DÉTERMINATION DES ÉQUATIONS RÉSOLUBLES ALGÉBRIQUEMENT [1]

PAR

IVAR BENDIXSON

à STOCKHOLM.

Le but du travail est de montrer que l'on peut parvenir à la détermination des conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'une équation algébrique soit résoluble par radicaux, sans avoir recours à la théorie des substitutions, introduite dans l'Algèbre par GALOIS. On peut en effet déterminer les dites conditions par une extension très facile à effectuer des considérations employées par ABEL dans ses deux Mémoires: *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement* et *Sur la résolution algébrique des équations.*

Nous étudierons à cette fin les équations telles que chaque racine puisse s'exprimer en fonction rationnelle de l'une d'entre elles, chaque équation pouvant en effet être réduite à une telle équation. Par une *fonction rationnelle* de x, nous entendons toujours ici une fonction formée par de seules opérations arithmétiques de x et des quantités $R', \ldots, R^s$ définissant le domaine de rationalité donné.

Soit

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

une telle équation, irréductible dans le domaine de rationalité donné. Ses racines peuvent alors s'écrire

$$\begin{array}{llll} x_1 & , \theta x_1 & , \ldots, & \theta^{n-1} x_1, \\ \theta_1 x_1 & , \theta\theta_1 x_1 & , \ldots, & \theta^{n-1}\theta_1 x_1, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_{q-1} x_1 & , \theta\theta_{q-1} x_1 & , \ldots, & \theta^{n-1}\theta_{q-1} x_1, \end{array}$$

[1] Ce mémoire est une reproduction d'un travail publié en suédois dans les Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar; 1891. N° 3, Stockholm, dont un résumé a été publié dans les Annales de la Faculté de Toulouse, Tome 7.

les fonctions θ_ν désignant des fonctions rationnelles de x, et θ satisfaisant en outre à

$$\theta^\nu \theta x_1 = \theta^{\nu+1} x_1, \qquad \theta^n x_1 = x_1. \qquad (\nu=1,2,\dots)$$

Posons

$$f(x) = (x - x_1)(x - \theta x_1)\dots(x - \theta^{n-1} x_1).$$

D'après un théorème, démontré par Abel dans le premier des mémoires cités, les coefficients de $f(x)$ peuvent alors s'exprimer en fonctions rationnelles de la quantité

$$\psi(t, x_1) = (t - x_1)(t - \theta x_1)\dots(t - \theta^{n-1} x_1),$$

t désignant une constante arbitraire, et cette quantité ψ satisfait à une équation de degré q à coefficients rationnels

$$(2) \qquad F_1(x') = [x' - \psi(t, x_1)][x' - \psi(t, \theta_1 x_1)]\dots[x' - \psi(t, \theta_{q-1} x_1)] = 0.$$

L'équation (1) de degré qn est donc réduite à une équation de degré q

$$(3) \qquad F_1(x') = 0,$$

qui est irréductible (ce que nous prouverons tout à l'heure), et à une équation abélienne

$$f(x) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de l'une des racines de l'équation $F_1 = 0$.

Afin de prouver que l'équation (3) est irréductible, il suffit d'observer que, si

$$[x' - \psi(t, \theta_{\nu_1} x_1)][x' - \psi(t, \theta_{\nu_2} x_1)]\dots[x' - \psi(t, \theta_{\nu_s} x_1)],$$

où $s < q$, était une fonction rationnelle, on pourrait en conclure que

$$\psi(t, \theta_{\nu_1} x_1)\psi(t, \theta_{\nu_2} x_1)\dots\psi(t, \theta_{\nu_s} x_1)$$

serait aussi une fonction rationnelle dans le domaine de rationalité donné, et cette dernière fonction est un diviseur de $F(t)$ qui était supposée irréductible.

