences s'étendent à une fonction quelconque $f(z)$; ses dérivées successives sont représentées par les dérivées de la série de polynomes qui représente $f(z)$.

Il faut remarquer que les séries dérivées ne sont pas *semblables* aux séries considérées; pour obtenir une série semblable à une série de polynomes donnée, il faut multiplier par z après la dérivation. Comme on divise par z , on pourrait craindre que la convergence cessât d'être uniforme dans le voisinage de $z = 0$, ou même qu'il y eût divergence en ce point; mais on sait qu'une série de fonctions analytiques régulières à l'intérieur d'un contour ne saurait converger uniformément sur le contour sans converger uniformément à l'intérieur.¹ Les séries dérivées des séries d'une

¹ Le fait que la série $F(z)$ converge, ainsi que toutes ses dérivées, pour $z = 0$ entraîne la convergence des séries

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_{n,k},$$

pour toute valeur de k ; la somme de chacune de ces séries est d'ailleurs égale à l'unité.

classe à région de convergence étoilée forment donc elles-mêmes une classe analogue, que l'on peut appeler la classe dérivée de la classe donnée.

La relation entre une classe et la classe dérivée est d'ailleurs très simple; elle est une conséquence de l'identité

$$\frac{\frac{1}{1-z} - 1}{z} = \frac{1}{1-z}.$$

Si l'on a

$$\frac{1}{1-z} = \sum P_n(z)$$

avec

$$P_n(z) = a_{n,0} + a_{n,1}z + \dots + a_{n,k_n}z^{k_n},$$

il est clair que:

$$\sum a_{n,0} = 1.$$

Donc

$$\frac{1}{1-z} - 1 = \sum [P_n(z) - a_{n,0}]$$

et

$$\frac{\frac{1}{1-z} - 1}{z} = \sum \frac{P_n(z) - a_{n,0}}{z}.$$

On obtient ainsi un nouveau développement de $\frac{1}{1-z}$

$$\frac{1}{1-z} = \sum \frac{P_n(z) - a_{n,0}}{z},$$

c'est le développement qui définit la classe dérivée de la classe donnée, comme on s'en assurera aisément. Il est clair qu'il converge dans les mêmes conditions que le développement donné.

Les remarques qui viennent d'être faites peuvent paraître d'une nature bien élémentaire; mais, dans les applications, il y a grand avantage à pouvoir employer pour les dérivées successives d'une fonction les développements dérivés du développement de la fonction, au lieu des développements semblables; et il est bon de savoir que les conditions de convergence

de ces développements sont les mêmes; en particulier, la rapidité de la convergence est analogue.¹

25. Nous allons définir maintenant une fonction attachée à une classe de séries et qui joue un rôle important dans les applications: c'est la fonction qui exprime la rapidité de la convergence de la série des modules. D'ailleurs il entre un certain arbitraire, comme on le verra, dans la définition d'une telle fonction; certaines définitions analogues à celle qui sera adoptée pourraient rendre les mêmes services: l'essentiel est de bien préciser la définition que l'on choisit.

Voici comment nous procéderons; nous désignerons par R un nombre plus grand que un et par ρ un nombre plus petit que un : nous décrirons un cercle C ayant pour centre le point $z = 0$ et pour rayon R et un cercle I ayant pour centre le point $z = 1$ et pour rayon ρ . Cela fait, nous mènerons du point $z = 0$ les deux tangentes au cercle I ; nous désignerons par A et B leurs points de contact et par A' et B' les points d'intersection de ces tangentes avec le cercle C (A' est choisi sur le prolongement de OA et non de AO ; de même pour B'). Cela posé, nous considérerons le contour formé par l'arc AB inférieur à π du cercle I , les segments de droites AA' et BB' et l'arc $A'B'$ supérieur à π du cercle C . L'aire intérieure à ce contour, complètement défini lorsqu'on donne les nombres R et ρ , sera désignée par $S(R, \rho)$. Dans les applications, on prendra parfois pour simplifier $\rho = \frac{1}{R}$ et l'on posera, pour abréger

$$S\left(R, \frac{1}{R}\right) = S(R).$$

¹ En même temps que l'ensemble des développements dérivés d'un développement donné, on peut considérer l'ensemble des développements obtenus par l'intégration; seulement, il y a lieu de préciser la répartition, entre les termes successifs de la série, de la constante introduite par chaque intégration. On est ainsi conduit à la notion de *classe étendue*, comprenant toutes les dérivées et toutes les intégrées d'une classe donnée. Une classe étendue peut être définie par une infinité de séries dont la somme est égale à l'unité

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_{n,k} = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

En ne conservant que les $a_{n,k}$ correspondant à des valeurs non négatives de k , on a la classe considérée dans le texte; ses dérivées et ses intégrées s'obtiennent respectivement en remplaçant k par $k \mp h$, h étant un entier quelconque.

Cela posé, considérons le développement qui définit la classe de séries que nous étudions (c'est une classe *déterminée* quelconque à région de convergence étoilée); soit

$$F(z) = \frac{1}{1-z} = \sum P_n(z)$$

ce développement, qui, nous le savons, converge absolument et uniformément dans l'aire $S(R, \rho)$; la série

$$\sum |P_n(z)|$$

définit donc une fonction continue (non monogène) dans cette aire; cette fonction possède un maximum que nous désignerons par $M(R, \rho)$; c'est cette fonction $M(R, \rho)$ qui jouera un rôle capital dans ce qui va suivre. Cette fonction sera dite la fonction majorante correspondant à $F(z)$. Nous nous appuierons d'ailleurs seulement sur le fait *qu'elle existe*; c'est à dire qu'elle a une valeur finie pour toute valeur de R et de ρ

$$[0 < \rho < 1 < R < +\infty];$$

nous n'aurons même pas à nous servir du fait qu'elle est continue. Pour les applications relatives à une classe particulière de séries, il pourra être utile de la déterminer effectivement, ou tout au moins d'en déterminer une limite supérieure; c'est ce que nous ferons à la fin de cette seconde partie, pour les séries de M. MITTAG-LEFFLER.

Il suffira parfois de considérer le cas particulier où $\rho = \frac{1}{R}$ et l'on posera, pour abréger

$$M\left(R, \frac{1}{R}\right) = M(R);$$

on n'a alors qu'une fonction d'une seule variable, ce qui est souvent plus commode.

Nous observerons tout d'abord que la connaissance de la fonction $M(R)$ permet de déterminer une limite supérieure de la fonction analogue relative à un développement quelconque semblable à $F(z)$. Si, en effet, l'on considère une fonction analytique quelconque et une région C définie comme plus haut, (p. 335) on définira la région C' comme on l'a fait dans la démonstration du théorème fondamental; on pourra alors déterminer R

par la condition que, si z est dans C et u sur C' , $\frac{z}{u}$ est certainement intérieur à la région $S(R)$; si l'on désigne alors par μ le maximum du module de $\frac{f(u)}{u}$ sur C' et par L la longueur de ce contour, l'on aura, z étant un point quelconque intérieur à C' ,

$$\sum |Q_n(z)| < \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left| \frac{f(u)}{u} \right| \left| \sum P_n\left(\frac{z}{u}\right) \right| |du|$$

c'est à dire

$$\sum |Q_n(z)| < \mu LM(R),$$

le nombre R étant défini comme il a été dit. Ainsi l'on peut trouver une limite supérieure de la somme des modules des termes de la série dans toute région C à l'intérieur de laquelle elle converge absolument et uniformément.

En particulier, on peut appliquer ceci aux dérivées successives de $\frac{1}{1-z}$; en prenant pour contour C précisément le contour $S(R)$, on désignera par $M_k(R)$ la fonction définie avec la dérivée d'ordre k de la même manière que $M(R)$ avec la fonction.¹ Il résulte de ce qui précède que, la fonction $M(R)$ étant connue, on trouvera sans peine des limites supérieures pour les diverses fonctions $M_k(R)$. D'ailleurs dans certains cas il pourra être plus commode de calculer directement ces fonctions $M_k(R)$. On aurait pu raisonner de même sur $M(R, \rho)$ et définir les fonctions $M_k(R, \rho)$.

Nous allons donc supposer connues ces diverses fonctions et nous en tirerons d'importantes conséquences relativement aux séries de fractions rationnelles qui ont été étudiées dans la première partie.

26. Pour plus de netteté, nous étudierons d'abord un cas particulier sur lequel on verra bien le mécanisme de la méthode.

¹ Il résulte des remarques faites plus haut qu'un calcul auxiliaire sans difficulté permet de passer du cas où l'on prend pour les dérivées un développement semblable à celui de la fonction, au cas où l'on prend le développement dérivé. Dans les applications on sera amené à prendre les mêmes fonctions $M_k(R)$ dans les deux cas, c'est à dire à négliger cette différence, qu'il était cependant bon de signaler.

Considérons une infinité de points a_n compris dans une couronne circulaire mais, à part cela, complètement arbitraires; c'est à dire que les a_n sont assujettis seulement à vérifier les inégalités

$$\alpha < |a_n| < \beta.$$

Nous considérerons la série: ¹

$$(1) \quad f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n};$$

la fonction $f(z)$ peut être développée suivant les puissances croissantes de z

$$(2) \quad f(z) = \sum c_k z^k$$

et aux nombres c_k correspond une certaine série de polynomes de la classe que nous étudions

$$(3) \quad f(z) = \sum Q_n(z).$$

Nous nous proposons de démontrer que, moyennant certaines inégalités imposées aux A_n , et sans autre hypothèse, cette série (3) converge absolument et uniformément sur une infinité de diamètres du cercle de rayon β et α , sur ces diamètres, la même somme que la série (1). Relativement à l'infinité de ces diamètres, on peut dire qu'il y en a une infinité non dénombrable dans tout angle aussi petit que l'on veut ayant son sommet à l'origine.

27. Pour déterminer les inégalités auxquelles doivent satisfaire les A_n nous désignerons par

$$\sum u_n$$

une série convergente arbitraire à termes positifs; on pourrait supposer, par exemple, pour fixer les idées,

$$u_n = \frac{1}{n^2},$$

¹ Il est bon de faire observer dès maintenant que si l'on avait une série analogue, mais où les a_n soient assujettis à la seule relation $\alpha < |a_n|$, on pourrait obtenir les mêmes conséquences à l'intérieur du cercle de rayon β , puisque la série donnée et celle du texte ne différeraient que par une fonction holomorphe à l'intérieur de ce cercle.

mais il est inutile, pour l'instant, de faire aucune hypothèse particulière sur la valeur des u_n .

Décrivons un cercle C_n ayant pour centre le point a_n et pour rayon αu_n ; les rayons de convergence seront ceux qui ne passent par aucun point a_n et qui ne rencontrent qu'un nombre limité de ces cercles. Il est clair qu'il existe une infinité non dénombrable de tels rayons, dans tout angle θ ayant pour sommet l'origine.¹ En effet, l'angle sous lequel le cercle C_n est vu de l'origine est égal à

$$2 \operatorname{arc} \sin \frac{\alpha u_n}{|a_n|} < 2 \operatorname{arc} \sin u_n$$

puisque $\alpha < |a_n|$. La série

$$\sum 2 \operatorname{arc} \sin u_n$$

est évidemment convergente de même que la série $\sum u_n$; on peut donc choisir p assez grand pour que l'on ait

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} 2 \operatorname{arc} \sin u_n < \theta;$$

dès lors il y a dans l'angle θ une infinité non dénombrable de demi-droites qui ne rencontrent aucun des cercles C_n ($n \geq p+1$); si l'on exclut, parmi ces droites celles qui pourraient coïncider avec $Oa_1, Oa_2, \dots, Oa_p$, il en restera encore une infinité non dénombrable, ce que nous avons annoncé.

