GEOMETRISCHER BEWEIS EINES ALGEBRAISCHEN SATZES VON JACOBI

VON

A. V. BÄCKLUND

in LUND.

I.

Ein Satz von Abel.

In einer kurzen Note im Bande 4 des CRELLE'schen Journals für das Jahr 1829 mit dem Titel: *Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe des fonctions transcendantes* (Oeuvres complètes de NIELS HENRIK ABEL. Nouvelle Édition, Christiania 1881, 1, p. 515), hat ABEL einen Satz entwickelt, der für die Theorie der Integrale der algebraischen Funktionen von grundlegender Bedeutung geworden ist und der so lautet:

»Wenn y definirt wird durch die Gleichung:

$$p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots + p_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0, \tag{1}$$

wo $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ *ganze* Funktionen von x bedeuten, und eine zweite Gleichung hinzugezogen wird:

$$q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \ldots + q_{n-1} y^{n-1} = 0, \tag{2}$$

wo $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ gleichfalls *ganze* Funktionen von x sind, in denen aber die Koefficienten gewisser Potenzen des x als variable Parameter $a, a', a'', \ldots$ betrachtet werden, und man das Integral bildet:

$$\psi(x) = \int f(x, y) dx, \tag{3}$$

wo $f(x, y)$ irgend welche *rationale* Funktion von x, y bedeutet, so findet man, dass es sein muss:

$$\sum_{i=1}^{\mu} \psi(x_i) = u + \sum_{m=1}^{n} k_m \log v_m, \tag{4}$$

falls links über alle Wurzeln $x_1, x_2, \ldots$ der durch Elimination von y aus (1) und (2) entspringenden Endgleichung für x summirt wird und unter $k_1, k_2, \ldots$ Konstanten, unter $u, v_1, v_2, \ldots$ rationale Funktionen von $a, a', a'', \ldots$ verstanden werden.»

Der Beweis dieses Satzes ruht darauf, dass wegen (1) und (2) y als rationale Funktion von x und $a, a', a'', \ldots$ erhalten wird, und dass ferner die aus (1) und (2) entspringende Endgleichung für x giebt

$$dx_i = \alpha da + \alpha' da' + \ldots$$

wo $\alpha, \alpha', \ldots$ rationale Funktionen von $x_i, a, a', a'', \ldots$ werden. Aus diesem Grunde kommt nämlich

$$\sum_{i=1}^{\mu} f(x_i, y_i) dx_i$$

gleich einer Summe:

$$da \sum \varphi(x_i, a, a', a'', \ldots) + da' \sum \varphi_1(x_i, a, a', a'', \ldots) + \ldots$$

die, als Funktion von den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ der erwähnten Endgleichung für x betrachtet, als symmetrisch anzusehen ist. Jede symmetrische und rationale Funktion der Wurzeln x_i ist aber in $a, a', a'', \ldots$ rational. Also ist

$$\sum_{i=1}^{\mu} \psi(x_i)$$

als Integral einer Summe rationaler Funktionen von $a, a', a'', \ldots$ aufzufassen. Desshalb wird diese Summe von der Form (4). — (Obenstehendes ist eine beinahe wörtliche Uebersetzung der citirten Note von Abel.)

Wenn p das Geschlecht der Kurve (1) bezeichnet, — dann x, y als Koordinaten der Punkte einer Ebene gedeutet, — so giebt es bekanntlich p verschiedene Integrale (3), die überall *endlich* und *stetig* sind. Falls man den Satz (4) auf irgend eines *dieser* Integrale und auf die Schnittpunkte der Kurve (1) mit einer variablen Kurve eines algebraischen Kurven-Büschels (2) anwendet, und wenn λ, anstatt der vorigen Zeichen $a, a', \ldots$, den Parameter des Kurven-Büschels darstellt, und dieser somit die Gleichung hat:

$$\Phi(x, y) + \lambda \Psi(x, y) = 0, \tag{5}$$

so findet man, dass

$$\frac{d}{d\lambda}\sum_{i=1}^{\mu}\psi(x_i)$$

gleich sei einer *rationalen* Funktion von λ, die *nirgends* unendlich wird. Aber jede eindeutige und stetige analytische Funktion von λ, die nirgends unendlich wird, muss *konstant* sein. Weil ferner $\sum\psi(x_i)$ aus einer endlichen Zahl von allenthalben endlichen Integralen (3) zusammengesetzt ist, kann sie nicht mal für $\lambda = \infty$ unendlich werden. Daher soll jene jetzt auftretende Konstante Null sein, und desshalb

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{d\lambda}\sum_{i=1}^{\mu}\psi(x_i), \quad \text{d. i.} \quad \sum_{i=1}^{\mu} f(x_i\,,\,y_i)\frac{dx_i}{d\lambda} = 0,$$

wenn die Summe über alle Schnittpunkte $(x_i\,,\,y_i)$ zwischen der Kurve (1) und irgend einer der Kurven (5) ausgedehnt wird, und wenn, wie gesagt, ψ ein allenthalben endliches und stetiges Integral ausmacht.[1]

Sei zweitens ψ ein Integral *dritter* Gattung, welches in zwei Punkten, — die α und β heissen mögen, — unstetig und daselbst unendlich wie $\log(x - a)$ für $x = a$ wird, aber an allen anderen Stellen endlich und stetig ist, und seien $\xi_1\,,\,\eta_1\,;\,\xi_2\,,\,\eta_2$ die Koordinaten jener Unendlichkeitspunkte, und sei das fragliche Integral speciell von der Form eines Normalintegrals, das in jenen Unendlichkeitspunkten genau gleich

$$\log\frac{x-\xi_1}{x-\xi_2}$$

wird, so folgt aus dem ABEL'schen Satze (4) oder lieber aus dessen Beweise, wenn man diesen Satz auf das Schnittpunktssystem (1) und (5) anwendet, aber mit jenem Integrale dritter Gattung, das ich jetzt mit $S_{\alpha\beta}$ bezeichne, eingeführt statt ψ, dass

$$\frac{d}{d\lambda}\sum_{i=1}^{\mu} S_{\alpha\beta}(x_i)$$

eine solche rationale Funktion von λ sein muss, welche in der komplexen λ-Ebene an nur zwei Stellen unstetig und unendlich wird und dann gleich

$$\frac{d}{d\lambda}\log\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda-\lambda_2},$$