Si l'on savait maintenant, que l'une des racines de $F_1 = 0$ pouvait s'exprimer en fonction rationnelle d'une autre de ses racines, celles-ci pourraient s'écrire

$$\left.\begin{array}{l} x_1', \ \lambda x_1', \ \ldots, \ \lambda^{n_1-1} x_1' \\ x_2', \ \lambda x_2', \ \ldots, \ \lambda^{n_1-1} x_2' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{q_1}', \ \lambda x_{q_1}', \ \ldots, \ \lambda^{n_1-1} x_{q_1}' \end{array}\right\} (q_1 n_1 = q),$$

où λ est une fonction rationnelle telle que l'on ait $\lambda^{n_1} x_1' = x_1'$. On pourrait alors, de la même manière que nous l'avons fait pour $F = 0$, réduire $F_1 = 0$ à une équation de degré q_1

$$F_2(x'') = 0$$

et une équation abélienne du degré n_1

$$f_1(x') = (x' - x_1')(x' - \lambda x_1') \ldots (x' - \lambda^{n_1-1} x_1') = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de l'une des racines de F_2.

Dans ce cas il existe donc une fonction rationnelle θ_1 telle que

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \lambda \psi(t, x_1),$$

ce qui nous donne

$$\psi(t, \theta_1 \theta x_1) = \lambda \psi(t, \theta x_1)$$
$$= \psi(t, \theta_1 x_1).$$

Mais t étant une quantité indéterminée les facteurs du membre gauche seront identiques à ceux du membre droit, ce qui fait voir qu'il existe un nombre entier α tel que l'on ait

(4) $$\theta_1 \theta x_1 = \theta^{\alpha} \theta_1 x_1.$$

De l'autre côté, on voit que, si cette dernière équation a lieu, on en tire

$$\psi(t, \theta_1 \theta x_1) = \psi(t, \theta_1 x_1).$$

Or l'équation (1) étant irréductible on en conclut que

$$\psi(t, \theta_1 \theta^{\nu} x_1) = \psi(t, \theta_1 \theta^{\nu-1} x_1) \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,3,\ldots)}$$

ce qui nous donne

$$\psi(t, \theta_1 \theta^{\nu} x_1) = \psi(t, \theta_1 x_1). \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,3,\ldots)}$$

L'équation

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \frac{1}{n}[\psi(t, \theta_1 x_1) + \psi(t, \theta_1 \theta x_1) + \ldots + \psi(t, \theta_1 \theta^{n-1} x_1)],$$

nous prouve alors que $\psi(t, \theta_1 x_1)$ est une fonction symétrique de

$$x_1, \theta x_1, \ldots, \theta^{n-1} x_1,$$

c'est à dire est une fonction rationnelle de $\psi(t, x_1)$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'une des racines de

$$F_1(x') = 0$$

puisse être exprimée en fonction rationnelle d'une autre de ces racines, c'est donc qu'il existe un tel nombre α que l'on ait

$$\theta_1 \theta x_1 = \theta^\alpha \theta_1 x_1.$$

Supposons maintenant que l'équation (4) soit satisfaite. On saura donc que

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \lambda \psi(t, x_1) \qquad (\text{où } \lambda^{n_1} x_1' = x_1').$$

L'irréductibilité de l'équation (1) nous donnera aussi

$$\psi(t, \theta_1^2 x_1) = \lambda^2 \psi(t, x_1)$$

et en général

$$\psi(t, \theta_1^\nu x_1) = \lambda^\nu \psi(t, x_1).$$

On en conclut que

$$\psi(t, \theta_1^{n_1} x_1) = \psi(t, x_1)$$

ou que

$$\theta_1^{n_1} x_1 = \theta^k x_1 \qquad k = \text{ nombre entier } < n$$

ce qui est donc encore une conséquence de l'équation (4).

Envisageons maintenant l'équation (2). Si l'équation (4) a lieu, cette équation peut se réduire à une équation abélienne de degré n_1

$$f_1(x') = [x' - \psi(t, x_1)][x' - \psi(t, \theta_1 x_1)] \ldots [x' - \psi(t, \theta_1^{n_1 - 1} x_1)] = 0$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de

$$\begin{aligned} x_1'' &= (t_1 - x_1')(t_1 - \lambda x_1') \ldots (t_1 - \lambda^{n_1 - 1} x_1') \\ &= [t_1 - \psi(t, x_1)][t_1 - \psi(t, \theta_1 x_1)] \ldots [t_1 - \psi(t, \theta_1^{n_1 - 1} x_1)] = \psi_1(t_1, t, x_1), \end{aligned}$$

laquelle expression est elle-même racine d'une équation

$$F_2(x'') = 0 \tag{5}$$

de degré q_1 à coefficients rationnels.

