SUR LES RACINES D'UNE ÉQUATION FONDAMENTALE.

(Extrait d'une lettre de M. A. Hirsch à M. I. Bendixson.)

— — — La lecture de votre intéressant mémoire *Sur les racines d'une équation fondamentale*[1] m'a conduit à une généralisation à peu près immédiate des propositions que vous avez établies. Qu'il me soit permis dans les lignes qui suivent de vous communiquer les résultats auxquels je suis parvenu.

Ceux-ci se rapportent à l'équation déjà traitée par vous

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-s, & \dots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0,$$

où maintenant les éléments $a_{\mu\nu}$ désignent des quantités complexes quelconques; ils donnent d'une manière analogue à la votre, dans laquelle vous avez supposé les $a_{\mu\nu}$ réels, une limite pour les racines de (1).

a étant une quantité complexe quelconque, je désigne par $\bar{a}$ sa quantité conjuguée; en outre $\sigma = \alpha + \beta i$ étant racine de (1), soit $R(\sigma)$ sa partie réelle, $I(\sigma)$ sa partie imaginaire: $\alpha = R(\sigma)$, $\beta = I(\sigma)$.

On peut alors, se plaçant à votre point de vue, énoncer les propositions suivantes:

---

[1] Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1900. N:o 9. Stockholm. (Réimprimé Acta mathematica, t. 25, p. 359.)

Théorème I. *En désignant par A la plus grande d'entre les quantités $|a_{\mu\nu}|$, par B la plus grande d'entre les $\left|\left(\frac{a_{\mu\nu}+\bar{a}_{\nu\mu}}{2}\right)\right|$ et par C la plus grande d'entre les $\left|\left(\frac{a_{\mu\nu}-\bar{a}_{\nu\mu}}{2}\right)\right|$ on a toujours*

$$(2)\qquad \begin{cases} |\sigma| \leqq n\,.\,A, \\ |R(\sigma)| \leqq n\,.\,B, \\ |I(\sigma)| \leqq n\,.\,C. \end{cases}$$

Dans le cas où les éléments $a_{\mu\nu}$ sont tels que chacune des quantités $(a_{\mu\nu}+a_{\nu\mu})$ soit réelle, la dernière de ces inégalités peut être remplacée par une autre plus restreinte, par

$$(3)\qquad |I(\sigma)| \leqq \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\,.\,C.$$

Théorème II. *Soient M la plus grande et m la plus petite des racines toutes réelles, comme on sait, de l'équation*

$$\begin{vmatrix} \frac{a_{11}+\bar{a}_{11}}{2}-s, & \frac{a_{12}+\bar{a}_{21}}{2}, & \frac{a_{13}+\bar{a}_{31}}{2}, & \ldots, & \frac{a_{1n}+\bar{a}_{n1}}{2} \\ \frac{a_{21}+\bar{a}_{12}}{2}, & \frac{a_{22}+\bar{a}_{22}}{2}-s, & \frac{a_{23}+\bar{a}_{32}}{2}, & \ldots, & \frac{a_{2n}+\bar{a}_{n2}}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_{n1}+\bar{a}_{1n}}{2}, & \frac{a_{n2}+\bar{a}_{2n}}{2}, & \frac{a_{n3}+\bar{a}_{3n}}{2}, & \ldots, & \frac{a_{nn}+\bar{a}_{nn}}{2}-s \end{vmatrix} = 0,$$

on a toujours

$$(5)\qquad m \leqq R(\sigma) \leqq M.$$

Une méthode très semblable à celle utilisée par vous conduit à la démonstration de la première de ces deux propositions.