Il s'agit maintenant de choisir les A_n de manière que tous ces rayons soient des rayons de convergence.

Or, si l'on mène de l'origine les tangentes au cercle C_n et si on les prolonge jusqu'au cercle de rayon β , on formera une région S_n tout à fait analogue à celle que nous appelions plus haut $S(R, \rho)$, avec cette différence que le point a_n y remplace le point 1; le rayon R est égal à β et le rayon ρ à αu_n ; lorsque le point z est intérieur à cette région S_n le point $\frac{z}{a_n}$ est manifestement intérieur à la région

$$S\left(\frac{\beta}{|a_n|}, \frac{\alpha u_n}{|a_n|}\right)$$

¹ On démontrerait de la même manière l'existence de *diamètres* de convergence; mais il est préférable, pour la suite, de considérer *les rayons*.

c'est à dire, puisque $\alpha < |a_n| < \beta$, à la région

$$S\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha u_n}{\beta}\right),$$

puisque l'on agrandit la région S en augmentant R et en diminuant ρ .

Or, on a,

$$\frac{A_m}{z - a_m} = -\frac{A_m}{a_m} \frac{1}{1 - \frac{z}{a_m}} = -\frac{A_m}{a_m} \sum P_n\left(\frac{z}{a_m}\right).$$

Par définition même de la fonction $M(R, \rho)$, l'on a, $\frac{z}{a_m}$ étant intérieur à la région $S\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha u_m}{\beta}\right)$

$$\sum \left| P_n\left(\frac{z}{a_m}\right) \right| < M\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha u_m}{\beta}\right).$$

Choisissons les A_m de telle manière que la série

$$\sum \left| \frac{A_m}{a_m} \right| M\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha u_m}{\beta}\right)$$

soit convergente; il suffit pour cela de supposer:

$$|A_m| < \frac{u_m}{M\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha u_m}{\beta}\right)}.$$

Alors la série double

$$\sum_m \sum_n \frac{-A_m}{a_m} P_n\left(\frac{z}{a_m}\right)$$

sera absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs de z situées à l'intérieur des régions S_n définies plus haut. Si l'on considère l'un des rayons de convergence, choisi comme nous l'avons dit, c'est à dire ne rencontrant qu'un nombre limité de cercles C_n , la série double pourra s'écrire:

$$\sum_{m=1}^{m=p} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-A_m}{a_m} P_n\left(\frac{z}{a_m}\right) \right] + \sum_{m=p+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-A_m}{a_m} P_n\left(\frac{z}{a_m}\right).$$

La première partie est la somme d'un nombre limité de séries absolument et uniformément convergentes sur le rayon considéré; la seconde partie est

une série double qui, elle aussi, converge absolument et uniformément sur ce rayon; l'ensemble forme donc une série double *absolument convergente*, c'est à dire dans laquelle on peut intervertir l'ordre des sommations sans que la convergence cesse d'être uniforme; la somme de cette série est d'ailleurs égale à $f(z)$.¹ Or, en intervertissant l'ordre des sommations on peut poser

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{A_m}{a_m} P_n\left(\frac{z}{a_m}\right) = Q_n(z).$$

Il est clair que la série $\sum Q_n(z)$ est semblable à la série $\sum P_n(z)$, les coefficients de similitude étant précisément les coefficients c_k du développement $\sum c_k z^k$.

28. On a donc démontré le théorème suivant.

Théorème I. *Soit*

$$\frac{1}{1-z} = F(z) = \sum P_n(z)$$

une série définissant une classe à région de convergence étoilée et soit $M(R, \rho)$ la fonction majorante correspondante (définie p. 341). Désignons par a_n des nombres quelconques satisfaisant aux inégalités

$$\alpha < |a_n| < \beta$$

¹ Etant donné un nombre arbitrairement petit ε , on peut déterminer m' de telle manière que:

$$\sum_{m'=1}^{\infty} u_m < \varepsilon.$$

Le nombre m' étant ainsi choisi, et supposé de plus supérieur au nombre p tel que le rayon donné ne rencontre pas les cercles C_n ($n > p$), les m' premières séries sont uniformément et absolument convergentes sur ce rayon; en particulier, il existe un nombre n' tel que l'on ait, pour chacune de ces séries, en nombre m' :

$$\left| \frac{A_m}{z - a_m} + \sum_{n=0}^{n=n'} \frac{A_m}{a_m} P_n\left(\frac{z}{a_m}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{m'};$$

on a dès lors visiblement, sur tout le rayon considéré,

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{n=n'} Q_n(z) \right| < 2\varepsilon.$$

et par A_n des nombres assujettis aux inégalités

$$(4) \quad M\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha u_n}{\beta}\right) |A_n| < u_n,$$

la série $\sum u_n$ étant une série convergente à termes positifs. Si l'on pose

$$(1) \quad f(z) = \sum \frac{A_n}{z - \alpha_n},$$

la fonction $f(z)$ peut être développée en une série de la forme

$$(2) \quad f(z) = \sum c_k z^k;$$

soit dès lors

$$(3) \quad f(z) = \sum Q_n(z)$$

le développement semblable au développement $F(z)$, les coefficients de similitude étant les nombres c_k . Il existe dans tout angle ayant son sommet à l'origine une infinité de rayons du cercle de rayon β tels que sur chacun d'eux le développement (3) converge et ait même somme que la série (1).

29. On aperçoit immédiatement les importantes conséquences qu'entraîne ce théorème lorsqu'on le rapproche des résultats obtenus dans la première partie de ce mémoire. Nous avons démontré que, sous certaines conditions de convergence (qui sont une conséquence des inégalités (4)) une série telle que (1) admet des courbes de convergence uniforme, même dans les régions où les pôles forment un ensemble partout dense; nous avons vu aussi comment l'intégration définie le long de contours fermés de convergence uniforme permet de déterminer les pôles et les résidus. Mais ces divers résultats pouvaient paraître sans application possible, puisque la connaissance aussi bien des courbes de convergence uniforme que de la valeur de la fonction sur ces courbes exigeait la connaissance préalable de la série (1).

Il n'en est plus ainsi lorsqu'on tient compte du théorème précédent; il suffit de connaître le développement (2) pour déterminer la valeur de la série (1) sur toute courbe de continuité. En effet, si C est une telle courbe (comprise à l'intérieur de la couronne et ne coïncidant pas avec un rayon) la série (3), que nous savons déduire de (2) converge en une infinité de

points de C formant un ensemble dense sur tout arc de C ; car il y a des rayons de convergence dans tout angle si petit qu'il soit. Si donc la fonction est continue sur C , la connaissance de ces valeurs permet de la définir complètement.

Donc, étant donné un développement en série tel que (2), si l'on sait qu'il provient d'une série de la forme (1), sans rien connaître de plus sur cette série, il est possible, par des opérations bien déterminées, de connaître la valeur de la fonction sur des courbes de convergence comprises à l'intérieur de la région où se trouvent les points singuliers et, par l'intégration définie le long de ces courbes,¹ de déterminer les pôles et les résidus correspondants, c'est à dire de reconstituer la série (1) en partant du développement (2).

30. L'étude de la série obtenue en intégrant terme à terme la série (3) est aussi fort intéressante; on obtient

$$(5) \quad \sum A_n \log \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) = \sum \int_0^z Q_n(z)$$

¹ On remarquera que nous parlons d'opérations bien déterminées, et non d'opérations en nombre limité. Dans la théorie des fonctions analytiques d'après WEIERSTRASS, il est aussi complètement impossible (*théoriquement*) de résoudre n'importe quelle question par un nombre limité d'opérations (on n'y arrive *pratiquement*, dans des cas exceptionnels que grâce à des circonstances particulières heureuses); on se heurte en effet, à chaque instant, à la question de savoir si une série calculée numériquement est ou n'est pas convergente et il est clair qu'aucun calcul fini ne saurait résoudre cette question.

Dans les applications numériques, on regarde comme convergentes les séries dont les termes décroissent rapidement, on admet même que des règles empiriques donnent une limite supérieure de l'erreur commise. Cette manière de procéder donne d'ailleurs, en fait, des résultats généralement satisfaisants; on pourrait même dire *toujours* satisfaisants, si l'on tient compte des propriétés aujourd'hui bien connues des séries asymptotiques: elles se trouvent, en fait, être pratiquement utilisables tant qu'elles *paraissent* convergentes.

Si l'on admet cette manière de procéder, on pourra dire que le calcul, avec une approximation donnée à l'avance, de la somme d'une série convergente, n'exige qu'un nombre limité d'opérations et dès lors le résultat que nous avons obtenu prendra la forme suivante: étant donné un point a du plan, le résidu correspondant sera A_n si $a = a_n$ et sera zéro si a ne coïncide avec aucun des points a_n : la connaissance du développement (2) permet de calculer ce résidu, par un nombre limité d'opérations, avec une approximation donnée à l'avance ε . D'ailleurs ce résidu est obtenu comme la somme d'une série convergente, de sorte que les remarques qui viennent d'être faites relativement au nombre limité d'opérations ont encore l'occasion de s'appliquer à cette série.

et cette égalité est exacte sur tous les rayons de convergence, la détermination des logarithmes étant prise égale à zéro pour $z = 0$ et fixée ensuite par continuité, en suivant le rayon.