[1] Diese und nächstfolgende Beweisführung findet man bei RIEMANN in dessen *Theorie der Abel'schen Funktionen* (Art. 14). Ges. Werke von RIEMANN, S. 123.

wenn λ_1 und λ_2 die Werthe des Parameters λ in den Unendlichkeitspunkten vorstellen, also

$$\lambda_1 = -\frac{\Phi(\xi_1, \eta_1)}{\Psi(\xi_1, \eta_1)},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\Phi(\xi_2, \eta_2)}{\Psi(\xi_2, \eta_2)}.$$

Eine solche Funktion, wenn sie in allen anderen Punkten λ endlich sein soll, kann nur die Form besitzen:

$$\frac{d}{d\lambda}\log\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda-\lambda_2}+C.$$

Damit aber für $\lambda = \infty$ die fragliche $\Sigma\psi$ nicht unendlich werde, muss sein $C = 0$; desshalb:

$$\text{(B)} \qquad d\sum_{i=1}^{\mu} S_{\alpha\beta}(x) = d\lambda\frac{d}{d\lambda}\log\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda-\lambda_2}.$$

II.

Zwei Folgerungen des Vorangehenden.

Man trage in (A) für $\frac{dx}{d\lambda}$ seinen Werth aus (1), kürzer

$$F(x, y) = 0,$$

und (5) ein. Man wende also die zwei folgenden Gleichungen an:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\lambda} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\frac{dx}{d\lambda} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\frac{dy}{d\lambda} + \Psi = 0,$$

und man wird somit, wenn der Kürze wegen

$$(AB) \text{ statt } \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}$$

geschrieben wird, erhalten:

$$\text{(6)} \qquad \frac{dx}{d\lambda} = \frac{\Psi\frac{\partial F}{\partial y}}{(F\Phi) + \lambda(F\Psi)}.$$

Es soll die in (A) auftretende Funktion $f(x, y)$ rational sein, also gleich dem Quotienten zweier ganzer Funktionen. Soll aber das Integral

$$\phi = \int f(x, y) dx$$

eben der ersten Gattung werden, so muss, wenn $f = \infty$, dx verschwinden, also f gleich

$$\frac{M}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

sein, M eine ganze Funktion und zugleich die Doppel- und Rückkehrpunkte der Kurve $F = 0$ als Nullpunkte habend. Ferner muss, damit das Integral auch im Unendlichen endlich werde, M, falls F vom Grade m ist, selbst vom Grade $m - 3$ sein.

Die Gleichung (A) besagt somit, dass es sei

$$\text{(A')} \qquad \sum_{i=1}^{\mu} \frac{M\Psi}{(F\Phi)} = 0,$$

falls die Summe über alle Schnittpunkte: $F = 0$, $\Phi = 0$, ausgedehnt wird.

Das zur Gleichung (1) oder zur Kurve $F = 0$ zugehörige Integral dritter Gattung allgemeinster Art ist der Form

$$(7) \qquad \int \frac{N dx}{(ax + by + c)\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Dann liegen die beiden Unstetigkeitspunkte des Integrals auf der Gerade:

$$(8) \qquad ax + by + c = 0,$$

und N soll eine ganze Funktion $m - 2^{\text{ten}}$ Grades bedeuten, die für die übrigen $m - 2$ Schnittpunkte der Kurve $F = 0$ mit der Gerade (8) sowie für die Doppel- und Rückkehrpunkte jener Kurve $F = 0$ verschwindet. Hieraus geht eine wichtige Beschränkung der Funktion N hervor. Falls die beiden Unstetigkeitspunkte des Integrals mit α und β und die $m - 2$

Schnittpunkte der Gerade $\alpha\beta$, d. i. der Gerade (8), und der Kurve $N=0$ mit a, a', a'', ... bezeichnet werden, so muss sein:

$$\frac{\alpha a\,.\,\alpha a'\ldots}{\beta a\,.\,\beta a'\ldots}=\frac{N(\xi_1\,,\,\eta_1)}{N(\xi_2\,,\,\eta_2)}\,.\tag{9}$$ [1]

Weil aber dieselben Punkte a, a', a'', ... zusammen mit α und β die Schnittpunkte der Kurve $F=0$ und der Gerade (8) ausmachen, so muss sein:

$$\left\{\begin{aligned}\alpha\beta\,.\,\alpha a\,.\,\alpha a'\ldots &= (-1)^{m-1}\frac{\alpha_1\frac{\partial F}{\partial\xi_1}+\alpha_2\frac{\partial F}{\partial\eta_1}}{F_m(\alpha_1\,,\,\alpha_2)}\,,\\ \alpha\beta\,.\,\beta a\,.\,\beta a'\ldots &= (-1)^{m}\frac{\alpha_1\frac{\partial F}{\partial\xi_2}+\alpha_2\frac{\partial F}{\partial\eta_2}}{F_m(\alpha_1\,,\,\alpha_2)}\,,\end{aligned}\right.\tag{10}$$

α_1, α_2 die Richtungscosinus der Gerade $\alpha\beta$ bezeichnend und $F_m(\alpha_1\,,\,\alpha_2)$ das Aggregat der Glieder m^{ten} Grades in Bezug auf x, y von F, nachdem α_1, α_2 statt x bez. y eingeführt worden sind, darstellend.

