SUR QUELQUES POINTS FONDAMENTAUX DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE DEUX VARIABLES

PAR

EMILE PICARD

à PARIS.

ABEL a consacré plusieurs mémoires à l'étude des intégrales abéliennes réductibles à des combinaisons algébrico-logarithmiques. Malgré ses efforts et ceux des géomètres qui l'ont suivi, cette difficile question provoquera sans doute encore de nombreuses recherches. L'étude des intégrales de différentielles totales dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables soulève des questions dont quelques-unes présentent des analogies avec le problème d'ABEL; il semble qu'un examen de ces questions, même très incomplet et soulevant plus de problèmes qu'il n'en résout, ne sera pas déplacé dans cette commémoration de la mémoire du grand géomètre norwégien.

1. Considérons, comme je le fais habituellement dans mes recherches sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables, une surface

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

disposée arbitrairement par rapport aux axes et n'ayant que des singularités ordinaires (ligne double avec points triples). J'ai développé longuement dans mes mémoires antérieurs et dans le tome I de ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* l'étude des intégrales de différentielles totales de *seconde* espèce, et j'ai fait connaître récemment (Annales de l'Ecole normale, 1901) un théorème fondamental relatif aux intégrales de troisième espèce. Il existe pour la surface f un certain nombre entier λ jouissant de la propriété suivante:

On peut, sur la surface, tracer λ courbes algébriques irréductibles particulières

$$C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$$

telles qu'il n'existe pas d'intégrales de différentielles totales de troisième espèce

$$\int P dx + Q dy \quad (P \text{ et } Q \text{ rationnelles de } x, y, z)$$

ayant seulement pour courbes logarithmiques une ou plusieurs de ces courbes C et de la courbe à l'infini de la surface, mais telles que, si l'on envisage une $\lambda + 1^{\text{ème}}$ courbe arbitraire irréductible $C_{\lambda+1}$, il existera une intégrale de troisième espèce ayant seulement pour courbes logarithmiques la courbe $C_{\lambda+1}$ et la totalité ou une partie des courbes $C_1, \ldots, C_\lambda$ et de la courbe à l'infini. Remarquons d'ailleurs que les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ sont dans une large mesure arbitraires.

La démonstration assez délicate de ce théorème ne fait malheureusement connaître qu'une limite *supérieure* du nombre λ, et ce serait un point important de pouvoir obtenir ce nombre d'une manière tout à fait précise.

2. Une question se pose, pour les intégrales de différentielles totales de troisième espèce, dont la réponse était immédiate pour les intégrales abéliennes relatives aux courbes. Etant donnée une courbe algébrique *arbitraire*

$$f(x, y) = 0$$

une intégrale abélienne arbitraire

$$\int R(x, y) dx$$

relative à cette courbe est certainement une fonction de x ne se ramenant pas à une combinaison algébrico-logarithmique. Si maintenant nous prenons une surface algébrique *arbitraire*

$$f(x, y, z) = 0,$$

une intégrale arbitraire de différentielle totale relative à cette surface

$$\int P dx + Q dy \tag{2}$$

sera-t-elle une fonction de x, y et z ne se ramenant pas à une combinaison algébrico-logarithmique? Déjà, et c'est par là que j'ai commencé jadis ce genre de recherches, on sait que si la surface f n'est pas *spéciale*, et si l'intégrale (2) est de *seconde espèce*, cette intégrale se réduit à une fonction rationnelle de x, y et z. En fait, en dehors des surfaces ayant des intégrales de seconde espèce non rationnelles, je ne connais pas d'exemples de surfaces dont les intégrales de différentielles totales ne se réduisent pas à une combinaison algébrico-logarithmique.