Les autres racines de l'équation (5) seront alors données par les fonctions $\psi_1(t_1, t, \theta_\nu x_1)$.

La condition *nécessaire*, pour qu'une autre racine de l'équation (5) soit une fonction rationnelle $\mu(x_1')$ de x_1'', est donc qu'il existe une fonction $\theta_2 x_1$ telle que

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1) = \mu\psi_1(t_1, t, x_1),$$

ce qui nous donne

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta x_1) = \mu\psi_1(t_1, t, \theta x_1).$$

A l'aide de l'équation (4) on prouve aisément que

$$\psi_1(t_1, t, \theta x_1) = \psi_1(t_1, t, x_1)$$

d'où l'on conclut que

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta x_1) = \psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1).$$

Or la quantité t_1 étant complètement indéterminée, il s'en suit que la fonction

$$\psi(t, \theta_2\theta x_1)$$

sera égale à l'une des fonctions

$$\psi(t, \theta_2 x_1)\ ,\ \psi(t, \theta_1\theta_2 x_1)\ ,\ \ldots,\ \psi(t, \theta_1^{n_1-1}\theta_2 x_1).$$

Soit, pour fixer les idées,

$$\psi(t, \theta_2\theta x_1) = \psi(t, \theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1).$$

Le fait que t est une quantité indéterminée, met alors en évidence que

$$\theta_2\theta x_1$$

sera égal à l'une des quantités

$$\theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1\ ,\ \theta\theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1\ ,\ \ldots,\ \theta^{n-1}\theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1.$$

On en conclut enfin, qu'il existe un nombre α_2 tel que

$$\theta_2\theta x_1 = \theta^{\alpha_2}\theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1. \tag{6}$$

Mais de l'autre côté on aura aussi

$$\begin{aligned}\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta_1x_1) &= \mu\psi_1(t_1, t, \theta_1x_1)\\ &= \mu\psi_1(t_1, t, x_1)\\ &= \psi_1(t_1, t, \theta_2x_1)\end{aligned}$$

et cette équation nous conduit, par des considérations tout analogues à celles développées ci-dessus, à une relation

$$\theta_2\theta_1x_1 = \theta^{\alpha'_2}\theta_1^{\beta'_2}\theta_2x_1. \tag{6'}$$

Dans les équations (6) et (6′) nous avons donc obtenu les conditions *nécessaires*, pour qu'une racine de l'équation (5) soit une fonction rationnelle de x_1''.

Afin de prouver que ces deux équations constituent en même temps les conditions suffisantes, pour que cela ait lieu, nous envisageons de nouveau la fonction $\psi_1(t_1, t, \theta_2x_1)$.

Les équations (6) et (6′) conduisent évidemment à

$$\begin{aligned}\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta x_1) &= \psi_1(t_1, t, \theta^{\alpha_2}\theta_1^{\beta_2}\theta_2x_1)\\ &= \psi_1(t_1, t, \theta_1^{\beta_2}\theta_2x_1)\\ &= \psi_1(t_1, t, \theta_2x_1).\end{aligned}$$

On en conclut qu'on aura en général

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta^\nu x_1) = \psi_1(t_1, t, \theta_2\theta^{\nu-1}x_1) \qquad (\nu=1, 2, 3, \ldots)$$

ou que

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta^\nu x_1) = \psi_1(t_1, t, \theta_2x_1). \qquad (\nu=1, 2, 3, \ldots)$$

En appliquant le théorème déjà cité d'Abel on sait alors que

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2x_1) = R(\psi(t, x_1)),$$

R désignant une fonction rationnelle.