Nun ist

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=-\frac{b}{a}$$

und wir werden also aus (9) und (10) zu schliessen haben, dass

$$\frac{N(\xi_1\,,\,\eta_1)}{a\frac{\partial F}{\partial\eta_1}-b\frac{\partial F}{\partial\xi_1}}=-\frac{N(\xi_2\,,\,\eta_2)}{a\frac{\partial F}{\partial\eta_2}-b\frac{\partial F}{\partial\xi_2}}\,.\tag{11}$$

In der Nähe des Punktes α wird das Differential des Integrals (7) der Form:

$$\frac{N(\xi_1\,,\,\eta_1)\,dx}{(a(x-\xi_1)+b(y-\eta_1))\frac{\partial F}{\partial\eta_1}}\tag{12}$$

und in der Nähe des Punktes β der Form:

$$\frac{N(\xi_2\,,\,\eta_2)\,dx}{(a(x-\xi_2)+b(y-\eta_2))\frac{\partial F}{\partial\eta_2}}\,.\tag{13}$$

[1] Wir stützen uns hierbei auf die folgende Entwickelung einer ganzen Funktion n^{ten} Grades $f(x\,,\,y)$: $f(\xi+\rho\alpha_1\,,\,\eta+\rho\alpha_2)=f(\xi\,,\,\eta)+\rho\left(\alpha_1\frac{\partial f}{\partial\xi}+\alpha_2\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)+\ldots\rho^n f_n(\alpha_1,\alpha_2)$, und interpretiren ρ als Radius vektor vom Punkte $(\xi\,,\,\eta)$ und α_1, α_2 als seine Richtungscosinus.

Im ersten Falle soll der Punkt (x, y) auf der Kurve $F = 0$ und unendlich nahe an α liegen, wesshalb

$$(x - \xi_1)\frac{\partial F}{\partial \xi_1} + (y - \eta_1)\frac{\partial F}{\partial \eta_1} = 0,$$

folglich (12) von der Form werden:

$$\frac{N(\xi_1, \eta_1)\,dx}{(x - \xi_1)\left(a\frac{\partial F}{\partial \eta_1} - b\frac{\partial F}{\partial \xi_1}\right)} = K\frac{dx}{x - \xi_1}.$$

Im Ausdrucke (13) soll (x, y) unendlich nahe dem Punkte β, dennoch auf der Kurve $F = 0$ gelegen sein, und daher (13), auf Grund von (11), die Form annehmen:

$$-K\frac{dx}{x - \xi_2}.$$

Im obigen in (B) eingehenden Integrale $S_{\alpha\beta}$ ist N mit einem solchen Faktor versehen, dass die entsprechende Grösse K eben gleich Eins wird.

Die Gleichung (B) giebt daher für $\lambda = 0$ und nach Einführung des Werthes (6) den Satz:

$$\text{(B')} \qquad \sum_{i=1}^{\mu}\frac{N\Psi}{(ax + by + c)(F\Phi)} = \left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)_\alpha - \left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)_\beta,$$

falls die Summe über alle Schnittpunkte zwischen $F = 0$ und $\Phi = 0$ ausgedehnt wird.

Der Satz (A') ist von Jacobi in einer etwas allgemeineren Form gegeben worden, nämlich in der Form:

$$\text{(14)} \qquad \sum\frac{\Omega}{(F\Phi)} = 0,$$

wobei F, Φ und Ω beliebige ganze Funktionen der Grade m bez. n und $m + n - 3$ darstellen und die Summirung über alle Schnittpunkte zwischen $F = 0$ und $\Phi = 0$ auszudehnen ist.

Dieser Satz zusammen mit einem anderen, den Satz (B') umfassenden, wurde von Jacobi entwickelt im B. 14, S. 281 des Journals von Crelle. Man siehe auch die *Theorie der Abel'schen Funktionen* von Clebsch und Gordan, Leipzig 1866, wo diese Sätze von Jacobi zum Beweise der Abel'schen Sätze (A) und (B) benutzt worden sind.

Der von JACOBI gegebene Beweis seiner Sätze ist rein algebraischer Natur, elementär, jedoch im Vergleich zu den oben vorgetragenen Beweisen komplicirt. Es giebt aber eine rein geometrische Beweisführung jenes Satzes (14), die an Einfachkeit und Uebersichtlichkeit Nichts zu wünschen übrig lässt, die freilich einen Satz von LIOUVILLE in T. VI, p. 345 des Journal de Mathématiques (1841) über den Schwerpunkt der Schnittpunkte zweier Kurven voraussetzt, aber dieser Satz kann, wie ich früher in einer Abhandlung *Om geometriska kurvor med dubbel krökning* in T. VIII der Jahresschrift der Universität zu Lund (1871) gezeigt habe, sehr leicht auf rein geometrischem Wege gewonnen werden. Hiervon wird das Nächstfolgende handeln.

III.

Ein Satz von Liouville.

Folgende Bemerkung schicke ich voran:

Wenn eine solche einfach-unendliche und stetige Kurven-Schaar vom Index μ:

$$f(x\,,\,y\,,\,\lambda) = 0, \tag{15}$$

vorgelegt ist, die zwar μ Kurven durch einen beliebig genommenen Punkt, aber durch einen Punkt O besonderer Lage nur $\mu - r + 1$ Kurven schickt, und dabei immer O für eine der letzteren r-fach ist, und O nur in derartigem Falle für eine der Kurven (15) vielfacher Punkt wird, so bilden die geraden Polaren von O in Bezug auf die Kurven der gegebenen Schaar eine Schaar vom Index $\mu - r + 1$.

Für den Beweis zeige ich zunächst, dass im angenommenen Falle diejenige Kurve der Schaar (15), die O als r-fachen Punkt besitzt, für r verschiedene Kurven gezählt werden muss, deren nur eine O als r-fachen, aber eine andere ihn als $r - 1$-fachen, eine dritte ihn als $r - 2$-fachen Punkt besitzt, u. s. f. Es soll nämlich jetzt für einen gewissen Werth λ^0 von λ der obigen Voraussetzung gemäss sein:

$$f(\lambda^0) = 0, \qquad f'(\lambda^0) = 0\,, \quad \ldots\,, \quad f^{r-1}(\lambda^0) = 0,$$

falls statt x und y die Koordinaten von O eingetragen werden. Aber diese Gleichungen führen die folgenden mit sich:

$$1^\circ \qquad f(\lambda_1) = 0, \quad f'(\lambda_1) = 0, \quad \ldots, \quad f^{r-2}(\lambda_1) = 0,$$

wenn $\lambda_1 = \lambda_0 + d\lambda$ und $d\lambda$ unendlich klein ist; ferner

$$2^\circ \qquad f(\lambda_2) = 0, \quad f'(\lambda_2) = 0, \quad \ldots, \quad f^{r-3}(\lambda_2) = 0,$$

falls $\lambda_2 = \lambda_1 + d\lambda$, $d\lambda$ unendlich klein; u. s. f.; endlich

$$(r-1)^\circ \qquad f(\lambda_{r-1}) = 0,$$

$\lambda_{r-1} = \lambda_{r-2} + d\lambda$, $d\lambda$ unendlich klein.