Sans préjuger la réponse à la question posée, on peut faire une remarque curieuse sur les surfaces pour lesquelles toute intégrale de différentielle totale est une combinaison algébrico-logarithmique. Soit f une telle surface, et considérons les courbes

$$C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$$

de l'énoncé rappelé plus haut. En désignant ensuite par $C_{\lambda+1}$ une $\lambda+1^{\text{ème}}$ courbe algébrique irréductible tracée sur la surface, nous pouvons former une intégrale

$$\int P dx + Q dy$$

de différentielle totale de troisième espèce, ayant seulement pour courbes logarithmiques la courbe $C_{\lambda+1}$ et la totalité ou une partie des courbes $C_1, \ldots, C_\lambda$ et de la courbe à l'infini.

D'après l'hypothèse faite, l'intégrale précédente est de la forme

$$A_1 \log R_1(x,y,z) + A_2 \log R_2(x,y,z) + \ldots + A_k \log R_k(x,y,z) + P(x,y,z)$$

où les R sont rationnelles en x, y et z ainsi que P, et où l'on peut supposer, en réduisant l'entier k à son minimum, qu'il n'y a pas entre les constantes A de relations homogènes et linéaires à coefficients entiers. Dans ces conditions, une des fonctions R au moins s'annulera ou deviendra infinie certainement (avec un degré convenable de multiplicité) le long de la courbe $C_{\lambda+1}$ et le long de la totalité ou d'une partie des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ et de la courbe à l'infini (également avec des degrés convenables de multiplicité), et de plus elle ne s'annulera ni ne deviendra infinie le long d'aucune autre courbe. Nous avons donc ce résultat curieux:

Etant considérées sur la surface les λ courbes algébriques irréductibles $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ (arbitraires d'ailleurs dans une large mesure), la courbe à *l'infini, et une courbe $C_{\lambda+1}$ irréductible entièrement arbitraire, il existera une fonction rationnelle*

$$R(x, y, z)$$

devenant nulle le long de la courbe $C_{\lambda+1}$, devenant nulle ou infinie le long de quelques-unes ou de la totalité des autres, et ne devenant nulle ou infinie le long d'aucune autre courbe.

Ces lignes de zéro ou d'infini sont de degrés convenables de multiplicité, et il ne faut pas oublier dans cet énoncé qu'il s'agit de surfaces dont toutes les intégrales de différentielles totales sont des combinaisons algébrico-logarithmiques. Il pourra paraître singulier qu'une surface arbitraire (par exemple la surface la plus générale de son degré) jouisse de cette propriété, surtout si on modifie encore un peu la forme de l'énoncé.

Soient sur notre surface $\lambda + 2$ courbes algébriques irréductibles entièrement arbitraires

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\lambda+2}$$

on pourra former une première fonction rationnelle devenant nulle le long de Γ_1, et ne devenant en outre nulle ou infinie que le long de quelques-unes ou de la totalité des courbes $C_1, \ldots, C_\lambda$ et de la courbe à l'infini. On aura de même une fonction rationnelle correspondant à $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\lambda+2}$. En les élevant à des puissances entières convenables, positives ou négatives et en faisant leur produit, *on formera immédiatement une fonction rationnelle, s'annulant le long de certaines des courbes Γ et devenant infinie le long des autres* (*avec des degrés convenables de multiplicité*), *et n'ayant aucune autre ligne de zéros, ou d'infinis.*

Une proposition analogue, dans laquelle les courbes Γ seraient remplacées par des points est évidemment inexacte pour les courbes algébriques; pour une courbe algébrique prise arbitrairement, on ne peut trouver une fonction rationnelle dont les pôles et les racines devraient nécessairement être compris parmi des points donnés, les degrés de multiplicité n'étant d'ailleurs pas fixés à l'avance.

3. Les remarques précédentes feraient donc plutôt penser que les intégrales de différentielles totales de troisième espèce ne se ramènent pas en général à des combinaisons algébrico-logarithmiques; mais malheureusement, comme je l'ai dit plus haut, je ne suis pas en mesure de donner

un exemple d'une surface n'ayant pas d'intégrale transcendante de seconde espèce (ou de connexion linéaire égale à l'unité, d'après un théorème fondamental que j'ai établi autrefois) et possédant une intégrale de troisième espèce qui ne soit pas du type algébrico-logarithmique.