La relation (5) conduit à des conséquences importantes lorsqu'on l'applique aux divers points d'intersection de divers rayons de convergence avec une *courbe de continuité* C . Supposons, pour plus de netteté que C soit un cercle ayant son centre à l'origine et soit E l'ensemble des points d'intersection de ce cercle avec les rayons de convergence. Cet ensemble E est dense sur tout arc de C . La série de polynômes

$$\sum \int_0^z Q_n(z)$$

converge en tous les points de l'ensemble E ; elle définit d'ailleurs une fonction *continue dans* E , c'est à dire telle que si A est un point de E la limite des valeurs que prend la fonction en un point B , *qui tend vers* A *sans cesser d'appartenir à* E , a pour limite la valeur de la fonction en A lorsque BA tend vers zéro. Soit α un point du cercle C n'appartenant pas à E ; lorsque le point B de E tend vers α en restant toujours du même côté de α , la valeur de la fonction tend vers une limite, mais cette limite peut dépendre du côté suivant lequel on s'approche de α . Ainsi, en tout point α de C on peut définir $f(\alpha + 0)$ et $f(\alpha - 0)$ au sens de LEJEUNE-DIRICHLET; mais ces valeurs peuvent ne pas être égales; leur différence est la mesure de la discontinuité en α . On démontrera aisément que leur différence est égale à $2\pi i \sum A_n$, la somme étant étendue à tous les résidus A_n tels que les pôles correspondants a_n soient sur le rayon $O\alpha$. On a ainsi une méthode pour la recherche des pôles et des résidus, méthode qui ne diffère pas d'ailleurs essentiellement de celle que nous avons donnée d'abord, mais qui est d'une application plus simple vu que l'on n'a à intégrer qu'une série de polynômes. De plus, nous trouvons là un premier exemple d'une espèce particulière de *fonctions non uniformes*, sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

31. Nous allons montrer maintenant que, *si les* A_n *vérifient des inégalités convenables*, il existe des rayons de convergence sur lesquels la série

$$(3) \quad f(z) = \sum Q_n(z)$$

converge ainsi que toutes ses dérivées lesquelles sont égales aux dérivées de la série

$$(1) \quad f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}.$$

Si l'on désirait seulement obtenir la convergence des dérivées *jusqu'à un ordre déterminé* h , il suffirait de remplacer $M(R, \rho)$ par le plus grande des fonctions $M_1(R, \rho), M_2(R, \rho), \dots, M_h(R, \rho)$ définies page 342. Pour chaque valeur de R et de ρ , soit $\mu(R, \rho)$ la plus grande de ces quantités, il suffira de remplacer les inégalités (4) par les suivantes

$$\mu\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{au_n}{\beta}\right) |A_n| < u_n.$$

Mais ce procédé ne s'applique évidemment plus lorsque le nombre h devient infini, c'est à dire lorsque l'on veut que les dérivées *de tout ordre* de la série convergent sur une infinité de rayons dans tout angle. Pour traiter ce cas, il suffit d'appliquer un théorème de PAUL DU BOIS REYMOND dont j'ai déjà, à diverses reprises, signalé l'importance.¹

D'après ce théorème, étant données les diverses fonctions $M_h\left(\frac{\beta}{\alpha}, \rho\right)$ lesquelles augmentent indéfiniment lorsque ρ tend vers zéro, *il est possible de trouver une fonction $\mu(\rho)$ telle que l'inégalité*

$$(6) \quad M_h\left(\frac{\beta}{\alpha}, \rho\right) < \mu(\rho)$$

soit vérifiée, quelque soit h , lorsque ρ est assez petit; il est clair que la valeur ρ' à partir de laquelle l'inégalité sera vérifiée dépendra en général de h ; mais, quel que soit h fixe, il existera un nombre ρ' tel que l'inégalité (9) soit une conséquence de l'inégalité

$$\rho < \rho'.$$

Dès lors, si l'on suppose vérifiées les inégalités

$$(7) \quad \mu\left(\frac{au_n}{\beta}\right) |A_n| < u_n,$$

¹ Voir notamment mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, note II, où l'on en trouvera une démonstration.

on pourra affirmer que les inégalités

$$(8) \quad M_h\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha u_n}{\beta}\right) |A_n| < u_n$$

sont, quel que soit le nombre h fixe, vérifiées à partir d'une certaine valeur de n et cela suffit évidemment pour que la dérivée d'ordre h converge sur les rayons de convergence déterminés comme plus haut.

32. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant

Théorème II. *Les notations et les hypothèses du théorème I étant conservées, sauf que les inégalités (4) sont remplacées par les suivantes*

$$(7) \quad \mu\left(\frac{\alpha u_n}{\beta}\right) |A_n| < u_n$$

on peut affirmer que sur les rayons de convergence, non seulement la série (3), mais encore toutes les séries obtenues en la dérivant terme à terme, convergent absolument et uniformément et sont respectivement égales aux dérivées correspondantes de la série (1).

33. Il est aisé d'étendre les résultats qui précèdent au cas de séries de fractions rationnelles non décomposées en éléments simples. Soit, pour fixer les idées

$$g(z) = \sum \frac{T_n(z)}{R_n(z)}$$

une telle série, dans laquelle les $T_n(z)$ et $R_n(z)$ sont au plus¹ de degré m . On a d'ailleurs

$$R_n(z) = (z - a_n)(z - b_n) \dots (z - l_n)$$

les nombres $a_n, b_n, \dots, l_n$ étant en nombre au plus égal à m et ayant tous leurs modules compris entre deux nombres fixes α et β . Il résulte de ce qui précède que si l'on trace des cercles de même rayon ρ ayant pour centres les divers points $a_n, b_n, \dots, l_n$ et si, menant de l'origine les

¹ Le cas où les degrés augmentent indéfiniment peut, par l'introduction de termes nuls, on par la réunion d'un nombre limité de termes, se ramener à celui où $R_n(z)$ est de degré n ; on peut d'ailleurs le traiter directement par des méthodes analogues, mais les inégalités auxquelles doit alors satisfaire T_n sont plus compliquées.

tangentes à ces cercles, on prolonge ces dernières jusqu'au cercle de rayon β de manière à former une région analogue à la région $S(R, \rho)$, il est possible de trouver au moyen de la fonction $M(R, \rho)$ un maximum de la somme des modules des termes du développement en série de polynomes de la fonction

$$\frac{1}{R_n(z)} = \frac{1}{(z - a_n)(z - b_n) \dots (z - l_n)}.$$

Pour s'en convaincre il suffit de remarquer que si l'on choisit comme contour C le contour formé par des arcs des cercles de rayons ρ , leurs tangentes, et des arcs du cercle de rayon β , il est possible de trouver un contour C' sur lequel le maximum du module de $\frac{1}{R_n(z)}$ puisse être déterminé par la seule connaissance des nombres ρ, m, α, β . Dès lors le maximum trouvé et que l'on peut appeler

$$M^{(m)}(\rho, \alpha, \beta)$$

ne dépend nullement de la situation particulière des pôles de $R_n(z)$ dans la couronne limitée par les cercles de rayons α et β . Dès lors, en assujettissant les coefficients des numérateurs $T_n(z)$ à des inégalités tout à fait analogues à l'inégalité (4) on assurera la convergence absolue et uniforme du développement en série de polynomes de la fonction $g(z)$ actuellement considérée, dans les mêmes conditions que pour la fonction $f(z)$ étudiée précédemment.

De même, on pourra déterminer une fonction

$$\mu^{(m)}(\rho)$$

telle qu'en l'introduisant dans les inégalités à la place de $M^{(m)}(\rho, \alpha, \beta)$ on ait un théorème analogue au théorème II, c'est à dire exprimant la convergence des dérivées de tous les ordres de la série de polynomes sur les rayons de convergence.

34. On peut ainsi énoncer le théorème suivant:

Théorème III. *Etant donnée une classe déterminée de séries de polynomes à région de convergence étoilée, classe définie par les relations*

$$F(z) = \frac{1}{1-z} = \sum P_n(z),$$

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{k_n} a_{n,k} z^k;$$

étant donnés en outre un entier positif m et deux nombres positifs α et β ($\alpha < \beta$), il est possible de déterminer une fonction $\mu(\rho)$ ayant les propriétés suivantes.

Soit

$$(1) \quad g(z) = \sum \frac{T_n(z)}{R_n(z)}$$

une série de fractions rationnelles; on suppose que les degrés de $T_n(z)$ et de $R_n(z)$ sont au plus égaux à m ; le coefficient de la plus haute puissance de z dans $R_n(z)$ est égal à l'unité et les modules des zéros de $R_n(z)$ sont supérieurs à α ; enfin les coefficients de $T_n(z)$ satisfont tous à l'inégalité

$$|A_n| \mu(u_n) < u_n$$

la série $\sum u_n$ étant convergente. Soit

$$g(z) = \sum c_k z^k$$

le développement de $g(z)$ suivant les puissances croissantes de z , développement dont le rayon de convergence est au moins égal à α . Si l'on pose

$$c_{n,k} = c_k a_{n,k},$$

$$Q_n(z) = \sum_{k=1}^{k_n} c_{n,k} z^k,$$

$$(2) \quad g(z) = \sum Q_n(z)$$

il existe, dans tout angle ayant son sommet à l'origine, une infinité de rayons du cercle β sur lesquels la série (2) converge absolument et uniformément et a même somme que la série (1), cette propriété subsistant pour les séries dérivées d'ordre quelconque de (1) et de (2).

35. Les observations que nous avons faites dans le cas des séries de fractions simples, relativement à la détermination sur des courbes de continuité subsistent dans leur intégralité. Seulement, en ce qui concerne l'intégration, il y a lieu de tenir compte des observations sur les résidus

que nous avons faites dans la première partie. Un cas intéressant est celui où les coefficients des polynômes $T_n(z)$ vérifient les inégalités du théorème III, alors que les numérateurs des fractions obtenues par la décomposition en éléments simples ne vérifient pas les inégalités du théorème II, ni même du théorème I, ces numérateurs formant cependant une série absolument convergente. Il est dès lors possible, par intégration le long des courbes de continuité, de déterminer les résidus, absolument comme dans le cas où les conditions du théorème I sont vérifiées. On peut aussi obtenir relativement à l'impossibilité du prolongement analytique dans des régions où les pôles forment un ensemble dense, des résultats qui répondent en partie aux questions posées à la fin de la première partie. Mais, pour ne pas allonger démesurément, nous énoncerons ces résultats à la fin de cette deuxième partie, en nous bornant au cas particulier où la classe de séries de polynômes considérée est celle que M. MITTAG-LEFFLER a le premier signalée. Nous aurons en même temps l'avantage de pouvoir donner un énoncé plus précis, dans lequel rien ne restera indéterminé.

36. Nous allons, en effet, calculer une limite supérieure de la fonction désignée plus haut par $M(R, \rho)$, dans le cas des développements de M. MITTAG-LEFFLER.

Rappelons d'abord les résultats obtenus par M. MITTAG-LEFFLER. Nous utiliserons les notations de son mémoire *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène* (Acta mathematica, t. 23), en les appliquant à la fonction particulière $\frac{1}{1-z}$.

En conséquence, nous poserons ¹

$$(10) \quad \begin{cases} g_n(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^1} \sum_{\lambda_2=0}^{n^2} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^n} \frac{|\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n|}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} \left(\frac{z}{n}\right)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}, \\ G_0(z) = g_0(z) = 1, \\ G_n(z) = g_n(z) - g_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \end{cases}$$

¹ Nous modifions légèrement la formule de M. MITTAG-LEFFLER, afin d'avoir une série *absolument convergente* (ou du moins, afin qu'il soit aisé de démontrer que la convergence est absolue, car il est possible que la série même de M. MITTAG-LEFFLER, soit absolument convergente).