De la même manière on prouve aussi que

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2\theta_1x_1) = \psi_1(t_1, t, \theta_2x_1),$$

ce qui nous donne

$$R(\psi(t\,,\,\theta_1 x_1)) = R(\psi(t\,,\,x_1))$$

et en général

$$R(\psi(t\,,\,\theta_1^\nu x_1) = R(\psi(t\,,\,x_1)).$$

On en conclut que la fonction

$$\psi_1(t_1\,,\,t\,,\,\theta_2 x_1) = \frac{1}{n_1}\left[R(\psi(t\,,\,x_1)) + R(\psi(t\,,\,\theta_1 x_1)) + \ldots + R(\psi(t\,,\,\theta_1^{n_1-1} x_1))\right]$$

est une fonction symétrique de $\psi(t\,,\,x_1)\,,\ \psi(t\,,\,\theta_1 x)\,,\ldots,\ \psi(t\,,\,\theta_1^{n_1-1}x_1)$, c'est à dire une fonction rationnelle de $\psi_1(t_1\,,\,t\,,\,x_1)$. c. q. f. d.

En continuant ainsi on parvient au théorème que voici:

Etant donnée une équation dont chaque racine peut s'exprimer en fonction rationnelle $\theta_\nu x_1$ de l'une d'entre elles x_1, si entre les fonctions $\theta_\nu x_1$ les relations suivantes ont lieu

$$(7)\qquad \begin{cases} \theta_1 x_1 = \theta^{\alpha_1}\theta_1 x_1\,, \\ \theta_2\theta x_1 = \theta^{\alpha_2}\theta_1^{\beta_2}\theta_2 x_1\,, \\ \theta_2\theta_1 x_1 = \theta^{\alpha_2'}\theta_1^{\beta_2'}\theta_2 x_1\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_\nu\theta x_1 = \theta^{\alpha_\nu}\theta_1^{\beta_\nu}\ldots\theta_{\nu-1}^{k_\nu}\theta_\nu x_1\,, \\ \theta_\nu\theta_1 x_1 = \theta^{\alpha_\nu'}\theta_1^{\beta_\nu'}\ldots\theta_{\nu-1}^{k_\nu'}\theta_\nu x_1\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_\alpha\theta_{\alpha-1} x_1 = \theta^{\alpha_\nu^{\nu-1}}\theta_1^{\beta_\nu^{\nu-1}}\ldots\theta_{\nu-1}^{k_\nu^{\nu-1}}\theta_\nu x_1\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \end{cases}$$

l'équation donnée se réduit alors à une suite d'équations abéliennes, et elle est par conséquent résoluble par radicaux

Inversement, si l'équation donnée se réduit à une suite d'équations abéliennes, ses racines sont nécessairement liées entre elles par un système d'équations de la forme (7).

Jusqu'ici nous n'avons employé que les considérations dont s'est servi ABEL dans le premier des Mémoires mentionnés, et l'on voit que l'on trouve par ces considérations seules, la classe la plus générale d'équations qui peuvent se réduire à une suite d'équations abéliennes.

Il nous reste à prouver que l'ensemble des équations (7) forme la condition nécessaire pour que l'équation (1) soit résoluble par radicaux.

Afin d'y parvenir, nous ferons usage des considérations du second Mémoire cité d'ABEL.

Nous avons supposé de l'équation (1) qu'elle soit résoluble algébriquement. Une de ses racines peut alors s'écrire

$$x_1 = \varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_q),$$

où $R', \ldots, R^s$ désignent les quantités qui définissent le domaine de rationalité donné, et où les quantités V_ν satisfont aux équations suivantes

$$\begin{aligned}
&V_1^{p_1} - \varphi_1(R', \ldots, R^s) = 0,\\
&V_2^{p_2} - \varphi_2(R'_1, \ldots, R^s, V_1) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&V_q^{p_q} - \varphi_q(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}) = 0,
\end{aligned}$$

les $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$, φ désignant des fonctions rationnelles de $R', \ldots, R^s$, et des fonctions entières rationnelles de $V_1, \ldots, V_q$ de degré $p_1 - 1, \ldots, p_q - 1$. Je suppose ici, que l'on ait adjoint au domaine de rationalité donné les quantités $\omega_1, \ldots, \omega_q$ qui satisfont à

$$\omega_\nu^{p_\nu - 1} + \omega_\nu^{p_\nu - 2} + \ldots + \omega_\nu + 1 = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q)$$

que l'équation

$$V_\nu^{p_\nu} - \varphi_\nu(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{\nu-1}) = 0$$

soit irréductible dans le domaine de rationalité $R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{\nu-1}$, et que les p_ν soient des nombres premiers.

