SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET LA GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DE DIRICHLET.

(Extrait d'une lettre de M. Emile Picard à M. Mittag-Leffler.)

Mon cher ami.

Je suis revenu dans mon cours, au printemps de 1899, sur mes anciennes recherches relatives à l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique au moyen des valeurs données de l'intégrale sur un contour fermé, et j'ai publié un résumé très succinct de ces leçons dans les Comptes Rendus de l'académie des Sciences (19 juin 1899 et 19 février 1900). Mon principal objet dans ces leçons était de bien mettre en évidence les hypothèses nécessaires pour la complète rigueur des raisonnements. Le premier problème fondamental est, comme vous vous le rappelez, l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu \tag{I}$$

quand on se donne les valeurs de l'intégrale supposée continue sur un contour *suffisamment petit*, contour que je supposerai *régulièrement analytique*. Si on suppose seulement relativement aux fonctions a, b, c de x et y, qu'elles sont continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre dans la région considérée du plan, il est nécessaire pour la complète rigueur des raisonnements tels que je les ai présentés dans mon mémoire du Journal de mathématiques en 1890, de supposer que la succession des valeurs données sur le contour admet *des dérivées des trois premiers ordres;* c'est ce que j'ai indiqué dans la première des notes citées ci dessus, et ce qui se trouve développé dans un petit mémoire inséré dans le premier fascicule du Journal de mathématiques (1900). Aussi je ne m'occuperai pas de ce cas, et je vais me placer ici dans le cas où les coefficients a, b, c sont des fonctions *analytiques* réelles des deux variables réelles x et y. C'est un cas que j'ai déjà examiné dans un mémoire du Journal de l'Ecole Polytechnique en 1890, et je ne vais d'abord que reprendre, avec plus de détails, la méthode que j'ai suivie alors et qui m'a permis notamment de démontrer ce résultat intéressant que *toutes les intégrales de l'équation* (I) *sont analytiques.* Une des conclusions, auxquelles j'arriverai encore, relativement aux valeurs données sur le contour, est que l'on peut supposer seulement pour traiter le problème proposé que *leur ensemble forme une fonction continue.* J'ajouterai aussi une remarque importante concernant une méthode de prolongement dont je me suis occupé à deux reprises différentes (Journal de mathématiques, 1896 et 1898). J'ai donné un résumé de cette étude dans les Comptes-Rendus (23 avril, 1900).

1. Considérons d'abord l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi(x, y), \tag{1}$$

en supposant que $\varphi(x, y)$ soit une fonction analytique de x et y. On la développe en série trigonométrique, en posant

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

et on a ainsi

$$\varphi(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \sin\nu\theta).$$

Les coefficients a_ν et b_ν sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de r, commençant par un terme en r^ν; d'ailleurs dans ces séries les exposants des puissances de r sont de même parité. Soit donc

$$a_\nu = \left(\frac{r}{R}\right)^\nu \left[\alpha_{0\nu} + \alpha_{1\nu}\frac{r^2}{R^2} + \ldots + \alpha_{m\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots\right].$$

Plaçons-nous un moment à un point de vue purement formel, c'est à dire ne nous préoccupons pas de la question de convergence, et cherchons l'intégrale de l'équation (1), continue dans le cercle de rayon R, et s'annulant sur la circonférence. En posant

$$u(x\,,\,y) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (p_\nu \cos \nu\theta + q_\nu \sin \nu\theta),$$

p_ν sera déterminé par l'équation

$$\frac{d^2 p_\nu}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dp_\nu}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} p_\nu = a_\nu$$

avec la condition que p_ν soit finie pour $r = 0$, et s'annule pour $r = R$.