Nous remarquons de suite que $g_n(z)$ est un polynôme en z de degré n^{4n} dans lequel tous les coefficients sont positifs et inférieurs ou égaux à un ; par suite $G_n(z)$ est un polynôme du même degré dans lequel les coefficients sont tous en valeur absolue inférieurs à un et, par suite, si le module de z est inférieur à R , on a certainement

$$|G_n(z)| < 1 + R + R^2 + \dots + R^{n^{4n}} = \frac{R^{n^{4n}+1} - 1}{R - 1}.$$

On peut donc écrire, en supposant $R > 2$

$$(11) \quad |G_n(z)| < R^{n^{4n}+1}.$$

Cette inégalité nous sera très utile. La manière même dont on l'a obtenue prouve qu'elle subsiste si l'on prend un nombre quelconque de fois la dérivée des deux membres par rapport aux variables qui y figurent. On a donc, quelque soit h

$$(12) \quad |G_n^{(h)}(z)| < \frac{d^h}{dR^h} (R^{n^{4n}+1}) < n^{4nh} R^{n^{4n}}.$$

37. Ces inégalités établies, revenons au théorème de M. MITTAG-LEFFLER. Il consiste en ce que l'on a

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z)$$

la série du second membre étant absolument¹ convergente dans tout domaine

¹ Comme nous venons de le dire la convergence *absolue* dont ne parle pas M. MITTAG-LEFFLER et qui résultera manifestement de nos calculs a été obtenue par le changement de n en n^2 . Il est évident que si une série

$$(1) \quad \sum f_n(z)$$

converge *uniformément* dans un domaine D , il est possible en groupant convenablement ses termes, de la transformer en une série qui converge *absolument et uniformément* dans ce même domaine, c'est à dire telle que la série des modules converge *uniformément*. Mais si la série (1) converge uniformément dans une infinité de domaines $D_1, D_2, \dots, D_k, \dots$ de plus en plus grands, la convergence n'étant pas uniforme dans l'ensemble de ces domaines, il n'est pas certain qu'un même groupement de termes puisse rendre la série *absolument et uniformément convergente* dans chaque domaine D_k . C'est cependant ce qui a lieu dans le cas très général où il existe une série de comparaison fixe $\sum u_n$ indépendante de k et telle que le reste de la série (1) soit inférieur au reste de la série de comparaison, à partir d'une certaine valeur de n fixe dans chaque domaine D_k , mais dépendant de k .

fini D ne renfermant à son intérieur ni sur son contour aucune valeur de z réelle et supérieure ou égale à un.

En particulier, on peut choisir comme domaine D le domaine $S(R, \rho)$ défini plus haut. Notre but actuel est de déterminer une limite supérieure $M(R, \rho)$ de la somme des modules des termes de la série, lorsque z a une position quelconque dans le domaine. Pour cela nous déterminerons d'abord un nombre N , tel que l'on ait, dans tout le domaine D

$$(13) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} |G_n(z)| < 1.$$

On aura dès lors, en utilisant les inégalités (12)

$$\sum_0^{\infty} |G_n(z)| < 1 + \sum_{n=1}^{n=N} R^{n^{4N+1}} < \sum_{n=0}^{n=N^{4N+1}} R^n < R^{N^{4N+2}},$$

en supposant toujours $R > 2$, ce qui n'a pas d'inconvénient, puisqu'on peut toujours remplacer une valeur de R par une valeur plus grande. On a donc

$$(14) \quad M(R, \rho) < R^{N^{4N+2}};$$

tout revient à déterminer N .

38. Mais auparavant nous remarquerons que si, pour la valeur de N choisie, on a, en même temps que l'inégalité (13), les inégalités

$$(15) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} |G_n^{(h)}(z)| < A_h, \quad h = 1, 2, \dots, \infty,$$

les inégalités (12) donneront

$$(14') \quad M_h(R, \rho) < \sum_{n=0}^{\infty} |G_n^{(h)}(z)| < A_h + N^{4Nh} R^{N^{4N+1}}$$

Pour atteindre complètement notre but nous devons donc déterminer 1° le nombre N ; 2° les nombres A_h .

39. Dans ce but, reportons-nous au mémoire de M. MITTAG-LEFFLER, et en particulier aux formules (33) de la page 58 dont nous transcrivons la première et la dernière

$$m \geq \varepsilon n \omega(n) \log n \omega(n),$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_{n-2} + m_n \geq m_{n-1} n \omega(n) \log n \omega(n).$$

Comme nous avons pris

$$m_1 = n^4, \quad m_2 = n^8, \quad m_3 = n^{12}, \quad \dots, \quad m_n = n^{4n},$$

on voit que ces inégalités sont vérifiées si l'on pose

$$\omega(n) = n^2;$$

nous adopterons cette valeur pour la fonction $\omega(n)$. L'inégalité (35) de M. MITTAG-LEFFLER deviendra alors

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n| < \frac{g^k}{n^2},$$

et l'on aura, pour n assez grand

$$(16) \quad \left| \frac{1}{1-z} - g_n(z) \right| < \frac{C}{n^2},$$

C étant une constante. Il en résulte

$$|G_n(z)| < \left| \frac{1}{1-z} - g_n(z) \right| + \left| \frac{1}{1-z} - g_{n-1}(z) \right| < \frac{C}{n^2} + \frac{C}{(n-1)^2},$$

et, par suite, l'on voit à la fois que la série $\sum |G_n(z)|$ converge et qu'il est aisé d'obtenir une limite supérieure de son reste.

40. Le point délicat consiste, étant donné le domaine $S(R, \rho)$, à déterminer un nombre N tel que l'inégalité (16) soit vérifiée pour $n > N$, la constante C étant inférieure à $\frac{N}{2}$. En effet s'il en est ainsi, on aura bien

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |G_n(z)| < C \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \right] < \frac{N}{2} \int_N^{\infty} \frac{2dN}{N^2} = 1$$

ce qui est notre inégalité (13).

Or, le domaine $S(R, \rho)$ étant donné, nous pouvons choisir d'abord l'étoile E et le nombre n de manière que l'étoile désignée par $E_n^{(n)}$ dans le mémoire de M. MITTAG-LEFFLER le comprenne entièrement à son in-

térieur. On voit aisément que cette condition sera remplie si l'on choisit pour E le domaine $S(R + 2\rho, \frac{\rho}{4})$ et si l'on détermine n par la condition

$$n - 1 < \frac{4R}{\rho} < n.$$

Il suffit de se reporter aux pages 49. et 50 du mémoire du M. MITTAG-LEFFLER en remarquant que l'on a ici

$$a = e^{-\frac{1}{n\omega(n)}} = e^{-\frac{1}{n^2}}.$$

Quant au nombre g , limite supérieure des valeurs de la fonction $\frac{1}{1-z}$ sur le contour de l'étoile E , il satisfera visiblement à l'inégalité

$$g < \frac{4}{\rho}.$$

Enfin relativement au nombre k qui tend vers l'unité pour n infini (page 58 du mémoire de M. MITTAG-LEFFLER) on voit sans peine que l'on peut toujours supposer

$$k < 2.$$

Donc en prenant $N = \frac{8R}{\rho}$ l'inégalité (16) sera bien vérifiée quel que soit n supérieur à N , la constante $C = gk$ étant inférieure à $\frac{N}{2}$.

L'inégalité (14), en y remplaçant N par cette valeur, nous donne l'inégalité fondamentale¹

$$(17) \quad M(R, \rho) < R^{\left(\frac{8R}{\rho}\right)^{\frac{32R}{\rho}} + 2}.$$

41. Il nous reste à calculer les nombres A_k qui figurent dans les inégalités (15). Il suffit, pour cela, d'utiliser l'inégalité par laquelle nous avons démontré, d'une manière générale, la convergence absolue des séries

¹ Dans mon cours du Collège de France, j'ai indiqué une méthode pour obtenir cette inégalité directement, sans se servir des calculs de M. MITTAG-LEFFLER. Il est plus simple de procéder ainsi que de refaire ces calculs; si on les suppose connus, comme il est naturel ici, la marche du texte est un peu plus brève.

semblables à une série $\sum P_n(z)$ donnée. Nous négligerons d'ailleurs, pour abrégé, la différence entre les séries semblables et les séries dérivées; il s'introduit ainsi, comme il a été expliqué, des facteurs proportionnels aux puissances de z , c'est à dire ici inférieurs à une puissance de R , ce qui est tout à fait sans importance à côté des facteurs exponentiels. Or l'intégration le long du contour $S(R, \rho)$ nous donne

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |G_n^{(h)}(z)| < ML \sum_{n=N+1}^{\infty} |G_n(z)|,$$

M étant le maximum du module de la dérivée d'ordre h sur le contour d'intégration et L la longueur de ce contour. Or on a évidemment

$$M < \frac{h^h}{\rho^{h+1}}, \quad L < 6R.$$

On a donc

$$A_h < \frac{6h^h R}{\rho^{h+1}}$$

et l'on voit que, dans les inégalités (14') ce terme est négligeable par rapport au suivant. On a donc, au moins pour ρ assez petit

$$(17') \quad M_h(R, \rho) < \left(\frac{8R}{\rho}\right)^{\frac{32Rh}{\rho}} R^{\left(\frac{8R}{\rho}\right)^{\frac{32R}{\rho}} + 1}$$

Les inégalités (17) et (17') seront commodément remplacés dans les applications par les suivantes. On a, quel que soit h , pourvu que R soit assez grand

$$(18) \quad M_h\left(R, \frac{1}{R}\right) < \mu(R)$$

en posant

$$(19) \quad \mu(R) = e^{e^{R^2 + \varepsilon}},$$

ε étant un nombre positif quelconque, mais fixe.

On verrait sans peine que la fonction $\mu(R)$ ainsi déterminée est aussi celle qu'il convient d'introduire dans l'énoncé du théorème III, quel que soit m , lorsque l'on choisit le développement de $\frac{1}{1-z}$ défini par les re-

lations (10). Mais, au lieu de développer les calculs qui conduisent à ce résultat, il nous semble préférable de terminer cette seconde partie en énonçant rapidement quelques-uns des résultats précis qui se déduisent des formules (18) et (19), en utilisant les théorèmes I et II précédemment démontrés.

42. **Théorème IV.** *On considère la série*

$$f(z) = \frac{A_n}{(a_n - z)^{m_n}}$$

et l'on suppose que, α, ε, m étant des nombres positifs quelconques, mais fixes, on a,¹ quel que soit n ,

$$|A_n| < e^{-e^{n^{2+\varepsilon}}},$$

$$|a_n| > \alpha,$$

$$m_n < m.$$

On définit des nombres c_k par les égalités

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{m_n(m_n + 1) \dots (m_n + k - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \sum \frac{A_n}{a_n^{m_n+k}}$$

et l'on pose

$$g_n(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^4} \sum_{\lambda_2=0}^{n^8} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{4n}} \frac{|\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n|}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} c_{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \left(\frac{z}{n}\right)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n},$$

$$G_0(z) = g_0(z) = c_0,$$

$$G_n(z) = g_n(z) - g_{n-1}(z).$$

Dès lors la série

$$(S) \quad \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z)$$

converge sur une infinité de droites issues de l'origine, et a pour somme $f(z)$,

¹ On suppose de plus que les m_n sont entiers; il serait aisé de se débarrasser de cette hypothèse, mais il faudrait pour cela entrer dans des détails sur les fonctions non uniformes. On pourrait aussi supposer que m_n augmente indéfiniment avec n , à condition de limiter sa croissance d'une manière précise; de supposer, par exemple $m_n < n$.

la convergence étant absolue et uniforme sur tout segment fini de chacune de ces droites. Il y a d'ailleurs une infinité non dénombrable de telles droites dans tout angle, si petit qu'il soit, ayant son sommet à l'origine. Les dérivées d'ordre quelconque de la série (S) convergent de même sur ces droites et sont égales en chaque point aux dérivées de $f(z)$.