Sei dann

$$(a_1) \qquad f(x, y, \lambda^0) = 0$$

die Gleichung der Kurve mit O als r-fachem Punkte.[1] Sie ist nach dem eben Angemerkten als zusammenfallend zu betrachten mit einer zweiten Kurve

$$(a_2) \qquad f(x, y, \lambda_1) = 0$$

mit O als $r - 1$-fachem Punkte,[2] und mit einer dritten Kurve

$$(a_3) \qquad f(x, y, \lambda_2) = 0$$

mit O als $r - 2$-fachem Punkte, u. s. f., schliesslich mit einer Kurve

$$(a_r) \qquad f(x, y, \lambda_{r-1}) = 0$$

mit O als einfachem Punkte.

Sei dann p ein Punkt allgemeiner Lage in der x, y-Ebene, so finden wir, dass unter den *ersten* Polaren von p in Bezug auf die Kurven (15) jedenfalls $r - 1$ Polaren, nämlich diejenigen in Bezug auf $(a_1), (a_2), (a_3), \ldots, (a_{r-1})$, durch O gehen. Unter den *geraden* Polaren des letzteren Punktes in Bezug auf die Kurven (15) gehen also immer diejenigen, welche den Kurven $(a_1), (a_2), (a_3), \ldots, (a_{r-1})$ zugehören, durch den *beliebig* genom-

[1] Also mit r Zweigen durch O.

[2] Nämlich, nach 1°, mit $r - 1$ Zweigen durch O.

menen Punkt p und werden folglich unbestimmt. Nun kann aber die Schaar der geraden Polaren irgend eines Punktes in Bezug auf die Kurven (15) höchstens vom Index μ werden, so dass höchstens μ derselben durch irgend einen beliebigen Punkt p gehen.[1] Vom Punkte O gilt daher insbesondere, dass unter seinen geraden Polaren in Bezug auf die Kurven der Schaar (15), — wenn die Kurve mit O als Multipelpunkte ausgeschlossen wird, — nur $\mu - r + 1$ derselben durch p gehen, oder dass *jene gerade Polaren des Punktes O eine Kurve der $\mu - r + 1^{\text{sten}}$ Klasse umhüllen.*

Ich betrachte jetzt eine Kurve (K) der m^{ten} Klasse und eine Schaar von Kurven C', C'', ..., n^{ter} Klasse, welche letztere sämmtlich von denselben n^2 Geraden berührt sein sollen. K und C' hat eine Tangentengruppe gemein, die ich mit Γ' bezeichne, K und C'' eine derartige, die Γ'' heisse, u. s. f. Es bilden diese Γ', Γ'', ... eine Kurvenschaar vom Index m, denn durch jeden Punkt (p) der Ebene gehen m Tangenten der Kurve K und jede dieser Tangenten wird von einer, aber auch nur einer der Kurven C', C'', ... berührt. Diese, jene Tangenten berührenden Kurven C bestimmen ihrerseits die einzigen Tangentengruppen Γ', Γ'', ... die durch den Punkt p hindurchgehen. Wir sehen ferner, dass, wenn O ein r-facher Punkt einer Γ wird, es nur $m - r$ andere durch O hindurchgehende Γ', Γ'', ... geben kann, weil nämlich jetzt r von den Tangenten an K, von O aus gezogen, von ein und derselben Kurve C berührt werden. Die Schaar der Kurven Γ', Γ'', ... ist also gerade des oben postulirten Charakters.

Auf diese Kurvenschaar können wir daher den obigen Satz anwenden. Thun wir es, so erkennen wir sogleich, dass die geraden Polaren irgend eines Punktes O in Bezug auf die der Kurve K und den verschiedenen Kurven C', C'', ... gemeinsamen Tangentengruppen im Allgemeinen, wenn O ausserhalb K liegt, eine Kurve der m^{ten} Klasse umhüllen, die mit K die von O aus zu ziehenden m Tangenten gemein hat;

wenn aber O zwar ausserhalb K liegt, aber Schnittpunkt zweier gemeinsamer Tangenten von K und einer der Kurven C ist, so wird die Klassenzahl der umhüllten Kurve nur $m - 1$;

---

[1] Es gilt nämlich μ als Index für die Schaar der Polaren beliebiger Ordnungszahl irgend eines Punktes in Bezug auf die Kurven (15).

und wenn r der von O ausgehenden Tangenten an K zugleich ein und dieselbe Kurve C berühren, so wird die Klasse der von jenen geraden Polaren von O umhüllten Kurve nur $m - r + 1$.