Je citerai quelques exemples assez étendus de surfaces algébriques pour lesquelles on est assuré que toutes les intégrales sont au contraire du type algébrico-logarithmique. Un premier exemple très simple me sera fourni par la surface célèbre du quatrième degré qui porte le nom de KUMMER. A leur sujet, M. HUMBERT a démontré une proposition très élégante; toutes les courbes algébriques tracées sur cette surface sont de degré pair, et si $2m$ désigne le degré d'une telle courbe de la surface, on peut le long de cette courbe circonscrire à la surface une surface de degré m, ne la coupant pas en dehors de la courbe considérée. Ici, le nombre λ des énoncés précédents doit être regardé comme égal à zéro, c'est à dire que si l'on prend sur la surface deux courbes algébriques quelconques

$$\Gamma_1\,,\,\Gamma_2$$

il existera une intégrale de troisième espèce n'ayant d'autres courbes logarithmiques que ces deux courbes. Si en effet

$$f_1(x\,,\,y\,,\,z) = 0 \quad \text{et} \quad f_2(x\,,\,y\,,\,z) = 0$$

représentent les deux surfaces de degrés m_1 et m_2 donnant les deux courbes d'après le théorème de M. HUMBERT, la fonction

$$\log \frac{f_1^{m_2}}{f_2^{m_1}}$$

peut être regardée comme une intégrale de troisième espèce possédant la propriété demandée.

4. Les considérations que nous avons développées plus haut s'appliquent avec des modifications peu importantes aux surfaces données par les équations

$$z^2 = f(x\,,\,y) \tag{3}$$

où f est un polynome en x et y, et ici nous allons voir se poser des problèmes qui, plus difficiles encore que le problème d'ABEL, présentent avec lui un air de famille. Les courbes tracées sur la surface

$$z^2 = f(x, y) \tag{3}$$

sont de deux sortes. Pour une courbe de la première sorte en désignant par

$$A(x, y) = 0$$

l'équation de sa projection sur le plan des (x, y), il arrive que le cylindre $A(x, y) = 0$, rencontre la surface suivant *une seule* courbe irréductible. Pour une courbe de la seconde sorte au contraire, le cylindre précédent rencontrera la surface suivant *deux* courbes irréductibles; il arrivera alors que le polynome irréductible $A(x, y)$ est un diviseur d'une expression de la forme

$$P^2 - Q^2.f(x, y)$$

P et Q étant deux polynomes premiers entre eux, et les équations des courbes sont

$$A(x, y) = 0, \qquad z = +\frac{P}{Q},$$

$$A(x, y) = 0, \qquad z = -\frac{P}{Q}.$$

que l'on peut appeler des courbes conjuguées.

Toutes les intégrales de différentielles totales relatives à la surface (3) sont une somme de deux intégrales de différentielles totales de la forme

$$\int \frac{P dx + Q dy}{\chi(y) A B \ldots L \sqrt{f(x, y)}} + \int P_1 dx + Q_1 dy$$

P et Q étant des polynomes en x et y, $\chi(y)$ étant un polynome en y, et $A, B, \ldots, L$ des polynomes irréductibles en x et y, premiers entre eux et avec f. Quant à P_1 et Q_1, ce sont des fractions rationnelles de x et y. La seconde intégrale est sans intérêt, car elle se réduit manifestement à une expression

$$\sum C \log R(x, y) + \rho(x, y)$$

les R et ρ étant des fonctions rationnelles de x et y, et les C des constantes. La première de ces intégrales est seule intéressante, et un point important, est que ses courbes logarithmiques à distance finie sont des courbes de la seconde sorte. Il est impossible en effet que le cylindre

$$A(x\,,\,y) = 0$$

coupe notre surface suivant une seule courbe, car l'expression

$$2\pi i\,.\,\frac{P}{\chi(y)\dfrac{\partial A}{\partial x}\,B\ldots L\sqrt{f(x\,,\,y)}}$$

doit nécessairement se réduire à une constante (période logarithmique) quand $A(x\,,\,y) = 0$. Donc, en vertu de cette dernière relation, $\sqrt{f(x\,,\,y)}$ est une fonction rationnelle de x et y, et nous avons deux courbes de la surface correspondant à une même projection sur le plan des xy.