43. Soit E l'ensemble dérivé de l'ensemble des points a_n et Σ l'ensemble des points du plan qui n'appartiennent pas à E . Il peut se faire que l'ensemble Σ se compose de plusieurs parties séparées; la série donnée définit dans chacune d'elles une fonction analytique. Soit D une portion d'un seul tenant du domaine Σ ne contenant pas le point $z = 0$; il est clair que, parmi les droites de convergence définies dans l'énoncé précédent, il y en a dont une portion finie est entièrement comprise à l'intérieur de D . La connaissance des valeurs de la série sur ce segment suffit pour déterminer complètement la fonction analytique que définit cette série dans le domaine D . D'autre part, il est clair que les hypothèses fondamentales de l'énoncé subsistent lorsqu'on remplace z par $z + z_0$ à condition que le point $z = z_0$ n'appartienne pas à E ; le nombre α est simplement remplacé par un autre nombre fini. On peut donc énoncer le

Théorème V. Si l'on pose

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{(z - a_n)^{m_n}}$$

en supposant

$$|A_n| < e^{-e^{n^2 + \varepsilon}},$$

$$m_n < m,$$

et si l'on désigne par Σ l'ensemble des points du plan qui n'appartiennent pas à l'ensemble dérivé E de l'ensemble des points a_n , la série $f(z)$ définit, dans le cas où Σ se compose de plusieurs domaines séparés (en nombre fini ou infini) une fonction analytique dans chacun de ces domaines.

La connaissance d'une de ces fonctions analytiques permet de calculer toutes les autres.

On peut affirmer, de plus, que chacune de ces fonctions analytiques admet comme domaine naturel d'existence la portion de Σ où elle est définie

par la série, c'est à dire que les points de E qui servent de frontière à cette région sont effectivement des points singuliers.

44. Lorsque la série $f(z)$ est donnée, on peut, comme nous l'avons fait observer, y remplacer z par $z + z_0$ sans modifier ses propriétés essentielles, à condition que le point z_0 n'appartienne pas à cet ensemble, c'est à dire qu'à tout point z_0 de Σ on peut ainsi faire correspondre une série de polynômes *relative à ce point*, série qui converge ainsi que toutes ses dérivées, sur une infinité de droites issues du point. Une remarque importante est la suivante: *on peut déterminer les droites de convergence sans se donner le point z_0 ; en d'autres termes, on peut déterminer des droites telles que la série relative à l'un quelconque de leurs points z_0 converge sur toute la droite, le point z_0 n'appartenant pas à E .*

45. Pour s'en rendre compte, il suffit d'observer que les droites de convergence passant par un point sont déterminées par la condition qu'elles rencontrent un nombre limité des cercles C_n dont les centres coïncident avec les divers points a_n et dont les rayons sont égaux aux termes successifs d'une série convergente à termes positifs $\sum u_n$. Or, les cercles C_n étant donnés, on sait qu'il existe une infinité de droites D ne rencontrant qu'un nombre limité d'entre eux. On peut se donner arbitrairement la direction de ces droites; et il en existe encore une infinité non dénombrable dont la distance à un point donné est inférieure à un nombre donné à l'avance. Il est clair que si l'on choisit une droite telle que D , rencontrant un nombre limité de cercles C_n et ne passant par aucun des points a_n et si z_0 est un point quelconque appartenant à D et n'appartenant pas à E , la série de polynômes relative au point z_0 converge sur toute la droite D , ainsi que toutes ses dérivées, la convergence étant d'ailleurs absolue et uniforme dans tout intervalle fini. D'ailleurs pour calculer les coefficients de cette série, il suffit de connaître les valeurs de la fonction et de ses dérivées au point z_0 .

En changeant z en $az + \beta$, on peut évidemment supposer que la droite D coïncide avec l'axe des quantités réelles; on peut de plus, séparer, s'il y a lieu, dans chacune des séries de polynômes, la partie réelle du coefficient de i , de manière à énoncer un résultat dans lequel ne figurent que des quantités réelles, ce qui n'en diminue pas d'ailleurs la généralité.

Dès lors si l'on suppose que sur la droite D (ou axe des x) certains segments font partie de l'ensemble E , et certains autres de l'ensemble Σ , on arrive au résultat suivant.

46. *Il est possible¹ de former des séries de polynomes*

$$f(x) = \sum Q_n(x)$$

qui convergent ainsi que toutes leurs dérivées, pour toute valeur de la variable réelle x , et qui définissent, dans certains intervalles une fonction réelle non analytique, dans d'autres intervalles une fonction réelle analytique. Si le point $x = x_0$ appartient à l'un de ces derniers intervalles, la connaissance de la valeur de $f(x)$ et de ses dérivées en ce point permet de déterminer complètement les coefficients de la série et, par suite, les valeurs de la fonction pour toute valeur réelle de x .

47. Il importe d'attirer l'attention sur une circonstance singulière, que l'on comprendra nettement sur un exemple particulier.

Supposons que l'ensemble E se réduise à un segment de Oy comprenant le point O , par exemple à l'ensemble des points θi , θ étant réel et compris entre -1 et $+1$; le seul point de Ox qui appartienne à E est alors le point $x = 0$; on a donc deux fonctions analytiques sur Ox , l'une définie pour x positif, l'autre pour x négatif; on passe d'ailleurs de l'une de ces fonctions à l'autre au moyen de l'une des séries de polynomes qui peuvent être déduites de chacune d'elles et qui convergent sur tout l'axe Ox . Mais on peut aussi se servir du prolongement analytique ordinaire, en contournant l'ensemble E , c'est à dire en traversant Oy en un point dont le module soit supérieur à l'unité. *Ces deux manières de procéder donnent le même résultat.* La circonstance sur laquelle nous désirons appeler l'attention est la suivante: *il est aisé de construire des cas où ces deux manières de procéder donneraient des résultats différents.* Il suffit en effet, d'ajouter à $f(z)$ une fonction quelconque non uniforme, ayant un point singulier de non uniformité parmi les points de E autres que $z = 0$; par exemple on peut considérer l'une des fonctions

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z) + \sqrt{1+z^2}, \\ h(z) &= f(z) + \log(1+z^2). \end{aligned}$$

¹ Pour former *effectivement* de telles séries il suffit d'employer le procédé que nous appliquons dans la troisième partie à un cas plus général.

Le terme additif donne lieu en chaque point de l'axe réel à une série de polynômes relative à ce point et qui converge, ainsi que toutes ses dérivées, pour toutes les valeurs réelles; il est d'ailleurs clair que l'on obtient des valeurs différentes de la fonction $\sqrt{1+z^2}$ ou $\log(1+z^2)$ suivant que l'on passe des valeurs positives aux valeurs négatives de z en traversant Oy à l'intérieur ou à l'extérieur du segment qui a pour extrémités les points $+i$ et $-i$.

Les fonctions $g(z)$ et $h(z)$ sont uniformes, dans la théorie ordinaire du prolongement analytique; j'ai déjà signalé, dans ma thèse, l'intérêt qu'il pouvait y avoir à les considérer comme faussement uniformes; nous reviendrons plus loin sur ce point, de manière à faire évanouir toute apparence de contradiction possible entre la théorie du prolongement analytique de WEIERSTRASS et la généralisation de cette théorie, qui est naturellement suggérée par ce qui précède et à laquelle est consacrée la troisième partie de ce Mémoire.

TROISIÈME PARTIE.

La généralisation de la théorie du prolongement analytique.

48. Nous venons de voir comment certaines transformations de séries de puissances en séries de polynômes donnent le moyen, non seulement d'obtenir le prolongement analytique sous une forme commode par sa généralité, mais encore d'atteindre des régions dans lesquelles le prolongement analytique est impossible. Les résultats que nous avons obtenus peuvent donc, en un certain sens, être regardés comme une généralisation de la théorie du prolongement analytique; mais, pour établir la nouvelle théorie d'une manière complète, il est nécessaire d'aller plus loin et de montrer que *la transformation en séries de polynômes peut s'appliquer avec succès à des séries de puissances toujours divergentes.*

49. Pour plus de netteté, nous nous bornerons aux séries de polynômes dues à M. MITTAG-LEFFLER (avec la légère modification indiquée

page 354), bien que tout ce qui suit s'applique sans difficulté à une classe quelconque de séries de polynômes à région de convergence étoilée.¹

Rappelons le résultat fondamental dont nous aurons à nous servir. En posant:

$$g_n(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^1} \sum_{\lambda_2=0}^{n^2} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{n^n} \frac{|\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n|}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} \left(\frac{z}{n}\right)^n,$$

$$G_0(z) = g_0(z) = 1,$$

$$G_n(z) = g_n(z) - g_{n-1}(z)$$

la série

$$\sum G_n(z)$$

converge absolument et uniformément ainsi que toutes ses dérivées, dans la région $S(R, \rho)$, quels que soient R et ρ . De plus si l'on désigne par $M_k(R, \rho)$ le maximum de la somme

$$\sum |G_n^{(k)}(z)|$$

¹ Une étude intéressante serait l'étude *simultanée* de *plusieurs* classes différentes, au point de vue auquel nous nous plaçons ici; mais nous laisserons ce point complètement de côté dans ce Mémoire.

On peut faire à la théorie que nous esquissons diverses objections, et observer, par exemple, que le résultat obtenu peut dépendre du choix des constantes c (voir, par exemple MITTAG-LEFFLER, Acta mathematica, t. 24, p. 186, mémoire dont j'ai eu connaissance après avoir écrit celui-ci). A ces objections, basées sur une hypothèse, on pourrait aisément répondre par d'autres hypothèses (par exemple, que l'on peut choisir, pour édifier la théorie, des constantes déterminées, ou des classes de constantes; ou bien, que l'on peut exclure de la théorie les cas où toutes les constantes possibles — ou du moins des catégories très larges — ne fourniraient pas le même résultat, etc.).

Mais au lieu de raisonner ainsi dans le vide, il vaut mieux remarquer simplement qu'une théorie ne saurait être parfaite du premier coup. Sans prétendre comparer, au point de vue de leur importance, la théorie nouvelle avec celle des fonctions analytiques, on peut observer que celle-ci date en réalité du jour où CAUCHY a montré que la série de TAYLOR peut se déduire de la notion de fonction monogène; mais elle est restée longtemps imparfaite: c'est seulement longtemps après que le génie de WEIERSTRASS lui a donné sa forme définitive; on ne doit donc pas s'étonner des imperfections de la théorie nouvelle, qui date seulement de deux ans (puisque les premiers mémoires de M. MITTAG-LEFFLER sont de 1898).

lorsque z reste dans cette région, on a quel que soit le nombre positif ε

$$M_k(R, \rho) < e^{-e^{\left(\frac{R}{\rho}\right)^{1+\varepsilon}}},$$

au moins pour les valeurs de $\frac{R}{\rho}$ dépassant une certaine limite (laquelle dépend évidemment de k et de ε).