La valeur de p_ν se trouve par un calcul facile, et on obtient

$$2\nu p_\nu = r^\nu \int_R^r \frac{a_\nu}{r^{\nu-1}} dr - \frac{1}{r^\nu}\int_0^r a_\nu r^{\nu+1} dr + \frac{r^\nu}{R^{2\nu}} \int_0^R a_\nu r^{\nu+1} dr.$$

En remplaçant a_ν par sa valeur, on trouve de suite

$$p_\nu = R^2 \cdot \frac{r^\nu}{R^\nu} \sum_{m=0}^{m=\infty} \alpha_{m,\nu} \left(\frac{r^{2m+2}}{R^{2m+2}} - 1\right) \frac{1}{(2m+2)(2m+2\nu+2)}$$

et cette formule subsiste pour $\nu = 0$.

2. Ces préliminaires posés, envisageons l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu \tag{E}$$

où a, b, c sont des fonctions analytiques de x et y.

Voici tout d'abord quelques remarques immédiates sur les développements de a, b, c. D'après la définition même que nous donnons des fonctions analytiques réelles de deux variables réelles x et y, nous aurons certainement pour le développement de $a(x\,,\,y)$ en série trigonométrique

$$a = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (P_\nu \cos \nu\theta + Q_\nu \sin \nu\theta)$$

où P_ν et Q_ν sont des séries de la forme

$$P_\nu = r^\nu [\alpha_{0,\nu} + \alpha_{1,\nu} r^2 + \ldots + \alpha_{m,\nu} r^{2m} + \ldots]$$

et si l'on pose $A_{m,\nu} = |\alpha_{m,\nu}|$ la série

$$\Sigma r^\nu [A_{0,\nu} + A_{1,\nu} r^2 + \ldots + A_{m,\nu} r^{2m} + \ldots]$$

est convergente pour r assez petit, soit pour $r \leqq \rho$. Il en résulte d'abord que le produit

$$A_{m,\nu} \cdot \rho^{\nu+2m}$$

est moindre qu'un nombre fixe. Ecrivons alors P_ν sous la forme

$$P_\nu = \left(\frac{r}{R}\right)^\nu \left(\frac{R}{\rho}\right)^\nu \left[\alpha_{0,\nu} \cdot \rho^\nu + \ldots + \alpha_{m,\nu} \rho^{2m+\nu} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2m} \left(\frac{r}{R}\right)^{2m} + \ldots\right].$$

Or donnons un nombre ε compris entre zéro et un, et qui va rester fixe dans toute la suite des calculs. Si $\frac{R}{\rho}$ est assez petit, on aura pour toutes valeurs de m et ν

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^\nu < \frac{\varepsilon^{2\nu}}{(\nu + 1)^3} \quad \text{et} \quad \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2m} < \frac{\varepsilon^{2m}}{(m + 1)^3}.$$

Il suffira évidemment que

$$\frac{R}{\rho} < \frac{\varepsilon^2}{(m + 1)^{\frac{3}{m}}},$$

pour toute valeur de l'entier positif m, ce qui entraîne

$$\frac{R}{\rho} < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Par suite, en représentant P_ν par l'expression

$$(2) \qquad P_\nu = \left(\frac{r}{R}\right)^\nu \left[p_{0,\nu} + p_{1,\nu} \frac{r^2}{R^2} + \ldots + p_{m,\nu} \frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots\right]$$

on aura

$$(3) \qquad |p_{m,\nu}| < H \cdot \frac{\varepsilon^{2m}}{(m + 1)^3} \cdot \frac{\varepsilon^{2\nu}}{(\nu + 1)^3}$$

H étant un nombre fixe, c'est à dire indépendant de m, ν et R. Nous supposons donc, comme il est permis d'après ce qui précède, que dans le développement trigonométrique de la fonction $a(x, y)$, les coefficients

P_ν et Q_ν soient réprésentés par des développements de la forme (2) avec les conditions (3).