J'ai montré antérieurement que, par la soustraction de logarithmes de fractions rationnelles de x, y et z, on pourrait se borner, dans l'étude des intégrales de troisième espèce, à considérer le cas où dans la courbe

$$A(x\,,\,y) = 0$$

x n'entre qu'au degré $\frac{m-1}{2}$, si le degré m du polynome $f(x\,,\,y)$ par rapport à x est impair. Si ce degré m est pair, on pourra ramener au degré $\frac{m}{2}$ ou $\frac{m}{2} - 1$.

Nous avons d'ailleurs ici un théorème tout à fait analogue à celui que nous rappelions au début. A la surface correspond un nombre λ, tel que si on prend sur la surface λ couples arbitraires de courbes conjuguées, il n'existe pas d'intégrale de troisième espèce n'ayant à distance finie que ces courbes logarithmiques, mais tel que si on prend un $\lambda + 1^{\text{ème}}$ couple quelconque de courbes conjuguées, on puisse former une intégrale n'ayant à distance finie comme courbes logarithmiques que les courbes de ce couple et des couples précédents (en totalité ou en partie).

Ce serait un problème intéressant que de fixer exactement ce nombre λ, dont on obtient seulement facilement une limite supérieure. Il ne serait pas moins important d'étudier les polynomes $A(x\,,\,y)$ correspondant aux courbes conjuguées. En supposant, pour fixer les idées, le polynome $f(x\,,\,y)$

de degré impair m par rapport à x, il faudrait aussi rechercher les polynomes $A(x, y)$ de degré $\frac{m-1}{2}$ par rapport à x, tels que pour

$$A(x, y) = 0$$

le polynome $f(x, y)$ soit le carré d'une fonction rationnelle de x et y. S'il n'existe pas de tels polynomes A, on est assuré que toutes les intégrales de différentielles totales relatives à la surface

$$z^2 = f(x, y)$$

se ramènent, par la soustraction d'expressions algébrico-logarithmiques, à la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x, y)}}$$

où P et Q sont des polynomes en x, de degrés respectivement égaux à $m-2$ et $m-1$. Ce cas se présente pour $m = 3$, quand on prend

$$z^2 = a(y)x^3 + b(y)x^2 + c(y)x + d(y), \tag{4}$$

a, b, c, d étant des polynomes *non spéciaux* en y, car on ne peut satisfaire à cette équation en prenant pour z et x des fonctions rationnelles de y. Il en résulte aisément que, pour la surface générale (4), *toute intégrale de différentielle totale se ramène à une combinaison algébrico-logarithmique.*

4. Revenons maintenant aux surfaces à singularités ordinaires

$$f(x, y, z) = 0$$

considérées au début, et traitons une question d'un caractère tout à fait général; je veux parler des relations entre la théorie *des intégrales doubles de seconde espèce* et celle *des intégrales de différentielles totales de troisième espèce.*

J'ai montré, comme on se le rappelle peut-être, que toutes les *intégrales doubles de seconde espèce*, se ramènent aux intégrales

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

le polynome Q s'annulant pour la courbe double de la surface.[1] Le degré de ce polynome Q est limité, et ses coefficients satisfont à certaines relations que nous avons appris à former. Mais toutes les intégrales doubles ainsi obtenues ne sont pas distinctes, et il faut indiquer la marche à suivre pour trouver exactement le nombre des intégrales *distinctes* de seconde espèce, c'est à dire des intégrales dont aucune combinaison lineaire n'est de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx dy,$$