50. Considérons l'expression

$$\frac{A_n}{(a_n - z)^{k+1}};$$

traçons un cercle C_n ayant pour centre le point a_n et pour rayon ρ_n et un autre cercle I' ayant pour centre le point $z = 0$ et pour rayon un nombre R indépendant de n . Désignons d'autre part par r_n le module de a_n . Il est clair que si l'on mène de l'origine les tangentes au cercle C_n et si on les prolonge jusqu'au cercle I' , on forme ainsi une région S_n semblable à une certaine région $S(R, \rho)$.¹ Si le point z est intérieur à la région S_n , le point $\frac{z}{a_n}$ est intérieur à la région

$$S\left(\frac{R}{r_n}, \frac{\rho_n}{r_n}\right).$$

On a d'ailleurs

$$\frac{A_n}{(a_n - z)^{k+1}} = \frac{A_n}{a_n^{k+1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{k+1}}.$$

Dès lors, la somme des modules du développement en série de polynômes de la fraction $\frac{A_n}{(a_n - z)^{k+1}}$ est inférieure à

$$\left| \frac{A_n}{a_n^{k+1}} \right| M_k\left(\frac{R}{r_n}, \frac{\rho_n}{r_n}\right)$$

¹ Si l'on désigne par A et B les points de contact des tangentes avec C_n et par A' et B' leurs points d'intersection avec I' , la région S_n est limitée par l'arc $A'B'$ supérieur à π , les droites AA' et BB' et l'arc AB inférieur à π .

c'est à dire inférieure, *au moins pour n assez grand*, si l'on suppose que $\frac{\rho_n}{r_n}$ tende vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, à

$$|A_n| e^{-e^{\left(\frac{R}{\rho_n}\right)^{1+\varepsilon}}},$$

car, dans ces conditions, le facteur $\frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ peut être négligé, en faisant varier aussi peu que l'on veut ε , le nombre k étant supposé inférieur à un nombre fixe indépendant de n .

Il est dès lors évident que, si les nombres a_n sont donnés *d'une manière absolument quelconque*, il suffira de choisir les nombres ρ_n de telle manière que la série

$$\sum \frac{\rho_n}{r_n}$$

soit convergente; il y aura alors une infinité de droites D issues de l'origine et extérieures à toutes les régions S_n d'indice assez grand. Si donc l'on suppose les nombres A_n choisis de manière que la série

$$\sum |A_n| e^{-e^{\left(\frac{R}{\rho_n}\right)^{1+\varepsilon}}}$$

soit convergente, on pourra affirmer que la série de polynomes déduite de la série de fractions rationnelles

$$\sum \frac{A_n}{(a_n - z)^{k_n}}, \quad k_n < m,$$

converge absolument et uniformément, ainsi que toutes ses dérivées, sur chacune des droites D .¹

51. Ainsi, les points a_n étant donnés, il n'est pas difficile de choisir les coefficients A_n de manière à assurer la convergence de la série de polynomes sur une infinité de droites issues du point $z = 0$, lequel peut appartenir à l'ensemble dérivé E de l'ensemble des points a_n ; mais c'est

¹ Ce qui précède montre qu'il en est ainsi à l'intérieur du cercle de rayon R ; mais ce nombre R peut être pris aussi grand que l'on veut, en faisant varier infiniment peu ε , puisque ρ_n tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

là un résultat qu'on aurait pu aisément prévoir, d'après ce qui précède. Nous pouvons aller plus loin et montrer que, les points a_n étant donnés, on peut écrire pour les $|A_n|$ un système d'inégalités telles que, lorsqu'elles sont vérifiées, il existe dans toute région une infinité de droites telles que chacun de leurs points ait la propriété qu'avait le point $z = 0$ dans le cas que nous venons d'étudier: c'est à dire telle que la série de polynômes relative à chacun de leurs points converge sur toute la droite, tous les points de la droite pouvant d'ailleurs appartenir à l'ensemble E , *auquel cas la fonction définie par la série n'est analytique en aucun point de la droite.*

52. Considérons donc une série ¹

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}$$

dont les pôles ont une distribution absolument quelconque. Désignons par u_n des nombres positifs quelconques tels que la série

$$\sum u_n$$

soit convergente et décrivons, de chaque point a_n comme centre, deux cercles, l'un C_n ayant pour rayon u_n et l'autre C'_n ayant pour rayon u_n^2 . Nous pouvons d'ailleurs supposer que l'on a, quel que soit n

$$u_n < 1,$$

de manière que le cercle C'_n soit toujours intérieur au cercle C_n .

53. Soit maintenant A un point du plan extérieur à tous les cercles C_n ; si l'on mène du point A les deux tangentes au cercle C'_n , l'angle de ces deux tangentes est évidemment

$$2 \arcsin \frac{u_n^2}{r_n},$$

¹ Nous supposons tous les dénominateurs du premier degré, uniquement pour abréger l'écriture; le cas où ce degré serait un nombre fini quelconque ou même augmenterait indéfiniment avec n , *suivant une loi donnée*, se traiterait d'une manière analogue.

r_n désignant la distance Aa_n ; mais l'on a $r_n > u_n$; l'angle des tangentes est donc inférieur à

$$2 \arcsin \frac{u_n^2}{u_n} = 2 \arcsin u_n;$$

les valeurs numériques de ces angles forment par suite une série convergente: c'est à dire qu'il y a une infinité de droites passant par le point A et rencontrant un nombre limité de cercles C_n . Pour que la série de polynômes relative au point A , qui peut se déduire de $f(z)$, converge, ainsi que toutes ses dérivées, sur chacune de ces droites, il suffit évidemment que R étant un nombre fixe quelconque, l'on ait, pour n assez grand,

$$|A_n| < e^{-e^{\left(\frac{R}{u_n}\right)^{1+\varepsilon}}}$$

Or, on peut prendre $u_n = n^{-1-\varepsilon}$ et les inégalités précédentes peuvent être, quel que soit le nombre fixe R , remplacées par les suivantes

$$|A_n| < e^{-e^{n^{2+\varepsilon}}},$$

ε étant un nombre positif arbitraire.

D'ailleurs, la série $\sum u_n$ étant convergente, il existe une infinité de droites qui ne rencontrent qu'un nombre limité de cercles C_n ; comme on peut toujours négliger un nombre limité de termes,¹ chaque point de ces droites peut être pris pour A .

54. Pour donner des exemples effectifs, il est commode d'utiliser des résultats connus relatifs à l'approximation des nombres irrationnels. Désignons par α un nombre irrationnel tel que, dans son développement en fraction continue, tous les quotients incomplets soient inférieurs ou égaux à un nombre fixe B ; en particulier, on peut prendre pour α une irrationnelle quelconque du second degré. Pour fixer les idées nous supposons

$$\alpha = \sqrt{2}$$

¹ On suppose, bien entendu, que les termes négligés ne sont pas infinis, c'est à dire que la droite considérée ne passe par aucun point a_n , ce qui est toujours possible.

et l'on a alors

$$B = 2.$$

Soit $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel quelconque et $\frac{P_n}{Q_n}$ la première des réduites de α telle que Q_n soit supérieur à q ; on sait que l'on a

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| > \left| \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \alpha \right| > \left| \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{1}{Q_{n-1} Q_n}.$$

On a d'ailleurs

$$Q_n < BQ_{n-1} + Q_{n-2} < (B + 1)Q_{n-1} < (B + 1)q,$$

$$Q_{n-1} < q$$

et, par suite

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} > \frac{1}{(B + 1)q^2}.$$

On a donc, finalement, quels que soient les entiers p et q :

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| > \frac{1}{(B + 1)q^2}.$$

Cela posé, considérons dans le plan tous les points dont les coordonnées sont des nombres rationnels, c'est à dire tous les points

$$z = \frac{p + ip'}{q},$$

p, p', q étant des nombres entiers; nous supposons que ces points sont les points a_n . Si l'on veut exclure certains d'entre eux, de manière que dans certaines régions la série définisse une fonction analytique régulière; il suffit de supposer nuls les numérateurs correspondants. On sait d'ailleurs que les points donnés, peuvent être, d'une infinité de manières, rangés sous la forme d'une série simple; pour préciser, nous les rangerons de manière qu'en passant d'un point au suivant, la somme

$$|p| + |p'| + |q|$$

n'aille jamais en diminuant.

55. Considérons maintenant une droite D ayant pour équation

$$(D) \quad Ax + A'y + C + C'\alpha = 0,$$

A, A', C, C' étant des nombres entiers quelconques, dont le dernier est supposé essentiellement différent de zéro. La distance d du point $z = \frac{p + ip'}{q}$ à cette droite est

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2 + A'^2}} \frac{Ap + A'p' + (C + C'\alpha)q}{q},$$

c'est à dire

$$d = \frac{C'}{\sqrt{A^2 + A'^2}} \left(\alpha + \frac{Ap + A'p' + Cq}{C'q} \right);$$

or, d'après ce qui précède, on a

$$\left| \alpha + \frac{Ap + A'p' + Cq}{C'q} \right| > \frac{1}{(B + 1)C'^2q^2}.$$

Il en résulte

$$|d| > \frac{1}{C'\sqrt{A^2 + A'^2}(B + 1)q^2} > \frac{c}{q^2},$$

c étant une constante. D'ailleurs, avec les conventions que nous avons faites, il est aisé de voir que le rang n du point $\frac{p + ip'}{q}$ est de l'ordre de grandeur de q^3 lorsque q est assez grand; on a donc certainement, en changeant au besoin la valeur de c ,

$$|d| > \frac{c}{n}.$$

Dès lors, si l'on décrit de chaque point a_n comme centre un cercle C_n ayant pour rayon $\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ la droite D ne pourra rencontrer qu'un nombre limité de ces cercles (d'une manière précise, un nombre au plus égal à $\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$).

Les points de cette droite pourront donc être pris comme points A ; d'ailleurs puisque nous prenons ici $u_n = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ nous aurons $u_n^2 = \frac{1}{n^{2+2\varepsilon}}$ et nous supposons

$$|A_n| < e^{-e^{n^{2+\varepsilon}}},$$

c'est à dire, en observant que le rang n est de l'ordre de grandeur de

$$(|p| + |p'| + |q|)^3,$$

$$|A_{p,p',q}| < e^{-e^{p^2+p'^2+q^2}}.$$

Lorsque cette inégalité est vérifiée on peut affirmer que la série

$$\sum \frac{A_{p,p',q}}{z - \frac{p + ip'}{q}}$$

donne naissance, en tout point d'une droite D à une série de polynomes convergente ainsi que toutes ses dérivées, sur la droite D tout entière.

56. Un changement de variable très simple permet d'obtenir une droite D coïncidant avec l'axe réel et l'on obtient le résultat suivant.

Théorème. *Si l'on pose*

$$f(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \sum_{p'=-\infty}^{p'=+\infty} \frac{\varphi(p, p', q)}{x + i\sqrt{2} - \frac{p + ip'}{q}},$$

la fonction $\varphi(p, p', q)$ vérifiant l'inégalité

$$|\varphi(p, p', q)| < e^{-e^{p^2+p'^2+q^2}},$$

la série $f(x)$ qui converge absolument et uniformément ainsi que toutes ses dérivées, sur tout segment fini de l'axe des x , définit une fonction d'une variable réelle continue, ainsi que ses dérivées de tous les ordres, pour toute valeur de la variable. Cette fonction n'est d'ailleurs analytique pour aucune valeur de x si l'on suppose $\varphi(p, p', q)$ constamment différent de zéro.