En mettant $\omega_q V_q$ en φ au lieu de V_q, on obtient une nouvelle racine, ce qui nous donne

$$\varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}, \omega_q V_q) = \theta\varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}, V_q),$$

et en général

$$\varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}, \omega_q^\nu V_q) = \theta^\nu x_1.$$

Observons que l'on a
$$\theta^{p_q} x_1 = x_1,$$
et formons maintenant
$$\psi(t, x_1) = (t - x_1)(t - \theta x_1), \ldots, (t - \theta^{p_q - 1} x_1) = H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}),$$
où nous supposons pour plus de simplicité, que V_{q-1} soit réellement contenue en H.

En mettant $\omega_{q-1} V_{q-1}$ au lieu de V_{q-1} dans les équations ci-dessus, la fonction V_q se change en $\overline{V}_q$ et l'on obtient une racine
$$x_2 = \varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1} V_{q-1}, \overline{V}_q)$$
de l'équation (1).

On aura alors
$$\varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1} V_{q-1}, \omega_q^\nu \overline{V}_q) = \theta^\nu x_2.$$

Comme
$$\psi(t, x_2) = H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1} V_{q-1})$$
est différent de $\psi(t, x_1)$, il faut que x_2 soit une racine différente de tous les $\theta^\nu x_1$. Écrivons donc
$$x_2 = \theta_1 x_1.$$

En mettant
$$y_\nu = H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1}^{\nu-1} V_{q-1}), \qquad \nu = 1 \quad ., p_{q-1}.$$
chaque fonction cyclique de $y_1, \ldots, y_{p_{q-1}}$ est indépendante de V_{q-1}. L'équation
$$(y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_{p_{q-1}}) = 0$$
sera donc une équation abélienne dans le domaine de rationalité $R', \ldots, R^s$, $V_1, \ldots, V_{q-2}$, ce qui nous permet d'affirmer que

(8) $$y_2 = \bar{\lambda}(y_1, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2}),$$

$\bar{\lambda}$ désignant une fonction rationnelle.

Mais l'équation
$$H(x, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}) = 0$$
est évidemment irréductible dans le domaine de rationalité $R', \ldots, R^s$, $V_1, \ldots, V_{q-1}$, ce que l'on prouve aisément, en observant que $V_q^{p_q} - \varphi_q$ est

irréductible dans ce domaine, et que p_q est un nombre premier. L'équation (8), qui peut être écrite

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \bar{\lambda}[\psi(t, x_1), R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2}],$$

a donc pour conséquence

$$\psi(t, \theta_1 \theta x_1) = \bar{\lambda}[\psi(t, \theta x_1), R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2}] = \psi(t, \theta_1 x_1).$$

De cette dernière relation on conclut enfin que l'on a

$$\theta_1 \theta x_1 = \theta^\alpha \theta_1 x_1.$$

Les développements de la page 320 nous permettent alors d'affirmer que

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \lambda\psi(t, x_1),$$

λ désignant une fonction rationnelle de $R', \ldots, R^s, t, x_1$. De l'équation

$$y_2 = \lambda(y_1)$$

on conclut en outre que

$$y_3 = \lambda(y_2)$$

et ainsi de suite, de sorte que l'on obtient

$$\lambda^{p_{q-1}}(y_1) = y_1,$$

ce qui nous donne

$$\psi(t, \theta_1^{p_{q-1}} x_1) = \psi(t, x_1)$$

ou que

$$\theta_1^{p_{q-1}} x_1 = \theta^k x_1, \qquad k = \text{nombre entier.}$$

Mettons maintenant $\omega_{q-2} V_{q-2}$ au lieu de V_{q-2} dans les expressions de φ et de H. La fonction V_{q-1} se change en $\overline{V}_{q-1}$, x_1 en x_3 et l'équation

$$H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2}, \omega_{q-1} V_{q-1}) = \lambda[H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2} V_{q-1})]$$

se change en

$$\begin{aligned} &H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-2} V_{q-2}, \omega_{q-1} \overline{V}_{q-1}) \\ &= \lambda[H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-2} V_{q-2}, \overline{V}_{q-1})] \\ &= \lambda\psi(t, x_3) \\ &= \psi(t, \theta_1 x_3). \end{aligned}$$