A et B étant rationnelles en x, y et z. On répondra aisément à cette question, si on sait reconnaître à quelles conditions l'expression donnée

$$\frac{Q(x, y, z)}{f'_z}$$

est de la forme

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

A et B étant rationnelles en x, y et z; bien entendu z est regardé comme fonction de x et y, quand on fait les différentiations partielles. Ce problème est la généralisation d'une question très simple relative à une courbe algébrique $f(x, y) = 0$. A quelles conditions l'expression

$$\frac{Q(x, y)}{f'_y}$$

est-elle de la forme

$$\frac{dA}{dx},$$

A étant rationnelle en x et y? Mais, tandis que ce dernier problème est aisé à traiter, la question que nous pose la théorie des surfaces est beaucoup plus complexe. La raison essentielle en est que l'on ne sait pas à priori pour quelles courbes de la surface A et B peuvent devenir infinies, tandis que pour les courbes les infinis de A sont connus à l'avance.

---

[1] On pourra voir en particulier ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (tome 2, chap. 7) et Annales de l'Ecole Normale (février 1902).

5. Soit l'identité

$$\frac{Q(x\,,\,y\,,\,z)}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}. \tag{5}$$

Désignons par $G(x\,,\,y) = 0$, la projection de la courbe double sur le plan des xy, et par $g(x\,,\,y) = 0$ la projection sur le même plan de la courbe de la surface avec un cylindre parallèle à Oz. On montre aisément qu'on ne diminue pas la généralité en supposant que A et B sont de la forme

$$A = \frac{U(x\,,\,y\,,\,z)}{g(x\,,\,y)G(x\,,\,y)\varphi_1(x\,,\,y)\ldots\varphi_r(x\,,\,y)f'_z},$$

$$B = \frac{V(x\,,\,y\,,\,z)}{g(x\,,\,y)G(x\,,\,y)\varphi_1(x\,,\,y)\ldots\varphi_r(x\,,\,y)f'_z},$$

où on représente par $\varphi_1\,,\,\ldots\,,\,\varphi_r$ des polynomes irréductibles en x et y, premiers entre eux et premiers avec g et G; quant à $U(x,y,z)$ et $V(x,y,z)$, ils représentent des polynomes en x et z, à coefficients rationnels en y. Toute la difficulté provient de la présence possible de ces polynomes φ en nombre d'ailleurs inconnu, et elle est très réelle. On peut cependant la lever, si on suppose connu un système des λ courbes C dont il a été question au paragraphe I; c'est là un point capital dans ma théorie des intégrales doubles de seconde espèce. Soit Γ une courbe de la surface, se projetant suivant $\varphi_1(x\,,y) = 0$, et le long de laquelle A et B deviennent infinies. On pourra former une intégrale de troisième espèce ayant pour courbe logarithmique Γ et la totalité ou une partie des courbes C et de la courbe à l'infini; et cette intégrale sera de la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\varphi_1(x\,,\,y)g_1(x\,,\,y)\ldots g_\lambda(x\,,\,y)f'_z},$$

en désignant par $g_1(x\,,\,y) = 0\,,\,\ldots,\,g_\lambda(x\,,\,y) = 0$ les projections des λ courbes C, et par P et Q des polynomes en x et z, à coefficients rationnels en y. Les fonctions P et Q s'annuleront le long des courbes de la surface se projetant suivant

$$\varphi_1 = 0, \qquad g_1 = 0\,,\quad \ldots\,,\quad g_\lambda = 0$$

distinctes de Γ et des courbes C. On aura d'ailleurs la relation d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{\varphi_1 g_1\ldots g_\lambda f'_z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{\varphi_1 g_1\ldots g_\lambda f'_z}\right) = 0$$

et de plus, le long de la courbe Γ l'expression

$$\frac{P}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} g_1 \dots g_\lambda f'_z}$$

se réduira à une constante différente de zéro, puisque elle représente au facteur $2\pi i$ près une période logarithmique de l'intégrale.