La fonction $f(x)$ a la propriété fondamentale suivante; si l'on désigne par $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $\dots$, $f^{(k)}(x_0)$, $\dots$ sa valeur et celle de ses dérivées en un point réel quelconque x_0 et si l'on pose

$$g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^1} \sum_{\lambda_2=0}^{n^2} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{n^n} \frac{f(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} \left(\frac{x - x_0}{n} \right)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n},$$

$$G_0(x) = g_0(x) = f(x_0),$$

$$G_n(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x)$$

la série

$$f(x) = \sum_0^{\infty} G_n(x)$$

converge absolument et uniformément, ainsi que toutes ses dérivées, dans tout intervalle fini et l'on a quels que soient x et k

$$f^{(k)}(x) = \sum_0^{\infty} G_n^{(k)}(x).$$

57. Le théorème précédent fait connaître une classe de fonctions d'une variable réelle possédant, comme les fonctions analytiques, la propriété d'être complètement déterminées par la connaissance de leur valeur et des valeurs de leurs dérivées, *en un point*. On peut, après avoir constaté par un exemple l'existence effective de telles fonctions, les définir *a priori* et baser sur leur considération une généralisation de la théorie du prolongement analytique. C'est la marche que nous allons suivre.

58. *Etant donnée une fonction d'une variable réelle x , continue ainsi que toutes ses dérivées dans un intervalle AB , nous dirons que c'est une fonction (M) dans cet intervalle si, quels que soient les nombres x_1 et x_0 compris dans cet intervalle et l'entier positif k , l'on a*

$$F^{(k)}(x_1) = \sum_0^{\infty} G_n^{(k)}(x_1 - x_0)$$

la série du second membre étant absolument et uniformément convergente lorsque x_0 étant fixe, x_1 est intérieur à un intervalle quelconque intérieur à AB .

Les polynômes $G_n(\xi)$ sont d'ailleurs définis par les relations

$$g_n(\xi) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^1} \sum_{\lambda_2=0}^{n^2} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{n^n} \frac{F^{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)}(x_0)}{|\underline{\lambda_1}| |\underline{\lambda_2}| \dots |\underline{\lambda_n}|} \left(\frac{\xi}{n}\right)^{\lambda_1+\dots+\lambda_n},$$

$$G_n(\xi) = g_n(\xi) - g_{n-1}(\xi).$$

59. Il résulte immédiatement de la définition qu'une fonction (M) est complètement déterminée par la connaissance de la suite

$$(\Sigma) \quad F(x_0), F'(x_0), \dots, F^{(n)}(x_0), \dots$$

x_0 étant un point quelconque de AB .

60. Étant donnée une suite telle que Σ , la question de savoir si elle définit une fonction (M) se ramène à l'étude de certaines séries. Il serait désirable, au point de vue de la commodité des applications, de remplacer cette étude directe, pratiquement beaucoup trop compliquée, par des critères plus simples;¹ mais ces difficultés sont d'ordre purement pratique et n'ont aucune importance en théorie; l'essentiel est que l'on ait constaté par des exemples, que les conditions imposées par la définition aux fonctions (M) sont parfaitement compatibles, bien qu'a priori elles puissent paraître surabondantes. Ce qui serait plus important, c'est l'extension aux fonctions (M) des propriétés qui m'ont permis d'utiliser dans la théorie des équations différentielles d'autres procédés de sommation des séries divergentes.² Mais c'est un point que je laisserai de côté, pour m'occuper exclusivement de la généralisation de la théorie du prolongement analytique.

Si nous considérons un segment de droite AB situé d'une manière quelconque dans le plan de la variable complexe z , une transformation de la forme

$$z = (\alpha + i\beta)x + \gamma + i\delta$$

peut amener ce segment à coïncider avec un segment de l'axe des x . Si une fonction définie sur AB est une fonction (M) après cette transforma-

¹ Pour rechercher ces critères, il sera peut être commode de modifier la définition en ne précisant pas la valeur des nombres appelés $m_1, m_2, \dots, m_n$ dans le mémoire de M. MITTAG-LEFFLER, et pris ici égaux à $n^4, n^8, \dots, n^{4^n}$ mais d'assujettir seulement ces nombres à vérifier des inégalités convenables.

² Voir mon *Mémoire sur les séries divergentes*, pages 95—99 et 121.

Pour l'étude des relations qu'il y a entre la théorie de M. MITTAG-LEFFLER, la théorie développée ici, et la théorie générale des séries divergentes, je me permets de renvoyer à mes *Leçons sur les séries divergentes* qui paraîtront prochainement (Paris, Gauthier-Villars, 1901).

tion, nous conviendrons de dire qu'elle est une fonction (M) sur tout AB et la formation des séries de polynômes qui la représentent, ainsi que ses dérivées, est exactement la même que dans le cas particulier étudié d'abord.

61. Soient maintenant deux segments AB , CD , ayant un point commun I et sur chacun de ces segments une fonction (M) ; si ces deux fonctions prennent, ainsi que toutes leurs dérivées par rapport à z , la même valeur au point I , nous conviendrons de dire que chacune d'elles est le *prolongement* de l'autre.

Etant donnée une fonction (M) définie sur AB et un segment CD rencontrant AB au point I , le prolongement sur CD de la fonction (M) définie sur AB peut ne pas exister; mais, *s'il existe, il est unique*. D'ailleurs, dans le cas où la fonction (M) est analytique dans le voisinage du point I (sur AB), le prolongement existe au moins dans un certain voisinage de I (sur CD) et coïncide avec celui que donne la théorie ordinaire des fonctions analytiques.

62. Etant donnés un point I et une suite telle que Σ , s'il existe au moins un segment AB passant par I et tel que la suite Σ définisse une fonction (M) sur AB , on dira que la suite Σ constitue un élément de fonction (M) . Un tel élément peut définir une fonction (M) dans une seule direction, ou dans plusieurs, ou dans une infinité.¹

Nous pouvons maintenant acquérir la notation d'une fonction (M) uniforme dans une région du plan.

63. Soit (S) une région du plan simplement connexe et (D) un ensemble de droites D dense dans tout le plan. Nous entendons par là qu'étant donnés deux points quelconques du plan et un nombre arbitraire ε il existe une droite D telle que la distance des deux points à cette droite soit inférieure à ε . Sur chacune des droites D , il existe un nombre limité ou illimité de segments intérieurs à (S) ; nous supposons que sur chacun de ces segments est définie une fonction M . *Nous supposons de plus,*

¹ Il y aura sans doute lieu d'introduire une dénomination particulière pour les éléments tels que les directions dans lesquelles ils définissent une fonction (M) forment un faisceau partout dense.

qu'en un point d'intersection intérieur à S de deux quelconques des droites D les fonctions (M) définies sont le prolongement l'une de l'autre. Dans ces conditions, nous dirons que les diverses fonctions (M) définies sur les divers segments de toutes les droites D constituent une branche unique de fonction (M) , uniforme dans S . Il est clair qu'une telle branche est complètement définie par un seul de ses éléments; d'ailleurs la définition précédente comprend, comme cas particulier, la définition du prolongement analytique. Si une fonction analytique est définie dans un domaine S' d'un seul tenant intérieur à S et si la fonction (M) coïncide avec elle, ainsi que ses dérivées de tout ordre, en un point de S' la coïncidence a lieu dans tout S' .

Mais il existe effectivement, comme nous l'avons montré, des fonctions (M) uniformes dans une région, sans être analytiques en aucun point de cette région. Tel est le cas de la fonction considérée page 372, en supposant que $\varphi(p, p', q)$ ne soit jamais nul.

64. Mais dans certains cas, on peut, en partant d'une fonction analytique uniforme, définir une fonction (M) non uniforme; alors une branche seulement de la fonction (M) coïncide avec la fonction analytique, dans son domaine naturel d'existence.

65. Posons, par exemple

$$\varphi(z) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{p=q} \frac{e^{-e^{p^q} + q^q}}{qz - p}$$

et considérons la fonction

$$\Phi(z) = \varphi(z) + A\sqrt{z - z^2} + B \log \frac{z}{z-1}.$$

La fonction $\varphi(z)$ est une fonction uniforme dans tout le plan, admettant comme coupure essentielle le segment rectiligne $0 < z < 1$, que nous désignerons par OI . Par suite la fonction $\Phi(z)$ est une fonction analytique uniforme; car, la détermination du radical et celle du logarithme étant une fois choisies, on ne franchira jamais le segment OI .

Mais si l'on prend dans le plan un point P non situé sur l'axe réel, et si l'on forme la série (M) qui se déduit des valeurs en P de la fonction $\Phi(z)$ et de ses dérivées, on obtiendra une fonction (M) sur des segments qui traversent OI . Cette fonction (M) peut ainsi être suivie dans

tout le plan, sur des chemins différant aussi peu que l'on veut d'un chemin quelconque et, si l'on procède ainsi, *on constatera que cette fonction (M) n'est pas uniforme*. Dès lors si l'on considère le cercle décrit sur OI comme diamètre on constatera aisément que l'on a une branche de fonction (M) uniforme dans ce cercle; mais si dans l'un des deux demi-cercles cette fonction coïncide avec la fonction analytique $\Phi(z)$, dans l'autre demi-cercle, elle en différera, la différence étant visiblement égale à

$$2A\sqrt{z-z^2} + 2i\pi B.$$

66. Ainsi il peut arriver qu'une fonction (M) uniforme dans un domaine d'un seul tenant (S) coïncide, dans deux parties séparées de ce domaine, avec deux fonctions analytiques différentes. Mais, dans ce cas, l'une quelconque de ces fonctions analytiques ne peut pas être prolongée, *sans quitter (S)*, dans la partie de (S) où l'autre est définie.

Il est inutile d'insister: on voit qu'il ne saurait y avoir de contradiction entre la théorie que nous exquissions ici et la théorie des fonctions analytiques édifiée par WEIERSTRASS.

Nous n'insisterons pas non plus sur les singularités que peuvent présenter les fonctions (M) non uniformes, les points de ramification ou les points singuliers logarithmiques pouvant former un ensemble partout dense; car il semble que l'étude des fonctions (M) uniformes doive être d'abord tentée.

67. Nous avons déjà fait connaître une classe très étendue de fonctions (M) uniformes; nous les avons définies par des séries dans lesquelles les points singuliers sont mis en évidence. Il serait évidemment désirable de connaître des cas dans lesquels l'étude d'une fonction (M) peut être faite en partant d'un *élément*, sans que les points singuliers soient connus à priori. Mais ce que nous connaissons de la théorie des fonctions analytiques fait craindre qu'il ne soit extrêmement difficile de former un tel exemple. En effet, en dehors de deux cas singuliers, les fonctions entières d'une part, et les séries de TAYLOR admettant leur cercle de convergence comme coupure d'autre part, je ne pense pas qu'il existe de circonstance¹ dans laquelle la

¹ Citons cependant, dans cet ordre d'idées, certains résultats obtenus par MM. FABRY, LEAU et LE ROY (voir notamment Comptes Rendus, tomes 127 et 128).

connaissance d'un élément de fonction analytique ait permis effectivement d'obtenir les propriétés de la fonction, sans que ces propriétés fussent connues antérieurement au développement.