3. Revenons maintenant à l'équation (E) et supposons que u soit une fonction de x et y susceptible d'être mise sous la forme

$$u = \Sigma a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \sin\nu\theta$$

où

$$a_\nu = \left(\frac{r}{R}\right)^\nu \left[\alpha_{0,\nu} + \alpha_{1,\nu}\frac{r^2}{R^2} + \ldots + \alpha_{m,\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots\right]$$

et supposons d'abord que l'on ait

$$|\alpha_{m,\nu}| < \frac{K\varepsilon^{2m}}{(\nu+1)^2},$$

K étant un nombre fixe indépendant de m, ν et R, et ε étant toujours le nombre inférieur à *un* considéré plus haut.

Cherchons quelle sera la forme du second membre de l'équation (E). En faisant le calcul de $\frac{\partial u}{\partial x}$, on trouve facilement comme coefficient de $\cos\nu\theta$ provenant de la partie $\Sigma a_\nu \cos\nu\theta$

$$\left(\frac{r}{R}\right)^\nu \times \frac{1}{2R} \times \left[\begin{array}{l} \quad 2\alpha_{1,\nu-1} + \ldots + 2m\alpha_{m,\nu-1}\frac{r^{2m-2}}{R^{2m-2}} + \ldots \\ + 2\alpha_{1,\nu+1}\frac{r^2}{R^2} + \ldots + 2m\alpha_{m,\nu+1}\frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots \\ + 2(\nu+1)\left(\alpha_{0,\nu+1} + \ldots + \alpha_{m,\nu+1}\frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots\right) \end{array}\right]$$

et une expression analogue pour la seconde partie.

Ecrivons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Sigma(A_\nu \cos\nu\theta + B_\nu \sin\nu\theta).$$

Il résulte des développements précédents que l'on a pour A_ν et B_ν des développements de la forme

$$\left(\frac{r}{R}\right)^\nu \left[\beta_{0,\nu} + \ldots + \beta_{m,\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots\right]$$

avec des inégalités de la forme

$$|\beta_{m,\nu}| < \frac{K.\Theta.(m+1)}{R(\nu+1)}\varepsilon^{2m},$$

Θ étant un nombre fixe, indépendant de m, ν, K et R.

Il faut maintenant former le produit

$$a\frac{\partial u}{\partial x}$$

et avoir une limite des coefficients de $\cos\nu\theta$ et $\sin\nu\theta$ dans ce produit. C'est ce que l'on obtiendra, en mettant d'abord à part le facteur indépendant de ν

$$\frac{KH\Theta}{R}\left[1 + 2\varepsilon^2\frac{r^2}{R^2} + \ldots + (m+1)\varepsilon^{2m}\frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots\right]$$
$$\times\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2^3}\frac{r^2}{R^2} + \ldots + \frac{\varepsilon^{2m}}{(m+1)^3}\frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots\right]$$

et faisant le produit

$$(\alpha) \qquad \left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{\varepsilon^{2\lambda}}{(\lambda+1)^3}\left(\frac{r}{R}\right)^\lambda\cos\lambda\theta\right]\times\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{1}{(\lambda+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^\lambda\cos\lambda\theta\right]$$

et les produits analogues. Or dans le produit précédent, il est facile de trouver le coefficient de $\cos\nu\theta$. Ce coefficient provient de termes de différentes natures. Tout d'abord en multipliant

$$\frac{1}{\nu+h+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu+h}\cos(\nu+h)\theta \quad \text{par} \quad \frac{\varepsilon^{2h}}{(h+1)^3}\left(\frac{r}{R}\right)^h\cos h\theta$$

on a un terme en $\cos\nu\theta$, et la somme de ces termes a pour coefficient

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^\nu\sum_{h=0}^{h=\infty}\frac{1}{\nu+h+1}\cdot\frac{\varepsilon^{2h}}{(h+1)^3}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{2h}.$$