Aber wenn insbesondere die Kurve K im Berührungspunkte einer der Tangenten durch O von einer Kurve C^0 berührt wird, so gilt von der *ersten* Polare eines beliebigen anderen Punktes p in Bezug auf die den beiden Kurven K und C^0 gemeinsame Tangentengruppe, dass sie durch jenen Berührungspunkt beider Kurven geht und diese dort auch berührt. Dieselbe Polare muss ferner die Schnittpunkte der Tangente von K und C^0 im gemeinsamen Berührungspunkte mit den übrigen diesen Kurven gemeinsamen Tangenten enthalten, weil diese Punkte Doppelpunkte der fraglichen Tangentengruppe, als Kurve betrachtet, ausmachen. Die Anzahl solcher Punkte ist nur $mn - 2$, weil die Tangente im gemeinsamen Berührungspunkte für zwei Individuen der fraglichen Tangentengruppe zählt. Hieraus würde aber folgen, dass jene erste Polare mit der Tangente im gemeinsamen Berührungspunkte der K und C^0 mindestens mn Punkte, nämlich zwei mit jenem Berührungspunkte zusammenfallende und die eben erwähnten $mn - 2$ Doppelpunkte, gemein haben müsste. Die Ordnungszahl der Polare ist doch nur $mn - 1$. Die Tangente im angenommenen Berührungspunkte zwischen K und C^0 gehört daher in ihrer ganzen Erstreckung der ersten Polare von p zu, die daher durch O geht. Die *gerade* Polare von O in Bezug auf die für K und C^0 gemeinsame Tangentengruppe geht folglich durch p. Aber p war ganz beliebig zu nehmen. Die letzt-erwähnte gerade Polare wird daher unbestimmt. Es gehen aber durch O noch $m - 1$ andere erste Polaren von p in Bezug auf eben so viele andere Tangentengruppen, die für K und gewisse, von der Lage von p abhängige der Kurven C', C'', ... gemeinsam sind. Die geraden Polaren von O in Bezug auf diese Tangentengruppen werden im Allgemeinen vollkommen bestimmt und die einzigen derartigen, die durch p gehen.

Hieraus können wir ferner schliessen, dass, wenn K von einer der Kurven C', C'', ... in k Punkten berührt wird, und die Tangenten in diesen Punkten durch O gehen, die geraden Polaren von O in Bezug auf die Gruppen gemeinsamer Tangenten von K und C', von K und C'', etc., eine Kurve der Klasse $m - k$ umhüllen, deren von O ausgehende Tangenten ebenfalls K berühren.

Vermittels des Korrelationsprincips oder einfach des Princips der reciproken Polaren in Bezug auf einen Kreis mit O zum Mittelpunkte werden wir von den eben angeführten Sätzen zu anderen sehr einfacherer Form gelangen. Aus der Kurve K wird nämlich jetzt eine Kurve m^{ter} Ordnung allgemeinster Art, aus der Kurvenschaar C', C'', ... ein Büschel von Kurven C', C'', ... n^{ter} Ordnung mit n^2 gemeinsamen Schnittpunkten, aus der Gruppe Γ' der gemeinsamen Tangenten von K und C' die Gruppe (γ') der Schnittpunkte der entsprechenden Kurven, und endlich, weil dem Punkte O die unendlich entfernte Gerade entspricht, wird die gerade Polare von O in Bezug auf Γ' in den Schwerpunkt der Gruppe γ' transformirt, hierbei doch alle Punkte in γ' mit gleich grossen Massen versehen gedacht.

Dies giebt uns folgende Sätze:

Wenn K eine nicht-parabolische Kurve m^{ter} Ordnung und C', C'', ... Kurven n^{ter} Ordnung eines Büschels sind, so werden im Allgemeinen die Schwerpunkte der Schnittpunktssysteme der K und C', der K und C'', u. s. f., eine Kurve m^{ter} Ordnung erfüllen, deren Asymptoten denen der Kurve K parallell laufen.

Wenn aber eine der Kurven C durch r der unendlich entfernten Punkte von K hindurchgeht, also r Asymptoten hat parallell mit eben so vielen Asymptoten der Kurve K, so kann die Ordnungszahl jener Schwerpunktskurve höchstens $m - r + 1$ sein;

und *wenn insbesondere r Asymptoten einer C mit eben so vielen Asymptoten der K zusammenfallen, wird jene Ordnungszahl nur $m - r$, und die Asymptoten der Schwerpunktskurve laufen mit den übrigen Asymptoten von K parallell.*

Denken wir uns C' als eine Kurve n^{ter} Ordnung allgemeinster Art und C'' aus den Asymptoten von C' gebildet, so giebt es in dem von diesen C' und C'' gebildeten Büchsel eine dritte Kurve, C''', die aus der unendlich entfernten Gerade, zwei mal gezählt, und einer Kurve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung zusammengesetzt ist. Diese C''' muss als die Kurve K in sämmtlichen ihren unendlich entfernten Punkten berührend angesehen werden, und daher liegt jetzt ein Fall der zuletzt betrachteten Art vor, und zwar mit $r = m$. Wir kommen aber dann gerade zu demjenigen Satze von Liouville, von dem am Ende des vorigen Abschnittes die Rede war und der folgendermassen lautet:

»Der Schwerpunkt der Schnittpunkte zweier nicht parabolischer Kurven fällt mit dem Schwerpunkte der Schnittpunkte der einen Kurve mit den Asymptoten der anderen und also mit dem Schwerpunkte der Schnittpunkte der Asymptoten beider Kurven zusammen.»[1]

IV.

Ein Satz von Jacobi.

1. Die Kurven des Büschels

$$\varphi + \lambda\psi = 0, \qquad \lambda \text{ var. Parameter,} \tag{16}$$

besitzen sämmtlich dieselben Asymptoten, falls, wie ich annehme, φ des n'^{ten} und ψ des $n' - 2^{\text{ten}}$ Grades in Bezug auf x, y sind. Sei F m^{ten} Grades und

$$F = 0 \tag{17}$$

die Gleichung der Kurve (1), die ich K nenne. Der Schwerpunkt der mn' Schnittpunkte der Kurve K mit einer der Kurven (16) wird jetzt, nach dem oben bewiesenen Satze von LIOUVILLE, von λ unabhängig. Wenn daher die Koordinaten jener Schnittpunkte mit

$$x_1, y_1; \; x_2, y_2; \; \ldots$$

bezeichnet werden, so muss sein:

$$\sum_{i=1}^{mn} dx_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{mn} dy_i = 0, \tag{18}$$

wenn mit dx_i, dy_i die aus der Aenderung $d\lambda$ von λ erfolgenden Aenderungen von x_i und y_i bezeichnet werden. Diese Aenderungen sind aber durch die Gleichung (6) im Abschnitte II bestimmt worden. Dadurch bekommt man aus der ersten der Gleichungen (18) die Gleichung:

$$\sum \frac{\psi \frac{\partial F}{\partial y}}{(F\varphi) + \lambda(F\psi)} = 0, \tag{19}$$

[1] Auch andere Sätze dieser Art betreffend Kurven doppelter Krümmung und Flächen sind in derselben Weise von mir in der oben citirten Abhandlung in T. VIII der Jahresschrift der Universität zu Lund hergeleitet worden.

wo über alle mn' Schnittpunkte der zwei Kurven (17) und (16) summirt werden soll.