68. En terminant, je vais indiquer comment l'on peut résoudre une petite difficulté qui pourrait être soulevée à propos de l'exemple donné plus haut, mais sur laquelle nous n'avons pas insisté, pour ne pas interrompre la suite du raisonnement.

Nous avons considéré deux systèmes de cercles ayant pour centres les points a_n ; les uns, les cercles C_n , ont pour rayons les nombres u_n ; les autres, les cercles C'_n , ont pour rayons les nombres u_n^2 . Nous considérons maintenant une infinité d'autres systèmes de cercles, les cercles C''_n dont les rayons seront u_n^3 , les cercles C'''_n dont les rayons seront u_n^4 , ..., les cercles $C_n^{(a-1)}$ dont les rayons seront u_n^a , Nous avons vu que si l'on considère une droite D qui rencontre un nombre limité de cercle C_n , tout point A de D possède la propriété suivante: dans tout angle ayant son sommet au point A , il existe une infinité non dénombrable de droites qui ne rencontrent qu'un nombre limité de cercles C'_n . Si l'on désigne par D' l'une de ces droites, la série de polynômes relative au point A converge ainsi que ses dérivées sur tout D' : il en est d'ailleurs de même de la série de polynômes relative à un autre point de D' ; on a donc sur D' une fonction (M) .

Il a donc été possible, partant d'une fonction (M) définie sur D , de la prolonger dans une infinité de directions à partir de chaque point A de D .

69. Mais si l'on considère maintenant un point quelconque A' de D' , on ne peut pas affirmer que le point A' ait la même propriété que le point A , c'est à dire ne soit à l'intérieur que d'un nombre limité de cercles C_n et, par suite, soit tel qu'il se trouve dans tout angle ayant son sommet en A' , une infinité non dénombrable de droites ne rencontrant qu'un nombre limité de cercles C'_n . Il y a cependant sur D' des points B à partir desquels le prolongement de la fonction (M) est possible dans au moins une direction; ce sont les intersections avec D' des droites analogues à D' qui passent par un point de D autre que A ; cela suffit, à la rigueur, pour bâtir la théorie; mais celle-ci prendrait évidemment une forme plus élégante si chaque point A' de D' avait la même propriété que chaque point A de D .

Or il est clair que, tout point A' de D' ne pouvant être à l'intérieur que d'un nombre limité de cercles C'_n , il existe dans tout angle ayant son sommet en A' , une infinité non dénombrable de droites ne rencontrant qu'un nombre limité de cercles C''_n . En effet si la distance $A'a_n$ est désignée par r_n , on a, pour n assez grand,

$$r_n > u_n^2$$

et comme, d'autre part, l'angle des tangentes menées de A' au cercle C''_n est

$$2 \arcsin \frac{u_n^3}{r_n}$$

les valeurs numériques de ces angles forment une série convergente, puisque la série $\sum u_n$ est convergente par hypothèse.

On peut donc mener par A' une infinité non dénombrable (dans tout angle) de droites D'' ne rencontrant qu'un nombre limité de cercles C''_n . Par chaque point A'' d'une droite D'' il passe une infinité de droites D''' ne rencontrant qu'un nombre limité de cercles C'''_n , et ainsi de suite.

70. On voit que les droites successivement obtenues $D, D', D'', D''', \dots$ n'ont pas les mêmes propriétés; il est cependant possible, et il nous sera fort commode, de les définir par une propriété qui leur est commune.

Nous dirons qu'une droite est une droite (D) s'il existe¹ un nombre fini α tel que cette droite ne rencontre qu'un nombre limité de cercles $C_n^{(\alpha)}$.

Il résulte manifestement de ce qui précède que, par tout point A pris sur une droite D , il passe, dans tout angle, une infinité non dénombrable de droites (D). Car, si le point A n'est intérieur qu'à un nombre limité de cercles $C_n^{(\alpha)}$ il passe par ce point, dans tout angle, une infinité non dénombrable de droites ne rencontrant qu'un nombre limité de cercles $C_n^{(\alpha+1)}$; ces droites sont des droites (D).

71. Si donc on choisit les numérateurs de la série de fractions rationnelles, de manière que cette série définisse une fonction (M) sur chaque droite (D), on pourra effectuer le prolongement de cette fonction (M) de

¹ On suppose, de plus, bien entendu, que la droite D ne passe par aucun des points a_n .

la manière la plus commode, en cheminant exclusivement sur des droites (D) , c'est à dire sur des droites telles que l'on puisse se déplacer, à partir de l'un quelconque de leurs points, dans une direction aussi voisine que l'on veut d'une direction donnée à l'avance.

Or, rien n'est plus aisé que d'obtenir ce résultat; voici l'un des moyens que l'on peut employer.

72. Désignons par $\varphi(n)$ une fonction quelconque de n , assujettie à la seule condition d'augmenter indéfiniment avec n , en n'étant jamais décroissante. Soit I_n le cercle qui a pour centre le point a_n et pour rayon $u_n^{\varphi(n)}$. Il est clair que chaque droite (D) ne rencontre qu'un nombre limité de cercles I_n , puisqu'il existe un nombre α tel qu'elle ne rencontre qu'un nombre limité de cercles $C_n^{(\alpha)}$ et qu'à partir d'une certaine valeur de n , on a certainement

$$\varphi(n) > \alpha + 1$$

de sorte que le cercle I_n est dès lors intérieur au cercle $C_n^{(\alpha)}$. On voit dès lors très aisément qu'il suffit de supposer:

$$|A_n| < e^{-e^{n^{\varphi(n)}}}$$

pour que la série

$$\sum \frac{A_n}{(z - a_n)^{k_n}}$$

définisse une fonction (M) sur chacune des droites (D) , la fonction $\varphi(n)$ étant assujettie à la seule condition d'augmenter indéfiniment avec n , ce qui permet de négliger les facteurs constants qui la multiplieraient.

Conclusion.

73. Les recherches entreprises dans ce Mémoire peuvent être envisagées à deux points de vue, que l'on peut appeler brièvement le point de vue *complexe* et le point de vue *réel*.

Au point de vue de la théorie des fonctions d'une variable complexe, je me permettrai de rappeler que, dès 1894, j'ai signalé dans ma Thèse la nécessité qu'il y avait, à mon avis, à élargir la théorie du prolongement analytique. Malheureusement, je ne pouvais étayer cette opinion

que d'un trop petit nombre de faits, de sorte que je fus peut être le seul à être vraiment convaincu qu'elle était juste. L'an dernier, M. FABRY a émis des idées analogues dans les Comptes Rendus (t. 128) et M. PICARD y a publié aussi sur ce sujet quelques pages intéressantes; mais la manière dont il envisageait le problème était très différente de la mienne. J'espère que les résultats de ce Mémoire convaincront tous les lecteurs que la généralisation de la théorie du prolongement analytique s'impose nécessairement à l'attention des géomètres: l'observation attentive des faits analytiques y conduit *naturellement*; *on voit* la fonction analytique traverser, par des passages infiniment étroits, la coupure qui paraissait infranchissable.

Il serait superflu autant que prématuré de discuter ici l'importance que pourra prendre en analyse cette nouvelle théorie; il est, sans doute, inutile de dire que je n'ai jamais pensé que ces fonctions à singularités compliquées puissent devenir jamais aussi importantes que les fonctions analytiques les plus simples: polynômes, fonctions entières, méromorphes, algébriques, abéliennes. Mais leur étude ne devrait-elle servir qu'à élargir notre concept de la fonction de variable complexe, il me semble qu'elle ne serait pas inutile.

74. Au point de vue des variables réelles, nous avons appris à connaître une catégorie peut être intéressante de fonctions de variables réelles pourvues de dérivées de tout ordre: ce sont les fonctions (M) qui comprennent comme cas particulier les fonctions analytiques et qui, comme ces dernières, sont complètement déterminées lorsqu'on connaît, en un point, leur valeur et celles de leurs dérivées.

Il est clair que, pour les fonctions définies expérimentalement, la question de savoir si elles sont ou non analytiques est complètement dépourvue de sens; on peut les représenter avec une approximation supérieure aux erreurs d'expérience par une formule d'espèce quelconque, pourvu qu'elle renferme assez d'indéterminées. Mais certaines formes peuvent être préférables, c'est à dire donner avec moins d'indéterminées une approximation plus grande; le but des théories physiques est souvent de déterminer à priori ces formes, dont l'expérience permet ensuite de calculer les coefficients. Il est dès lors légitime de se demander s'il est préférable de prendre les premiers termes du développement en série d'une fonction ana-

lytique, ou d'une fonction (M), ou de toute autre catégorie de fonctions que l'on pourrait définir. En ce sens, la distinction entre ces diverses catégories peut ne pas rester spéculative, mais avoir des conséquences pratiques dans l'étude des phénomènes naturels.¹

75. Enfin signalons en terminant que, le théorème de M. MITTAG-LEFFLER pouvant être étendu² aux fonctions de plusieurs variables complexes, on peut leur étendre aussi la théorie des fonctions (M). En particulier, en nous bornant aux variables réelles, il existe des fonctions de deux variables réelles x et y , qui ne sont analytiques pour aucun système de valeurs de ces variables et qui sont cependant telles que la connaissance, *en un point*, de leur valeur et de la valeur de toutes leurs dérivées partielles, permet de former une série de polynômes convergeant uniformément, ainsi que toutes ses dérivées, dans toute région finie du plan, et représentant la fonction considérée dans tout le plan.

On peut dès lors se poser bien des questions, qui paraissent malheureusement difficiles à aborder. Par exemple, on peut, comme me l'a fait observer M. PAINLEVÉ, se demander si l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

dans laquelle $f(x, y)$ est une fonction (M) de ses deux arguments, définit pour y une fonction (M) de x , auquel cas la méthode de BRIOT et BOUQUET permet évidemment de calculer les dérivées successives de y par rapport à x et de former, par suite, le développement de y en série de polynômes.

Paris, le 17 mai 1900.

¹ J'ai déjà remarqué dans ma Thèse que le potentiel d'un corps de masse fini, qui serait formé d'une infinité de molécules, se présente sous la forme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{(x-a_n)^2 + (y-b_n)^2 + (z-c_n)^2}}$$

c'est à dire sous une forme tout à fait analogue à celle des séries de fractions rationnelles que nous avons étudiées, puisque la série $\sum A_n$ est ici convergente.

² La possibilité de cette extension a été signalée tout d'abord par M. MITTAG-LEFFLER (Comptes Rendus, 5 mai 1899). Peu de temps après, M. PAINLEVÉ a indiqué une méthode de démonstration qui s'étend sans difficulté aux fonctions de plusieurs variables (Comptes Rendus, 23 mai 1899). M. MITTAG-LEFFLER développera prochainement (dans une quatrième Note) les résultats qu'il possède à ce sujet.