En second lieu, on aura encore un terme en $\cos\nu\theta$, en multipliant

$$\frac{1}{h+1}\left(\frac{r}{R}\right)^h\cos h\theta \quad \text{par} \quad \frac{\varepsilon^{2(\nu+h)}}{(\nu+h+1)^3}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu+h}\cos(\nu+h)\theta,$$

et la somme de ces termes a pour coefficients

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\varepsilon^{2\nu}\cdot\sum_{h=0}^{h=\infty}\frac{1}{h+1}\cdot\frac{\varepsilon^{2h}}{(\nu+h+1)^3}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{2h}.$$

On a encore deux autres types de terme en $\cos\nu\theta$; le premier provient de la multiplication de

$$\frac{1}{\nu-h+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu-h}\cos(\nu-h)\theta \quad \text{par} \quad \frac{\varepsilon^{2h}}{(h+1)^3}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{h}\cos h\theta, \qquad (0\leqq h\leqq\nu)$$

ce qui donne un coefficient

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\cdot\sum_{h=0}^{h=\nu}\frac{1}{\nu-h+1}\cdot\frac{\varepsilon^{2h}}{(h+1)^3};$$

et de la même façon, le produit provenant de la multiplication de

$$\frac{1}{h+1}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{h}\cos h\theta \quad \text{par} \quad \frac{\varepsilon^{2(\nu-h)}}{(\nu-h+1)^3}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu-h}\cos(\nu-h)\theta, \qquad (0\leqq h\leqq\nu)$$

conduit au coefficient

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\cdot\sum_{h=0}^{h=\nu}\frac{1}{h+1}\cdot\frac{\varepsilon^{2(\nu-h)}}{(\nu-h+1)^3}.$$

On voit alors immédiatement, d'après la forme de ces termes, que le produit (α) étant mis sous la forme

$$\sum S_\nu\cos\nu\theta + T_\nu\sin\nu\theta$$

où S_ν et T_ν ont la forme

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\left[S_{0\nu}+S_{1\nu}\frac{r^2}{R^2}+\ldots+S_{m\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}}+\ldots\right]$$

on aura

$$|S_{m\nu}|<\frac{H'.\varepsilon^{2m}}{(\nu+1)(m+1)^3},$$

H' étant une constante purement numérique indépendante de m et ν.

Donc enfin dans

$$a\frac{\partial u}{\partial x}$$

le coefficient de $\cos\nu\theta$ sera égal à $\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}$ multiplié par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{r}{R}$; désignons ce coefficient par

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\left[\gamma_{0\nu}+\ldots+\gamma_{m\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}}+\ldots\right]. \tag{4}$$

La valeur absolue de $\gamma_{m\nu}$ sera moindre que le coefficient de $\left(\frac{r}{R}\right)^{2m}$ dans le produit

$$\frac{KHH'\theta}{R(\nu+1)}\left[1+2\varepsilon^2\frac{r^2}{R^2}+\ldots+(m+1)\varepsilon^{2m}\frac{r^{2m}}{R^{2m}}+\ldots\right]$$
$$\times\left[1+\frac{\varepsilon^2}{2^3}\cdot\frac{r^2}{R^2}+\ldots+\frac{\varepsilon^{2m}}{(m+1)^3}\cdot\frac{r^{2m}}{R^{2m}}+\ldots\right]^2.$$

On en conclut facilement que

$$|\gamma_{m\nu}|<\frac{KHH'H''(m+1)}{R(\nu+1)}\varepsilon^{2m}, \tag{5}$$

H'' étant encore un nombre fixe.

Dans *le second membre de l'équation* (E) *développé en série trigonométrique, nous pouvons donc dire que les coefficients de* $\cos\nu\theta$ *et* $\sin\nu\theta$ *sont de la forme* (4) *avec les conditions* (5).

4. En se reportant au § 1, nous avons maintenant immédiatement l'intégrale U de l'équation (E) s'annulant sur le cercle de rayon R.