On aura de la même manière

$$\begin{aligned} &H(t, R', \dots, R^s, V_1, \dots, \omega_{q-2} V_{q-2}, \omega_{q-1}^2 \overline{V}_{q-1}) \\ &= [H(t, R', \dots, R^s, V_1, \dots, \omega_{q-2} V_{q-2}, \omega_{q-1} \overline{V}_{q-1})] \\ &= \lambda^2 \psi(t, x_3) \\ &= \psi(t, \theta_1^2 x_3) \end{aligned}$$

et en général

$$H(t, R', \dots, R^s, V_1, \dots, \omega_{q-2} V_{q-2}, \omega_{q-1}^\nu \overline{V}_{q-1}) = \psi(t, \theta_1^\nu x_3).$$

Formons enfin la fonction

$$\begin{aligned} \psi_1(t_1, t, x_1) &= [t_1 - \psi(t, x_1)][t_1 - \psi_1(t, \theta_1 x_1] \dots [t_1 - \psi_1(t, \theta_1^{p_{q-1}-1} x_1)] \\ &= H_1(t_1, t, R', \dots, R^s, V_1, \dots, V_{q-2}) \end{aligned}$$

où nous supposerons pour plus de simplicité, que la fonction V_{q-2} soit réellement contenue dans H_1.

On aura alors

$$\psi_1(t_1, t, x_3) = H_1(t_1, t, R', \dots, R^s, V_1, \dots, \omega_{q-2} V_{q-2}).$$

Les fonctions $\psi_1(t_1, t, x_3)$ et $\psi_1(t_1, t, x_1)$ n'étant alors pas identiques, il s'en suit que x_3 est une racine différente de tous les

$\theta^\alpha \theta_1^\beta x_1$, α, β désignant des nombres entiers.

Mettons

$$x_3 = \theta_2 x_1$$

et envisageons une fonction cyclique des quantités

$$\psi(t_1, t, \theta_2^\nu x_1) = H_1(t_1, t, R', \dots, R^s, V_1, \dots, \omega_{q-2}^\nu V_{q-2}), \quad \nu = 0, 1, \dots, p_{q-2} - 1,$$

on sait qu'une telle fonction est une fonction rationnelle de $R', \dots, R^s$, $V_1, \dots, V_{q-3}$, ce qui fait voir que les quantites $\psi(t_1, t, \theta_2^\nu x_1)$ sont les racines d'une équation abélienne à coefficients rationnelles en $R', \dots, R^s$, $V_1, \dots, V_{q-3}$.

On aura donc

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1) = \mu\big(\psi_1(t_1, t, x_1), R', \dots, R^s, V_1, \dots, V_{q-3}\big). \tag{9}$$

μ désignant une fonction rationnelle.

Or chaque fonction $H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1}^{\nu} V_{q-1})$ étant irréductible dans le domaine $R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}$, on conclut que la fonction

$$\prod_{\nu=1}^{p_{q-1}} H(t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, \omega_{q-1}^{\nu} V_{q-1}) = H_1(0, t, R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2})$$

est irréductible dans le domaine de rationalité $R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-2}$. L'équation (9) est par conséquent satisfaite si l'on y remplace x_1 par l'une quelconque des racines $\theta^\alpha \theta_1^\beta x_1$.

On aura alors

$$\begin{aligned}\psi_1(t_1, t, \theta_2 \theta x_1) &= \mu\big(\psi_1(t_1, t, \theta x_1), R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-3}\big)\\ &= \psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1).\end{aligned}$$

D'une manière analogue on obtient

$$\psi_1(t_1, t, \theta_2 \theta_1 x_1) = \psi_1(t_1, t, \theta_2 x_1).$$

Ces deux équations mettent en évidence que les équations (6) et (6') ont lieu.

Les autres relations (7) se démontrent d'une manière analogue, et l'on peut enfin affirmer qu'elles constituent les conditions nécessaires et suffisantes pour que $F(x)$ soit résoluble algébriquement.

Ces équations (7) sont évidemment identiques à celles que l'on obtient par la méthode de Galois.