σ étant racine de l'équation (1), il existe un système de quantités non toutes nulles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfaisant aux n équations linéaires:

$$(6)\qquad \sigma x_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu. \qquad (\mu=1,2,\ldots,n)$$

Par multiplication respective de chacune d'entre elles par $\bar{x}_\mu$, puis par addition membre à membre on obtient la relation

$$(7) \qquad \sigma \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \bar{x}_\mu x_\nu,$$

qui par changement de $(+i)$ en $(-i)$ se transforme en

$$(8) \qquad \bar{\sigma} \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \bar{a}_{\nu\mu} \bar{x}_\mu x_\nu.$$

De (7) et (8) par addition et soustraction l'on déduit:

$$(9) \qquad \alpha \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left(\frac{a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu}}{2}\right) \bar{x}_\mu x_\nu,$$

$$(10) \qquad \beta \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left(\frac{a_{\mu\nu} - \bar{a}_{\nu\mu}}{2i}\right) \bar{x}_\mu x_\nu.$$

Ceci dit, partant de (7), on peut écrire:

$$(11) \quad |\sigma| \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu \leqq \sum_{\mu,\nu=1}^{n} |a_{\mu\nu}| . |x_\mu| . |x_\nu| \leqq A . \sum_{\mu,\nu=1}^{n} |x_\mu| . |x_\nu| = A . \left\{ \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu| \right\}^2;$$

et comme l'inégalité si élégamment employée par vous:

$$(12) \qquad [k_1 + k_2 + \ldots + k_m]^2 \leqq m[k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_m^2]$$

nous donne

$$\left\{ \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu| \right\}^2 \leqq n \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu,$$

nous avons immédiatement

$$|\sigma| \leqq n . A.$$

L'application à (9) et (10) de ce résultat conduit alors aux deux autres inégalités:

$$|\alpha| \leqq n . B, \qquad |\beta| \leqq n . C. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

En supposant maintenant que les sommes $(a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu})$ sont toutes réelles, l'égalité (10) peut être mise sous la forme:

$$\beta \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu = \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu<\nu}}^{n} \left(\frac{a_{\mu\nu} - \bar{a}_{\nu\mu}}{2}\right) \left(\frac{\bar{x}_\mu x_\nu - x_\mu \bar{x}_\nu}{i}\right),$$

d'où résulte:

$$(13) \qquad |\beta| \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu \leqq C \cdot \sum_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu<\nu}}^{n} \left| \left(\frac{\bar{x}_\mu x_\nu - x_\mu \bar{x}_\nu}{i} \right) \right| .$$

Or, les quantités

$$\left(\frac{\bar{x}_\mu x_\nu - x_\mu \bar{x}_\nu}{i} \right)$$

étant toutes réelles, l'inégalité (12) peut être appliquée comme suit:

$$\left\{ \sum_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu<\nu}}^{n} \left| \left(\frac{\bar{x}_\mu x_\nu - x_\mu \bar{x}_\nu}{i} \right) \right| \right\}^2 \leqq - \frac{n(n-1)}{2} \sum_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu<\nu}}^{n} (\bar{x}_\mu x_\nu - x_\mu \bar{x}_\nu)^2$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \left\{ \left[\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu \right]^2 - \left[\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu^2 \right] \left[\sum_{\mu=1}^{n} \bar{x}_\mu^2 \right] \right\} < \frac{n(n-1)}{2} \left[\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu \right]^2 ;$$

et par conséquence de (13) résulte l'inégalité (3)

$$|\beta| \leqq \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot C$$

indiquée plus haut.

La démonstration de la proposition II s'obtient en remarquant qu'à cause de (9) α se trouve compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs que prend le quotient des formes quadratiques

$$\sum_{(\mu,\nu)} \left(\frac{a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu}}{2} \right) \bar{x}_\mu x_\nu : \sum_{\mu} x_\mu \bar{x}_\mu ,$$

lorsque les x_μ varient d'une façon indépendante.

Or, ces valeurs extrêmes sont, comme on le voit aisément, racines de l'équation (4); par suite α se trouve nécessairement dans l'intervalle compris entre m et M, la plus petite et la plus grande des racines de (4).

c. q. f. d.