Es kann sein $\varphi = V \,.\, \Phi$, wo Φ eine ganze Funktion des n^{ten} und V eine ganze Funktion des $n' - n^{\text{ten}}$ Grades sind $(n < n')$. Man hat dann:

$$(F\varphi) = V(F\Phi) + \Phi(FV),$$

also aus (19) für $\lambda = 0$:

$$\sum_{(\Phi=0)} \frac{\psi \dfrac{\partial F}{\partial y}}{V(F\Phi)} + \sum_{(V=0)} \frac{\psi \dfrac{\partial F}{\partial y}}{\Phi(FV)} = 0, \tag{20}$$

falls die erste Summe über die Schnittpunkte: $F = 0$, $\Phi = 0$ und die zweite Summe über die der Kurven $F = 0$, $V = 0$ ausgedehnt werden.

2. Wenn gesetzt wird

$$V = \frac{\partial F}{\partial y},$$

und demgemäss $n' - n = m - 1$, so fällt in vorangehender Formel die zweite Summe weg, und man hat den Jacobi'schen Satz (14):

$$\sum \frac{\psi}{(F\Phi)} = 0,$$

wo ψ eine ganze Funktion des Grades $n' - 2 = m + n - 3$, F und Φ ganze Funktionen der Grade m bez. n vorstellen, und über sämmtliche mn Schnittpunkte der Kurven $F = 0$, $\Phi = 0$ summirt wird.

3. Wenn dagegen

$$V = (ax + by + c)\frac{\partial F}{\partial y},$$

und demgemäss $n' - n = m$, so muss sein:

$$\begin{aligned}(FV) &= (ax + by + c)\left(F\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial y}(F\, ax + by + c) \\ &= (ax + by + c)\left(F\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\left(b\frac{\partial F}{\partial x} - a\frac{\partial F}{\partial y}\right),\end{aligned}$$

und die Gleichung (20) nimmt die Form an:

$$\sum_{(\Phi=0)} \frac{\psi}{(ax + by + c)(F\Phi)} + \sum_{(ax+by+c=0)} \frac{\psi}{\Phi\left(b\dfrac{\partial F}{\partial x} - a\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)} = 0. \tag{21}$$

Es muss nach dem Obigen ψ eine ganze Funktion des Grades $n' - 2 = m + n - 2$ sein. Sei sie ausserdem so gewählt, dass $m - 2$ der m Schnittpunkte der Gerade $ax + by + c = 0$ mit der Kurve $F = 0$ Nullpunkte für sie werden, so reducirt sich die zweite Summe in (21) auf bloss zwei Glieder

$$(22) \qquad \left(\frac{\psi}{\Phi}\right)_\alpha \frac{1}{\left(b\frac{\partial F}{\partial x} - a\frac{\partial F}{\partial y}\right)_\alpha} + \left(\frac{\psi}{\Phi}\right)_\beta \frac{1}{\left(b\frac{\partial F}{\partial x} - a\frac{\partial F}{\partial y}\right)_\beta},$$

deren das erste ein Substitutionsresultat der Koordinaten einer der übriggebliebenen zwei Schnittpunkte: $ax + by + c = 0$, $F = 0$, ausmacht, das zweite Glied sich in derselben Weise auf den zweiten dieser Punkte bezieht. α heisst der erste, β der zweite Punkt.

Aber oben, aus der Gleichung (11), haben wir gesehen, dass, falls N eine ganze Funktion des $m - 2^{\text{ten}}$ Grades ist, die für die oben angenommenen, für F, ψ und $ax + by + c$ gemeinsamen $m - 2$ Nullpunkte verschwindet, so ist

$$\left(\frac{N}{b\frac{\partial F}{\partial x} - a\frac{\partial F}{\partial y}}\right)_\alpha = -\left(\frac{N}{b\frac{\partial F}{\partial x} - a\frac{\partial F}{\partial y}}\right)_\beta.$$

Wenn daher angenommen wird

$$\psi = N \,.\, \Psi,$$

wobei Ψ eine ganze Funktion des n^{ten} Grades bedeuten soll, so wird der Ausdruck (22) der Form

$$-K\left(\left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)_\alpha - \left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)_\beta\right),$$

K eine Konstante gleich

$$\left(\frac{N}{b\frac{\partial F}{\partial x} - a\frac{\partial F}{\partial y}}\right)_\beta.$$

Die Gleichung (21) giebt somit die Formel:

$$\sum_{(\Phi=0)} \frac{N\Psi}{(ax + by + c)(F\Phi)} = K\left(\left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)_\alpha - \left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)_\beta\right),$$

die, wenn der Kürze wegen N statt $\frac{N}{K}$ geschrieben wird, in die Formel (B') des Abschnittes II übergeht.

V.

Die Abel'sche Transcendente $T_{\alpha\beta}(x)$.

Für die Lösung des JACOBI'schen Umkehrproblems spielt die Transcendente

$$T_{\alpha\beta}(x) = \sum_{i=1}^{p} \int_{x_i}^{y_i} d\Pi_{\alpha\beta}$$

eine Hauptrolle. Die hier angewandten Bezeichnungen haben die folgende Bedeutung: α, β sind zwei Punkte auf der Kurve K ($F = 0$), $\Pi_{\alpha\beta}$ ist ein Integral dritter Gattung, das sich auf die Kurve K bezieht und nur die Punkte α, β als Unstetigkeitspunkte besitzt. Es soll aber überdies $\Pi_{\alpha\beta}$ ein besonderes $S_{\alpha\beta}$ sein, nämlich aus einem allgemeinen $S_{\alpha\beta}$ und Integralen erster Gattung in linearer Weise so zusammengesetzt werden, dass bei geschickter Wahl der Integrationswege:

$$\int_{\xi'}^{\xi''} d\Pi_{\alpha\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} d\Pi_{\xi'\xi''}, \tag{23}$$

unter ξ', ξ'' zwei beliebige Punkte auf K verstanden. Ferner soll p das Geschlecht der Kurve K bedeuten und durch das Zeichen

$$\int_{x_i}^{y_i} \qquad (i = 1 \text{ oder } 2, 3, \ldots, p)$$

eine Integration zwischen zwei bestimmten Punkten auf K, die ich kürzlich als Punkte x_i, y_i bezeichne, vorgeschrieben sein; *aber sämmtliche $2p$ Punkte x und y sollen zusammen mit den ausser α und β befindlichen $m - 2$ Schnittpunkten zwischen K und der Gerade $\alpha\beta$ sammt den Doppel- und Rückkehrpunkten von K auf ein und derselben Kurve $m - 2^{\text{ter}}$ Ordnung liegen.*