En posant

$$U=\sum p_\nu\cos\nu\theta+q_\nu\sin\nu\theta$$

et

$$p_\nu=\frac{r^\nu}{R^\nu}\left(\delta_{0\nu}+\ldots+\delta_{m\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}}+\ldots\right)$$

il suffit de se reporter au § 1 et à l'inégalité (5) pour voir que

$$|\delta_{m\nu}|<\frac{KHH'H''H'''R}{(\nu+1)^2}\varepsilon^{2m}=\frac{K\eta R}{(\nu+1)^2}\varepsilon^{2m}$$

η étant un nombre fixe, indépendant de m, ν, K et R. Relativement à la convergence sur le bord il n'y a aucune difficulté à cause du dénominateur $(\nu+1)^2$. *Nous concluons donc de là, qu'en passant des* α, *relatifs au développement de* u, *pour lesquels on avait*

$$|\alpha_{m\nu}|<\frac{K}{(\nu+1)^2}\varepsilon^{2m}$$

aux δ *qui se rapportent à* U, *il suffit de remplacer* K *par* $K\eta R$.

5. Reprenons les calculs du § 3, en supposant que l'on ait

$$|\alpha_{m\nu}| < K\varepsilon^{2m},$$

K étant un nombre fixe. En suivant le développement du calcul et employant les mêmes notations, on aura tout d'abord

$$|\beta_{m\nu}| < \frac{K.\theta.(m+1)(\nu+1)\varepsilon^{2m}}{R}.$$

Le produit (α) sera remplacé ici par

$$\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\varepsilon^{2\lambda}}{(\lambda+1)^3}\left(\frac{r}{R}\right)^{\lambda}\cos\lambda\theta\right] \times \left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(\lambda+1)\left(\frac{r}{R}\right)^{\lambda}\cos\lambda\theta\right]$$

et l'on aura

$$|S_{m\nu}| < \frac{H'.(\nu+1)\varepsilon^{2m}}{(m+1)^2}.$$

Enfin $a\dfrac{\partial u}{\partial x}$ étant mis sous la forme trigonométrique, les coefficients de $\cos\nu\theta$ et $\sin\nu\theta$ seront de la forme

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\left[\gamma_{0\nu} + \ldots + \gamma_{m\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots\right],$$

avec les inégalités

$$|\gamma_{m\nu}| < \frac{K.HH'H''(m+1)(\nu+1)}{R}\varepsilon^{2m}.$$

Si on passe enfin à U, on aura:

$$|\delta_{m\nu}| < K.\eta R.\varepsilon^{2m},$$

η étant une quantité fixe, indépendante de m, ν, K et R.

6. Nous pouvons maintenant effectuer l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

en procédant par approximations successives.

Nous formons, suivant la méthode dont je fais constamment usage, les équations

$$\Delta u_1 = 0,$$

$$\Delta u_2 = a\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_1}{\partial y} + cu_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta u_n = a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + cu_{n-1}.$$

On intègre la première équation, avec la condition que u_1 prenne sur la circonférence C de rayon R une succession continue de valeurs formant une fonction $f(\theta)$ de l'argument θ ayant des dérivées continues des deux premiers ordres, et tous les autres u s'annulent sur C. Alors

$$u_1 = \Sigma a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \sin\nu\theta$$

où

$$a_\nu = \left(\frac{r}{R}\right)^\nu A_\nu, \qquad b_\nu = \left(\frac{r}{R}\right)^\nu B_\nu$$

où A_ν et B_ν sont les intégrales classiques de FOURIER relatives à la fonction $f(\theta)$. On a donc, d'après les hypothèses faites sur $f(\theta)$,

$$|A_\nu| < \frac{K}{(\nu+1)^2}, \qquad |B_\nu| < \frac{K}{(\nu+1)^2},$$

K étant fixe. Par suite, avec nos notations de plus haut, nous pouvons écrire

$$a_\nu = \left(\frac{r}{R}\right)^\nu \left[\alpha_{0\nu} + \dots + \alpha_{m,\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \dots\right],$$

