# SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES CONSIDERÉES COMME FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE FONCTIONS D'UNE VARIABLE

PAR

P. APPELL.
à PARIS.

Nous nous proposons d'appeler brièvement l'attention sur un intéressant problème qui réunit, dans un même souvenir, les noms d'ABEL et de JACOBI, d'HERMITE et de WEIERSTRASS.

Dans une lettre à HERMITE (Journal de mathématiques, t. 8), JACOBI démontre que les fonctions de deux variables qui résultent de l'inversion des intégrales ultraelliptiques sont des *fonctions algébriques de fonctions d'une variable.* Nous avons dans une Note insérée aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (t. 103, p. 1246, 2ème semestre 1886) indiqué d'une façon générale le mécanisme pas lequel se manifeste, dans ce mode d'expression, la quadruple périodicité des fonctions méromorphes de deux variables à quatre paires de périodes. Nous allons revenir sur cette question en en donnant des exemples élémentaires.

D'après WEIERSTRASS (Journal de Crelle, t. 89, p. 1) toute fonction méromorphe de deux variables $u$ et $v$ à quatre paires de périodes peut s'exprimer rationnellement à l'aide de trois fonctions particulières

$$\text{(M)} \qquad X = f_1(u, v), \qquad Y = f_2(u, v), \qquad Z = f_3(u, v)$$

liées par une équation algébrique irreductible

$$F(X, Y, Z) = 0$$

représentant une certaine surface $\boldsymbol{S}$ lieu des points $\boldsymbol{M}$ de coordonnées

$X, Y, Z$. Il suffit donc de voir comment la quadruple périodicité se manifeste pour ces trois fonctions au point de vue qui nous occupe.

Considérons, en particulier, sur la surface $\boldsymbol{S}$, les deux suites de points $m$ et $m'$ obtenus en faisant successivement $v = 0$, $u = 0$:

$$(m) \qquad x = f_1(u, 0), \qquad y = f_2(u, 0), \qquad z = f_3(u, 0),$$

$$(m') \qquad x' = f_1(0, v), \qquad y' = f_2(0, v), \qquad z' = f_3(0, v).$$

Quand $u$ varie le point $m$ décrit sur $\boldsymbol{S}$ une courbe $\boldsymbol{C}$; de même quand $v$ varie le point $m'$ décrit sur $\boldsymbol{S}$ une courbe $\boldsymbol{C}'$.

D'après le théorème d'addition la fonction

$$X = f_1(u + 0, 0 + v)$$

est une fonction rationnelle de $x, y, z, x', y', z'$; de même pour $Y$ et $Z$:

$$(1) \qquad \begin{aligned} X &= R_1(x, y, z; x', y', z'), \\ Y &= R_2(x, y, z; x', y', z'), \\ Z &= R_3(x, y, z; x', y', z'), \end{aligned}$$

$R_1, R_2, R_3$ étant trois fonctions rationnelles.

Soit maintenant $(\alpha, \beta)$ un groupe de périodes. D'après le théorème d'addition chaque fonction

$$f_1(u + \alpha, 0)$$

est une fonction rationnelle de $f_1(u, 0)$, $f_2(u, 0)$, $f_3(u, 0)$, et chaque fonction

$$f_1(0, v + \beta)$$

est une fonction rationnelle de $f_1(0, v)$, $f_2(0, v)$, $f_3(0, v)$. Donc par l'effet de l'addition de $\alpha$ à $u$ le point $m(x, y, z)$ de $\boldsymbol{C}$ est remplacé par un point $m_1(x_1, y_1, z_1)$ de $\boldsymbol{C}$ dont les coordonnées sont fonctions rationnelles des $x, y, z$:

$$(m_1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x, y, z), \\ y_1 &= \varphi_2(x, y, z), \\ z_1 &= \varphi_3(x, y, z). \end{aligned}$$

De même par l'effet de l'addition de $\beta$ à $v$, le point $m'(x', y', z')$ de $C$, est remplacé par un point $m_1'(x_1', y_1', z_1')$ de $C'$ dont les coordonnées sont fonctions rationnelles de $x', y', z'$:

$$(m_1') \qquad \begin{aligned} x_1' &= \psi_1(x', y', z'), \\ y_1' &= \psi_2(x', y', z'), \\ z_1' &= \psi_3(x', y', z'). \end{aligned}$$

Ainsi à chaque couple de périodes correspond une substitution rationnelle faite sur chacun des points $m$ et $m'$. Mais comme le point $M(X, Y, Z)$ ne change pas quand on ajoute simultanément les deux périodes à $u$ et $v$, les deux substitutions rationnelles $(m_1)$ et $(m_1')$ doivent laisser invariables les fonctions rationnelles (1).