Es gilt dann der für jene Transcendente $T_{\alpha\beta}(x)$ fundamentale Satz, dass dieselbe die Differenz zweier Funktionen ausmacht, deren eine nur von α und x, die andere nur von β und x abhängt.[1] Diesen Satz werde ich hier aus dem CARNOT'schen Theoreme über die Schnittpunkte dreier Transversalen mit einer algebraischen Kurve (K) ableiten.

[1] Man siehe CLEBSCH und GORDAN: *Theorie der Abel'schen Funktionen*, Leipzig 1866. S. 154—160.

Sei γ ein Punkt auf K, der nicht mit α und β in gerader Linie liegt, übrigens aber beliebig fixirt ist, und seien die ausser α, β und γ vorhandenen Schnittpunkte der Kurve K mit den Seiten $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ mit $a_1, a_2, \ldots$ bez. $b_1, b_2, \ldots$ und $c_1, c_2, \ldots$ bezeichnet. Durch die p Punkte (x), die Doppel- und Rückkehrpunkte von K und jene Punkte (a) bez. (b) und (c) werden drei Kurven $m - 2^{\text{ter}}$ Ordnung gelegt, die durch die Gleichungen $\Phi = 0$ bez. $\Psi = 0$, $\chi = 0$ vertreten sein möchten und die ich der Kürze wegen mit Φ, Ψ, χ bezeichne. Jede dieser Kurven schneidet K in noch p Punkten, die für die Kurve Φ $t_1, t_2, \ldots$ für die Kurve Ψ $z_1, z_2, \ldots$ und für die Kurve χ $y_1, y_2, \ldots$ heissen mögen. Die Abel'sche Gleichung (B) des Abschnittes I, auf $\Pi_{\alpha\gamma}$ statt $S_{\alpha\beta}$ angewandt, werde jetzt von den Schnittpunkten der Kurven K und Ψ als unteren zu denen der Kurven K und χ als oberen Grenzpunkten, oder, wie ich kürzer sagen könne, von Ψ zu χ integrirt.[1] Es kommt dann die folgende Gleichung heraus:

$$\sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{y_i} d\Pi_{\alpha\gamma} + \sum_{i=1}^{m-2}\int_{b_i}^{c_i} d\Pi_{\alpha\gamma} + \sum_{i=1}^{p}\int_{z_i}^{x} d\Pi_{\alpha\gamma} = \log\left[\left(\frac{\chi}{\Psi}\right)_\alpha \left(\frac{\Psi}{\chi}\right)_\gamma\right]. \tag{24}$$

Und wenn man dieselbe Gleichung (B) auf $\Pi_{\beta\gamma}$ anwendet und von χ zu Φ integrirt, bekommt man:

$$\sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{t_i} d\Pi_{\beta\gamma} + \sum_{i=1}^{m-2}\int_{c_i}^{a_i} d\Pi_{\beta\gamma} + \sum_{i=1}^{p}\int_{y_i}^{x_i} d\Pi_{\beta\gamma} = \log\left[\left(\frac{\Phi}{\chi}\right)_\beta \left(\frac{\chi}{\Phi}\right)_\gamma\right]. \tag{25}$$

Die Dreiecksseiten $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ seien durch die Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ vertreten. Dann kann ich sagen, dass, wenn man die zwei Differentialgleichungen (B) für $\Pi_{\alpha'\gamma'}$, $\Pi_{\beta'\gamma'}$ von B zu C bez. C zu A integrirt, die folgenden Relationen gewonnen werden:

$$\sum_{i=1}^{m-2}\int_{b_i}^{c_i} d\Pi_{\alpha'\gamma'} + \int_{\gamma}^{\beta} d\Pi_{\alpha'\gamma'} = \log\left[\left(\frac{C}{B}\right)_{\alpha'} \left(\frac{B}{C}\right)_{\gamma'}\right], \tag{26}$$

[1] Die Wege, welche die Schnittpunkte: $F = 0$, $\Psi + \lambda\chi = 0$, oder bez. der Gleichung (25) die Schnittpunkte: $F = 0$, $\chi + \lambda\Phi = 0$, beschreiben, wenn λ stetig von 0 bis ∞ variirt, werden zu Integrationswegen benutzt. Es werden aber noch Wege von x_i nach y_i hinzugefügt und ferner Integrationen von x_i nach z_i und von x_i nach t_i folgendermassen definirt:

$$\int_x^z = \int_x^y + \int_y^z, \qquad \int_x^t = \int_x^y + \int_y^t.$$

$$(27) \qquad \sum_{i=1}^{m-2}\int_{c_i}^{a_i} d\Pi_{\beta'\gamma'} + \int_{\alpha}^{\gamma} d\Pi_{\beta'\gamma'} = \log\left[\left(\frac{A}{C}\right)_{\beta'}\left(\frac{C}{A}\right)_{\gamma'}\right],$$

hierbei α', β', γ' Punkte auf K bezeichnend, die unendlich nahe an α bez. β und γ liegen.