tous les α étant nuls sauf le premier, et on a

$$|\alpha_{m,\nu}| < \frac{K\varepsilon_{2m}}{(\nu+1)^2}.$$

Si alors on intègre la seconde équation avec la condition que u_2 soit nul sur le bord, on aura en posant, comme plus haut,

$$u_2 = \Sigma(p_\nu \cos\nu\theta + q_\nu \sin\nu\theta)$$

où p_ν et q_ν sont de la forme

$$\frac{r^\nu}{R^\nu}\left[\delta_{0\nu}+\ldots+\delta_{m,\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}}+\ldots\right]$$

avec les inégalités

$$|\delta_{m,\nu}|<\frac{K.\eta R}{(\nu+1)^2}\varepsilon^{2m}.$$

En passant de u_2 à u_3, on aura de même des coefficients ayant pour limites supérieures de leurs valeurs absolues

$$\frac{K.(\eta R)^2}{(\nu+1)^2}\varepsilon^{2m}$$

et pour u_n

$$\frac{K.(\eta R)^{n-1}}{(\nu+1)^2}\varepsilon^{2m}.$$

La convergence de la série

$$U=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

est alors manifeste *si R est assez petit pour que $\eta R<1$.* On voit aussi immédiatement que les séries dérivées premières et secondes des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ convergent à *l'intérieur* de C, et il en résulte que la fonction U satisfait à l'équation

$$\Delta U=a\frac{\partial U}{\partial x}+b\frac{\partial U}{\partial y}+cU.$$

De là résulte aussi que l'intégrale U est une fonction analytique de x et y; tout ceci reproduit simplement, mais en précisant davantage et en entrant plus dans le détail de la formation des termes, la démonstration que nous avons donnée autrefois (Journal de l'Ecole Polytechnique, 1890) de ce théorème: *Toute intégrale U de l'équation précédente, bien déterminée et continue dans une certaine région ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, est une fonction analytique.*

7. Approfondissons davantage encore les propriétés de l'intégrale U prenant sur la circonférence C de rayon assez petit les valeurs $f(\theta)$. Nous allons montrer que *dans toute aire intérieure au cercle C, les valeurs*

absolues des dérivées premières et secondes de U sont limitées en fonction de la valeur absolue maxima de $f(\theta)$. Nous utiliserons à cet effet les résultats obtenus au § 5. Nous avons, pour u_1, avec les notations du paragraphe précédent

$$|\alpha_{m,\nu}| < 2M.\varepsilon^{2m} \qquad (M = \text{maximum de } |f(\theta)|)$$

car A_ν et B_ν ont des valeurs absolues inférieures à $2M$.

Donc, en passant de u_1 à u_2, on a

$$|\partial_{m,\nu}| < 2M.\eta R.\varepsilon^{2m}$$

et ainsi de suite. Il est alors facile d'avoir une limite supérieure des dérivées premières et secondes de u pour

$$r \leqq R.\vartheta$$

ϑ étant un nombre fixe d'ailleurs quelconque inférieur à *un*. Les séries formées avec les valeurs absolues de ces dérivées seront manifestement, dans l'hypothèse toujours supposée $\eta R < 1$, limitées en fonction de M; c'est bien le théorème que nous voulions établir. Donc dans une aire Γ *intérieure* à C, nous avons les valeurs absolues des dérivées premières et secondes de U inférieures à $\lambda.M$, λ étant un nombre indépendant de $f(\theta)$. L'intégrale U est limitée aussi en valeur absolue en fonction de M *dans le cercle C tout entier*, et non pas seulement comme ses dérivées dans une aire intérieure à C. Pour le montrer, nous n'avons qu'à remarquer que si R est assez petit, on peut avoir une intégrale z de l'équation restant toujours positive, et différente de zéro à l'intérieur de la circonférence C et sur la circonférence même. Si l'on pose alors