Rendons-nous compte de ce fait par des exemples élémentaires de fonctions dégénérées.

*Premier exemple.* Soit

$$\begin{aligned} X &= e^{u+v}, \\ Y &= e^{\omega u+\omega^2 v}, \\ Z &= e^{\omega^2 u+\omega v}, \end{aligned}$$

$\omega$ étant une racine cubique imaginaire de l'unité. Le point $X, Y, Z$ décrit la surface

$$XYZ = 1.$$

Les fonctions exponentielles admettent les deux couples de périodes $(\alpha, \beta)(\alpha', \beta')$ définis pas

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2\pi i, \\ \omega\alpha + \omega^2\beta &= -2\pi i, \\ \omega^2\alpha + \omega\beta &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha' + \beta' &= 2\pi i, \\ \omega\alpha' + \omega^2\beta' &= 0, \\ \omega^2\alpha' + \omega\beta' &= -2\pi i. \end{aligned}$$

On a actuellement

$$x = e^u, \qquad y = e^{\omega u}, \qquad z = e^{\omega^2 u},$$
$$x' = e^v, \qquad y' = e^{\omega^2 v}, \qquad z' = e^{\omega v},$$
$$X = xx', \qquad Y = yy', \qquad Z = zz'.$$

Si on ajoute $\alpha$ à $u$ et $\beta$ à $v$, $x$, $y$, $z$ subissent les substitutions

$$x_1 = xe^{\alpha}, \qquad y_1 = ye^{\omega\alpha}, \qquad z_1 = ze^{\omega^2\alpha},$$
$$x_1' = x'e^{\beta}, \qquad y_1' = y'e^{\omega^2\beta}, \qquad z_1' = z'e^{\omega\beta},$$

et les nouvelles valeurs de $X$, $Y$, $Z$ sont égales aux anciennes, car

$$x_1 x_1' = xx', \qquad y_1 y_1' = yy', \qquad z_1 z_1' = zz'.$$

*Deuxième exemple.* Prenons maintenant des fonctions à trois périodes comme celles qui ont été considérées par ROSENHAIN, mais en considérant pour abréger le cas le plus simple possible

$$X = e^u \frac{H(v-a)}{H(v-a-s)} \frac{H(a+s)}{H(a)},$$
$$Y = e^u \frac{H(v-b)}{H(v-b-s)} \frac{H(b+s)}{H(b)},$$
$$Z = e^u \frac{H(v-c)}{H(v-c-s)} \frac{H(c+s)}{H(c)}$$

$a$, $b$, $c$, $s$ désignant des constantes. Ces fonctions admettent les trois couples de périodes

$$(2\pi i, 0), (0, 2K), (\alpha, 2iK')$$

où la quantité $\alpha$ est définie par la relation

$$\alpha + \frac{i\pi}{K}s = 0.$$

Les quotients $\frac{X}{Z}$ et $\frac{Y}{Z}$ étant des fonctions elliptiques de $v$, la surface lieu du point $(X, Y, Z)$ cet un cône.

Les points $m$ et $m'$ ont pour coordonnées

$$(m) \qquad x = e^u, \qquad y = e^u, \qquad z = e^u,$$

$$(m') \qquad x' = \frac{H(v-a)}{H(v-a-s)} \frac{H(a+s)}{H(a)}, \ldots$$

et on a

$$X = xx', \qquad Y = yy', \qquad Z = zz'.$$

L'addition des deux premiers groupes de périodes laisse les points $m$ et $m'$ inaltérés. L'addition du troisième groupe multiplie respectivement $x, y, z$ et $x', y', z'$ pas des facteurs inverses.

Il serait aisé de faire des vérifications analogues pour les fonctions mêmes considérées par Rosenhain; mais il y aurait surtout intérêt à prendre cette question par la voie algébrique et à chercher les groupes de substitutions possédant les propriétés précédentes.