Es ist aber nach (23):

$$\int_{\gamma}^{\beta} d\Pi_{\alpha'\gamma'} = \int_{\alpha'}^{\gamma'} d\Pi_{\gamma\beta} = -\int_{\alpha'}^{\gamma'} d\Pi_{\beta\gamma},$$

und daher:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} d\Pi_{\beta'\gamma'} + \int_{\gamma}^{\beta} d\Pi_{\alpha'\gamma'} = \int_{\alpha}^{\gamma} d\Pi_{\beta'\gamma'} - \int_{\alpha'}^{\gamma'} d\Pi_{\beta\gamma},$$

gleich *Null,* wenn α', β' und γ' den kürzesten Weg nach α bez. β und γ rücken. Durch Addition von (26) und (27) erfolgt somit:

$$(28) \qquad \sum_{i=1}^{m-2}\left(\int_{b_i}^{c_i} d\Pi_{\alpha\gamma} + \int_{c_i}^{a_i} d\Pi_{\beta\gamma}\right) = \lim \log\left[\left(\frac{B}{A}\right)_{\gamma'}\left(\frac{A}{C}\right)_{\beta'}\left(\frac{C}{B}\right)_{\alpha'}\right].$$

Aber, wenn A, B, C in der Hesse'schen Normalform gegeben sind:

$$\left(\frac{B}{A}\right)_{\gamma'} = \frac{\text{Länge des Lothes von } \gamma' \text{ auf } \alpha\gamma}{\text{Länge des Lothes von } \gamma' \text{ auf } \beta\gamma} = \frac{\sin \gamma'\gamma\alpha}{\sin \gamma'\gamma\beta},$$

$$\left(\frac{A}{C}\right)_{\beta'} = \frac{\text{Länge des Lothes von } \beta' \text{ auf } \gamma\beta}{\text{Länge des Lothes von } \beta' \text{ auf } \alpha\beta} = \frac{\sin \beta'\beta\gamma}{\sin \beta'\beta\alpha},$$

$$\left(\frac{C}{B}\right)_{\alpha'} = \frac{\text{Länge des Lothes von } \alpha' \text{ auf } \beta\alpha}{\text{Länge des Lothes von } \alpha' \text{ auf } \gamma\alpha} = \frac{\sin \alpha'\alpha\beta}{\sin \alpha'\alpha\gamma}.$$

Es werden beim Grenzübergange $\alpha'\alpha$, $\beta'\beta$, $\gamma'\gamma$ Tangenten der Kurve K in den Punkten α, β, γ bezw. Ich werde sie mit τ_α, τ_β, τ_γ bezeichnen. Bemerken wir hernach, dass der Formel (9) des Abschnittes II zufolge:

$$\frac{\chi_\alpha}{\chi_\beta} = \frac{\alpha c_1 \,.\, \alpha c_2 \,.\, \alpha c_3 \ldots}{\beta c_1 \,.\, \beta c_2 \,.\, \beta c_3 \ldots},$$

$$\frac{\Psi_\gamma}{\Psi_\alpha} = \frac{\gamma b_1 \,.\, \gamma b_2 \,.\, \gamma b_3 \ldots}{\alpha b_1 \,.\, \alpha b_2 \,.\, \alpha b_3 \ldots},$$

$$\frac{\Phi_\beta}{\Phi_\gamma} = \frac{\beta a_1 \,.\, \beta a_2 \,.\, \beta a_3 \ldots}{\gamma a_1 \,.\, \gamma a_2 \,.\, \gamma a_3 \ldots},$$

so finden wir durch Addition der Gleichungen (24) und (25) und nachfolgende Subtraktion von (28):

$$(29)\qquad \sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{y_i}(d\Pi_{\alpha\gamma}-d\Pi_{\beta\gamma})+\sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{t_i}d\Pi_{\beta\gamma}-\sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{z_i}d\Pi_{\alpha\gamma}=$$

$$\log\left[\frac{\sin(\tau_\beta,\beta\alpha)\,\beta a_1\,.\,\beta a_2\,\ldots}{\sin(\tau_\beta,\beta\gamma)\,\beta c_1\,.\,\beta c_2\,\ldots}\;\frac{\sin(\tau_\gamma,\gamma\beta)\,\gamma b_1\,.\,\gamma b_2\,\ldots}{\sin(\tau_\gamma,\gamma\alpha)\,\gamma a_1\,.\,\gamma a_2\,\ldots}\;\frac{\sin(\tau_\alpha,\alpha\gamma)\,\alpha c_1\,.\,\alpha c_2\,\ldots}{\sin(\tau_\alpha,\alpha\beta)\,\alpha b_1\,.\,\alpha b_2\,\ldots}\right].$$

Aber nach dem CARNOT'schen Theoreme, wie es, wenn die Ecken des Dreiecks $(\alpha\beta\gamma)$ auf der Kurve (K) fallen, zu formuliren ist (siehe CHASLES, *Mémoire de Géométrie, Suite d'Aperçu historique* etc., p. 727, 846), wird der eingeklammerte Ausdruck gleich *eins*. Ferner muss nach (23) sein:

$$\int_{x_i}^{y_i}d\Pi_{\alpha\gamma}-\int_{x_i}^{y_i}d\Pi_{\beta\gamma}=\int_{\alpha}^{\gamma}d\Pi_{x_iy_i}-\int_{\beta}^{\gamma}d\Pi_{x_iy_i}=\int_{\alpha}^{\beta}d\Pi_{x_iy_i}=\int_{x_i}^{y_i}d\Pi_{\alpha\beta}.$$

Damit erfolgt aus (29) die Relation:

$$\sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{y_i}d\Pi_{\alpha\beta}+\sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{t_i}d\Pi_{\beta\gamma}+\sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{z_i}d\Pi_{\gamma\alpha}=0,$$

also nach der Definition der Transcendente T:

$$T_{\alpha\beta}(x)=T_{\alpha\gamma}(x)-T_{\beta\gamma}(x).$$

Es genüge hier γ als konstant, dagegen α, β und x als variabel anzusehen, damit wir in der letzten Formel den wichtigen Satz erblicken, dass die ABEL'sche Transcendente $T_{\alpha\beta}$ eine Differenz zweier Funktionen ausmacht, deren eine nur von α und den p Punkten x, die andere nur von β und denselben p Punkten x abhängt. W. z. z. w.