$$U = zV,$$

on aura pour V une équation de la forme

$$\Delta V = a_1 \frac{\partial V}{\partial x} + b_1 \frac{\partial V}{\partial y},$$

mais nous savons qu'une intégrale de cette équation ne peut avoir dans C ni maximum ni minimum; par suite dans C

$$|V| < M_1$$

M_1 désignant le maximum de la valeur absolue de V sur la circonférence C. Or

$$V = \frac{U}{z},$$

donc si m désigne le minimum de $|z|$ sur C, on a

$$M_1 < \frac{M}{m}$$

et, par suite, dans C,

$$|U| < \frac{M}{m} z < \frac{M}{m} m_1$$

m_1 désignant le maximum de $|z|$ dans C. *Il résulte donc de là que l'on a*

$$|U| < \mu . M, \qquad \text{(dans } C\text{)}$$

μ étant un nombre fixe, indépendant de la fonction $f(\theta)$.

8. Nous avons précédemment (§ 6) effectué l'intégration de l'équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

pour un cercle C de rayon suffisamment petit, à l'aide des valeurs données $f(\theta)$ sur la circonférence, en supposant que $f(\theta)$ ait des dérivées des deux premiers ordres.

Prenons maintenant une fonction continue périodique quelconque $f(\theta)$ de période 2π, et proposons nous d'effectuer l'intégration dans, ce cas.

On sait que la fonction $f(\theta)$ peut être développée en une série

$$f(\theta) = f_1(\theta) + f_2(\theta) + \dots + f_n(\theta) + \dots$$

les $f_i(\theta)$ étant des suites *limitées* de Fourier, et cela de telle façon que

$$|f_n(\theta)| < \alpha_n$$

les α étant des constantes positives, et la série

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$$

étant convergente.

Nous pouvons former l'intégrale de l'équation (E) prenant sur C la valeur $f_n(\theta)$; désignons-la par $u_n(x, y)$. Il faut montrer que l'intégrale de (E) prenant sur C la valeur $f(\theta)$ est représentée par

$$U = u_1(x, y) + u_2(x, y) + \ldots + u_n(x, y) + \ldots.$$

Tout d'abord cette série converge dans et sur C; en effet on a

$$|u_n(x, y)| < \mu . M_n$$

en désignant par M_n la valeur absolue maxima de $f_n(\theta)$. Donc

$$|u_n(x, y)| < \mu . \alpha_n$$

et la série U est uniformément convergente dans C; de plus, elle prend sur C la valeur $f(\theta)$.

D'autre part, nous devons montrer que la fonction U satisfait à l'équation (E). Or nous avons vu que dans une aire Γ intérieure à C, on a les dérivées premières et secondes de u_n inférieures en valeur absolues à

$$\lambda . M_n \text{ et par suite à } \lambda . \alpha_n .$$

Donc les séries formées avec les dérivées premières et secondes des u convergent *uniformément* dans Γ, et par suite U a des dérivées premières et secondes représentées par les séries des u. Nous pouvons alors, *en toute rigueur*, additionner les relations en nombre infini

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = a \frac{\partial u_n}{\partial x} + b \frac{\partial u_n}{\partial y} + c u_n$$

et nous avons

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial U}{\partial y} + c U.$$

La recherche de l'intégrale continue de l'équation (E) *prenant des valeurs données sur une circonférence et par conséquent sur un contour régulièrement analytique suffisamment petit est donc complètement effectuée sous la seule condition que la succession des valeurs données soit continue.*

9. Nous avons montré au § 7 que dans une aire Γ intérieur au cercle de rayon R, les dérivées premières et secondes de l'intégrale u

prenant les valeurs $f(\theta)$ sur la circonférence étaient limitées en fonction du maximum M de $|f(\theta)|$, ceci dans l'hypothèse où $f(\theta)$ avait des dérivées première et seconde. Le même résultat subsiste quand $f(\theta)$ est une fonction continue quelconque. Pour l'établir, il suffit de se reporter à la méthode suivie (§ 8) pour traiter ce dernier cas. En effet, imaginons qu'on se donne une série convergente à termes positifs

