ÜBER EINEN GEOMETRISCHEN CALCÜL

(VERKNÜPFUNGS-CALCÜL)

VON

GERHARD HESSENBERG
in BERLIN-CHARLOTTENBURG.

1. Es wird in dieser Arbeit ein geometrischer Calcül mit den Punkten einer Geraden aufgebaut, und zwar auf Grund folgender 3 Sätze:

I) *Durch zwei Punkte ist stets eine und nur eine Gerade möglich.*

II) *Zwei Gerade schneiden sich stets in einem (und wegen* I *nur in einem) Punkt.*

III) *Gehen die Verbindungslinien homologer Ecken zweier aufeinander bezogener Dreiecke durch einen Punkt, so schneiden sich die homologen Seiten in Punkten einer Geraden.*

Der erste Satz ist ein ebenes Verknüpfungsaxiom. Der zweite könnte durch das Parallelenaxiom ersetzt werden und gilt auf Grund desselben, wenn man die ideale unendlichferne Gerade mit den idealen unendlichfernen Punkten einführt. Die Sätze I und II sollen daher als die »*idealen* ebenen Verknüpfungsaxiome» bezeichnet werden. Es sei bemerkt, dass wir nur die ebene Geometrie betrachten.

Satz III ist der *Desargues'sche Satz*, dessen Beweis in bekannter Weise geführt werden kann, wenn noch die räumlichen Verknüpfungsaxiome vorausgesetzt werden; man zeigt nämlich, dass die durch den Satz beschriebene Figur der Schnitt eines vollständigen räumlichen Fünfecks ist.

2. Der aus diesen Sätzen zu entwickelnde Calcül steht in enger Beziehung zu zwei anderen geometrischen Rechenverfahren. Das erste ist

von STAUDT[1] begonnen und von Herrn LÜROTH[2] durchgeführt worden. Das zweite hat Herr HILBERT angegeben.[3] Allen drei Rechenverfahren gemeinsam sind die commutative und associative Addition, die associative Multiplication und die Verbindung beider Operationen durch die distributiven Gesetze. Angewandt werden diese Operationen im STAUDT-LÜROTH'schen Calcül auf die Würfe, im HILBERT'schen auf die Strecken, die in einer Geraden liegen und einen gegebenen Anfangspunkt haben, in unserem auf die Punkte einer Geraden. Zur Begründung der associativen, commutativen und distributiven Gesetze benutzen STAUDT und LÜROTH den projektiven Fundamentalsatz, Herr HILBERT, und nach seinem Vorgange auch ich, allein den DESARGUES'schen Satz. Und zwar geht Herr HILBERT nur von derjenigen Specialisierung des Satzes aus, die durch das Parallelwerden homologer Seiten der beiden Dreiecke entsteht. Aus dieser Specialisierung kann man aber in einfacher Weise mit alleiniger Hülfe des Axioms I und des Parallelenaxioms den allgemeinen DESARGUES'schen Satz herleiten,[4] so dass die Grundlagen unseres Calcüls nicht umfangreicher sind, wie die des HILBERT'schen.

3. Die unserem Calcül zu Grunde liegenden Constructionen sind die zu den STAUDT-LÜROTH'schen Verfahren gehörigen Linealconstruktionen, andererseits erkennt man in ihnen leicht eine projektivische Verallgemeinerung der HILBERT'schen. Alle drei Rechenverfahren gehen also auf eine gemeinsame Grundlage zurück. In der That hat man gezeigt, dass der projektive Fundamentalsatz aus dem DESARGUES'schen Satz und dem speciellen PASCAL'schen Satz bewiesen werden kann. Mit dem »*speciellen* PASCAL'schen Satz« ist der folgende gemeint:

IV. *Liegen die Ecken eines einfachen Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden, so schneiden sich die Gegenseiten in Punkten einer Geraden.*

---

[1] *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Heft II, § 19, ff., § 27 ff.

[2] *Über das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen.* Math. Ann. Bd. 8 und 9.

[3] *Grundlagen der Geometrie.* Kap. V. Der DESARGUES'sche Satz.

[4] Über eine noch weitergehende Eigenschaft des DESARGUES'schen Satzes hinsichtlich seiner Beweisbarkeit aus Spezialisierungen siehe meine Arbeit *Desargues'scher Satz und Centralcollineation* Archiv der Math., Bd. 3, Heft 1.