Revenons à l'identité (5), en supposant que (x, y, z) reste dans le voisinage d'un point M d'ailleurs arbitraire de la courbe Γ. Le premier membre de (5) ne devenant pas infinie dans ces conditions, on pourra écrire

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

λ étant une fonction holomorphe de x et y dans le voisinage de M. Donc

$$\int B dx - (A - \lambda) dy$$

est une intégrale de différentielle totale ayant autour du point M la courbe Γ comme courbe logarithmique, et on en déduit de suite que le quotient

$$\frac{V(x, y, z)}{g(x, y) G(x, y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \varphi_2 \dots \varphi_r f'_z}$$

se réduit à une constante sur la courbe Γ, car il représente au facteur $2\pi i$ près une période logarithmique. Or le second membre de l'identité (5) peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A - C \cdot \frac{Q}{\varphi_1 g_1 \dots g_\lambda f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B + C \frac{P}{\varphi_1 g_1 \dots g_\lambda f'_z}\right), \tag{6}$$

C désignant une constante arbitraire, et on peut choisir la constante C de manière que

$$\frac{V(x, y, z)}{g \cdot G \cdot \varphi_2 \dots \varphi_r f'_z} + C \frac{P}{g_1 \dots g_\lambda f'_z}$$

s'annule sur Γ, d'après les deux remarques ci-dessus. Par suite, pour un tel choix de C, la fonction sous le signe $\frac{\partial}{\partial y}$ dans (6) ne deviendra pas infinie le long de Γ.

Nous avons ainsi fait disparaître la ligne Γ comme ligne d'infini pour les fonctions figurant dans l'identité (5). En allant ainsi de proche en proche, nous arrivons à une identité de la forme (5), et où A et B ont alors la forme

$$A = \frac{M(x, y, z)}{g \cdot G \cdot g_1 \cdot g_2 \ldots g_\lambda f'_z}, \qquad B = \frac{N(x, y, z)}{g \cdot G \cdot g_1 \cdot g_2 \ldots g_\lambda f'_z},$$

M et N étant des polynomes en x et z à coefficients rationnels en y; les fonctions au dénominateur sont complètement déterminées.

Il est facile de voir ensuite que les degrés des polynomes M et N en x et z peuvent être limités, et alors on est assuré de pouvoir *par un nombre limité d'opérations* reconnaître si l'identité

$$\frac{Q(x, y, z)}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}$$

est ou non possible.

On voit par ce qui précède, et c'est ce que je voulais montrer sommairement ici, *le lien étroit entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et celle des intégrales de différentielles totales de troisième espèce.*

6. Le problème dont nous venons de parler, de reconnaître si une fonction rationnelle de x, y et z (z étant une fonction algébrique de x et y) est susceptible de se mettre sous la forme

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

A et B étant rationnelles en x, y et z, devient particulièrement simple, quand on considère seulement des fonctions rationnelles de x et y et qu'on se demande *si une fonction rationnelle R de x et y peut se mettre sous la forme*

$$R = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}, \tag{7}$$

U et V étant rationnelles en x et y.

Les considérations développées dans le cas général trouvent ici une application facile, mais on peut encore suivre une autre voie, comme je l'ai fait récemment dans mon cours.[1] La condition nécessaire et suffisante

---

[1] Voir Bulletin des sciences mathématiques (1902): *Sur les intégrales doubles de fonctions rationnelles dont tous les résidus sont nuls.*

cherchée est susceptible d'une forme très élégante. Envisageons l'intégrale double

$$\iint R(x\,,\,y)\,dx\,dy. \tag{8}$$

La fonction rationnelle R a, à distance finie, un certain nombre de lignes d'infini. A chacune de ces lignes correspondent des *résidus* de l'intégrale double, au sens de M. POINCARÉ dans sa théorie des résidus des intégrales doubles de fonctions rationnelles. La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse satisfaire à la condition (7) est que *tous les résidus de l'intégrale* (8) *soient nuls.*

L'énoncé se trouve être identique à celui qui exprime qu'une fonction rationnelle $R(x)$ est la dérivée $\frac{dU}{dx}$ d'une fonction rationnelle U de x, et qui peut se formuler en disant que tous les résidus de l'intégrale simple

$$\int R(x)\,dx$$

sont nuls. La similitude des deux énoncés est d'une grande élégance.