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n + \cdots.$$

Etant donnée la fonction $f(\theta)$ de valeur absolue maxima M, on peut trouver une suite limitée de Fourier $F_n(\theta)$ telle que

$$|f(\theta) - F_n(\theta)| < M\varepsilon_n$$

alors la série

$$f_1(\theta) + f_2(\theta) + \cdots + f_n(\theta) + \cdots$$

où

$$f_1(\theta) = F_1(\theta) \quad \text{et} \quad f_n(\theta) = F_n(\theta) - F_{n-1}(\theta) \qquad (n > 1)$$

converge uniformément vers $f(\theta)$, et on a

$$|f_1(\theta)| < M(1 + \varepsilon_1), \qquad |f_n(\theta)| < M(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) \qquad (n > 1).$$

La valeur absolue de chacun des f est donc limitée en fonction de M, et alors en suivant la méthode du § 8, il est immédiat que les dérivées premières et secondes de l'intégrale prenant sur la circonférence les valeurs $f(\theta)$ sont limitées en fonction de M dans une aire *intérieure* à la circonférence.

10. Nous avons intégré, dans ce qui précède, l'équation (E), en nous donnant les valeurs de l'intégrale le long d'une circonférence de rayon *suffisamment petit*. La méthode suivie avec des développements en séries trigonométriques peut aussi être employée si l'on a, comme contour, deux circonférences concentriques *dont les rayons diffèrent suffisamment peu*. Les calculs sont de même nature, quoique notablement plus compliqués encore; nous ne les développerons pas ici. Le résultat est le même: l'intégration peut être effectuée en supposant seulement continues les successions de valeurs données sur l'une et l'autre circonférence.

11. Dans un de mes mémoires du Journal de mathématiques (1896) sur les équations aux dérivées partielles, j'ai considéré particulièrement l'équation

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

dans une région où le coefficient c est négatif ou nul. Dans un contour quelconque C régulièrement analytique une intégrale continue est complètement déterminée par ses valeurs sur le bord, et j'ai démontré l'existence de cette solution unique au moyen d'un procédé d'extension permettant de passer d'une aire à une aire plus grande, procédé qui s'étend d'ailleurs à des équations non linéaires (Journal de math. 1898). On peut cependant faire une objection à un point de la démonstration. J'admets implicitement (voir page 301, Journal de math. 1896) la proposition suivante:

Etant donné un contour C, considérons une succession de fonctions en nombre infini

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

vérifiant l'équation (I), *et telles que l'on ait*

$$|u_n| < \varepsilon_n \qquad (\text{sur } C)$$

les ε étant des constantes telles que la série $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$ converge; la série

$$U = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

évidemment convergente dans C, satisfera à l'équation différentielle (I).

Après tout ce qui précède, il est aisé d'établir en toute rigueur le théorème précédent. Considérons en effet à l'intérieur de l'aire limitée par C un petit cercle Γ; on a dans Γ et sur Γ

$$|u_n| < \varepsilon_n.$$

D'autre part dans une aire intérieure au cercle Γ, les dérivées premières et secondes de u_n sont limitées en fonction de ε_n; on en conclut que dans cette aire la fonction U a des dérivées premières et secondes qui sont représentées par les séries des dérivées premières et secondes de u. Il est alors légitime d'additionner les relations en nombre infini

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + a\frac{\partial u_n}{\partial x} + b\frac{\partial u_n}{\partial y} + cu_n = 0$$

pour en tirer

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + cU = 0,$$

et cette relation est vérifiée pour tous les points à l'intérieur du cercle Γ et par suite pour tous les points à l'intérieur de l'aire limitée par C. Toute difficulté a donc disparu.

EMILE PICARD.