SUR LES PÉRIODES DES INTÉGRALES ABÉLIENNES ET SUR UN NOUVEAU PROBLÈME TRÈS GÉNÉRAL

PAR

EMILE BOREL

À PARIS.

1. Beaucoup de problèmes d'Analyse peuvent être ramenés au problème de la détermination des relations linéaires à coefficients entiers qui peuvent exister entre des nombres transcendants; par exemple entre les périodes de certaines intégrales elliptiques ou abéliennes. C'est ainsi que M. PAINLEVÉ a ramené plusieurs problèmes de la théorie des équations différentielles au suivant: reconnaître si une certaine intégrale abélienne n'a que deux périodes.[1]

Je ne prétends pas indiquer ici une solution à cette difficile question, qui restera sans doute longtemps encore au dessus des moyens de l'analyse; je voudrais seulement chercher à attirer l'attention des géomètres sur quelques réflexions simples qui sont peut être de nature à suggérer une méthode nouvelle pour aborder toute une classe de problèmes comprenant celui-ci comme cas très particulier.

2. Faisons d'abord quelques remarques générales. Il est évidemment nécessaire que les coefficients constants dont dépendent les périodes considérées soient définis d'une manière précise et non pas connus seulement avec quelque approximation. Or, les seuls nombres connus primitivement d'une manière précise sont les nombres entiers; par une infinité de procédés de nature algébrique ou transcendante, on peut, à l'aide des nombres

[1] Voir par exemple ses *Leçons de Stockholm.*

entiers, définir une infinité d'autres nombres, qui seront, eux aussi, connus d'une manière précise.[1] Nous supposerons que l'on a fait un choix entre ces divers procédés, c'est à dire que l'on en a conservé un nombre limité à l'exclusion des autres. De plus, nous supposerons que l'on a choisi un nombre entier N auquel on supposera inférieurs tous les nombres entiers introduits dans les calculs, et tel de plus que le nombre des opérations d'une nature quelconque que l'on suppose effectuées sur ces nombres entiers, soit inférieur à N. Par exemple, si l'on veut introduire un nombre algébrique, les coefficients et le degré de l'équation qui le définit, seront inférieurs à N, etc.

3. Il est clair que l'on définit ainsi un nombre limité de nombres; avec ces nombres choisis comme coefficients, on peut former un nombre limité d'intégrales elliptiques de première espèce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}};$$

et chacune de ces intégrales a seulement deux périodes *principales*, c'est à dire périodes primitives de module minimum.[2] Supposons qu'entre plusieurs de ces périodes convenablement choisies, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$, il y ait des relations linéaires à coefficients entiers de la forme:

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + \ldots + m_q\omega_q = 0. \tag{1}$$

Nous pouvons toujours supposer que, parmi les relations linéaires où figurent effectivement $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ la relation (1) est celle pour laquelle la somme

$$A = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_q^2$$

a la plus petite valeur. Il y aura ainsi au plus autant de valeurs pour A qu'il y a de manières d'associer les périodes q à q, q étant arbitraire.

[1] Par exemple, on peut définir les nombres e et π par les relations

$$\pi = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}; \qquad 1 = \int_1^e \frac{dx}{x}.$$

Nous donnons ces exemples simplement à titre d'indication.

[2] Voir, par exemple, JORDAN, Cours d'Analyse, 2me édition, tome II, p. 338.

Dès lors il est clair, que *le nombre N étant donné il y a un nombre limité de valeurs pour A;* nous désignerons la plus grande d'entre elles par $\varphi(N)$; on aura ainsi

$$A \leqq \varphi(N). \tag{2}$$

Si la fonction $\varphi(N)$ était connue, le problème qui consiste à reconnaître s'il peut exister une relation telle que (1) entre des périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ se trouverait décomposé en un nombre *limité* de problèmes plus simples: *reconnaître si la relation* (1) *est vérifiée, les nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_q$ étant donnés, et les nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ étant définis par des conditions transcendantes.*

4. Si, en calculant avec approximation le premier membre de la relation (1) on trouve que sa valeur est sûrement différente de zéro, on est certain que la relation (1) n'a pas lieu; il n'y a doute que si l'on trouve une valeur de plus en plus voisine de zéro à mesure que l'on pousse plus loin l'approximation.

Il est bien certain que, si la quantité

$$m_1\omega_1 + \ldots + m_q\omega_q \tag{3}$$

est différente de zéro, on s'en apercevra sûrement au bout d'un nombre limité d'opérations; mais ce nombre limité ne peut pas être fixé d'avance.

Voici ce que l'on peut dire à ce sujet; considérons toujours les quantités ω, en nombre limité, que nous avons définies, et choisissons de toutes les manières possibles les entiers positifs ou négatifs m_i, tels que A soit inférieur à $\varphi(N)$; nous définissons ainsi un nombre limité de quantités (3); si nous désignons par $\psi(N)$ le module de la plus petite d'entre elles, en excluant celles qui sont nulles, on aura sûrement

$$|m_1\omega_1 + \ldots + m_q\omega_q| \geqq \psi(N)$$

dans le cas où la relation (1) n'est pas satisfaite. Donc *la connaissance des deux fonctions $\varphi(N)$ et $\psi(N)$ permettrait de résoudre sûrement le problème qui nous occupe, par un nombre limité d'opérations, fixé d'avance.*

5. Je ne suis malheureusement pas en état de proposer une méthode qui permette d'obtenir ces deux fonctions; de sorte que les remarques précédentes substituent simplement à un problème très difficile un autre

problème qui ne paraît pas moins difficile. Mais ce nouveau problème me paraît présenter un très grand intérêt en lui même et avoir une portée très générale; c'est ce que je voudrais indiquer ici très brièvement, en omettant les généralisations pour ainsi dire illimitées que l'on pourrait ajouter aux considérations précédentes.

6. Lorsque l'on définit un nombre entier déterminé au moyen de nombres entiers en nombre fini et d'opérations arithmétiques, il est toujours possible de fixer d'avance une limite supérieure du nombre défini en fonction de ceux qui servent à le définir; on peut exprimer ce fait en disant que la *puissance des opérations arithmétiques est connue et limitée.*

Il en est de même pour certains procédés algébriques de nature bien plus compliquée; par exemple si un nombre entier est défini comme étant le quotient incomplet de rang déterminé du développement en fraction continue d'un nombre algébrique donné, on sait limiter ce nombre au moyen des données; à savoir: les coefficients de l'équation qui définit le nombre algébrique, le degré de cette équation et le rang du quotient incomplet.

Ceci peut être étendu, comme je l'ai montré, au cas on l'on adjoint le nombre e au domaine de rationalité.[1]

Dans ces divers cas, il est d'ailleurs évident que l'on doit toujours s'arranger pour définir un nombre unique ou tout au moins des nombres en nombre limité; peu importe, d'ailleurs, le procédé plus ou moins artificiel par lequel cette limitation est obtenue.

Le principe général sur lequel je voudrais attirer l'attention et qui est évident d'après les considérations précédentes, c'est que les divers procédés transcendants par lesquels on peut définir des nombres entiers ont aussi une *puissance limitée;* c'est ainsi que l'on peut traduire le fait de l'existence de la fonction $\varphi(N)$; il faudrait déterminer cette fonction pour limiter effectivement cette puissance; c'est là le problème que je tenais à signaler à cause de son caractère très général et de l'importance qu'il me paraît avoir au point de vue des principes.

Paris, janvier 1902.

---

[1] Comptes rendus, t. CXXVIII, p. 596 (6 mars 1899).