Der HILBERT'sche Calcül wie der unsrige enthalten nun diejenigen Eigenschaften des STAUDT-LÜROTH'schen Verfahrens, die allein aus dem DESARGUES'schen Satz folgen. Das sind die beiden associativen, die beiden distributiven Gesetze und von der Addition das commutative. Das commutative Gesetz der Multiplication wird direkt mit dem PASCAL'schen Satz identisch. Der letztere ist mit den Sätzen I bis III nicht beweisbar und darf daher in unseren Untersuchungen nicht angewandt werden.

4. Da wir keinerlei Anordnungsaxiome voraussetzen, können wir über die Anzahl der Punkte einer Geraden keine Angaben machen. Doch bleiben unsere Ergebnisse gültig — auch wenn sie unter Umständen trivial werden, — falls wir die Existenz eines vollständigen Vierecks annehmen, d. h. die Existenz von 4 Punkten, von denen keine 3 in einer Geraden liegen. Da hierdurch nur ein sofort zu übersehender, gänzlich trivialer Fall ausgeschlossen wird, ist diese Voraussetzung unter den Grundlagen unseres Calcüls nicht angeführt.

I. *Projektivische Verknüpfungen.*

5. Unter denjenigen Gebilden der projektivischen Geometrie, die allein aus dem DESARGUES'schen Satz gefolgert werden können, ist besonders die Centralcollineation bemerkenswert, d. h. diejenige Collineation, in der entsprechende Gerade sich auf einer festen Geraden, der Axe, schneiden, und entsprechende Punkte auf Geraden liegen, die durch einen festen Punkt, das Centrum, läufen. Der Nachweis ihrer Existenz ist sehr leicht, wenn man beachtet, dass die Figur des DESARGUES'schen Satzes aus zwei centralcollinearen Dreiecken besteht.[1]

6. Nunmehr denken wir uns eine Figur Φ, die aus irgendwelchen Punkten und gewissen ihrer Verbindungsgeraden besteht. Es sei genau angegeben, wieviel Punkte die Figur enthält, welche davon in gerader Linie liegen sollen und welche nicht, und welche Verbindungsgeraden gezeichnet sein sollen. Die Anzahl dieser Geraden sei n.

---

[1] In der auf S. 2, Fussnote, citierten Arbeit komme ich darauf ausführlicher zurück.

Wir nennen zwei Figuren, die auf Grund derselben Angaben gezeichnet sind, vorübergehend »gleichartige Figuren«. Beispielsweise sind zwei einfache Fünfecke, aber auch zwei vollständige Fünfecke, oder zwei Fünfecke mit den Diagonalen einer bestimmten Ecke *gleichartige* Figuren.

Wir schneiden die n Geraden der Figur Φ mit einer Geraden a in den n Punkten $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Diese projicieren wir von einem Punkte S auf eine zweite Gerade b, in die Punkte $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$. Ziehen wir nun durch den Schnittpunkt von a mit b eine Gerade s, die von a und b verschieden ist, und bilden diejenige Centralcollineation mit dem Centrum S und der Axe s, in der die a der b entspricht, so entsprechen den Punkten A_i die Punkte B_i und diese sind die Schnittpunkte von b mit den Geraden der zu Φ collinearen Figur Ψ, welche natürlich mit Φ gleichartig ist.

Es folgt also: Ist eine gerade Punktreihe $A_1, \ldots, A_n$ der Schnitt einer Figur Φ, so ist jede zu ihr projektivische Punktreihe der Schnitt einer gleichartigen Figur.

7. Im allgemeinen werden nicht alle Punkte A_i, die zu dem Schnitt einer Figur Φ gehören, beliebig sein. Ist eine Figur Φ so beschaffen, dass von einem ebenen Schnitt derselben nicht alle Punkte willkürlich gewählt werden dürfen, so wollen wir sagen, *zwischen den Schnittpunkten bestehe eine Verknüpfung.* Eine solche besteht beispielsweise *nicht* für die Schnittpunkte eines Dreiecks mit einer Geraden. Zu 3 beliebigen Punkten einer Geraden, kann vielmehr jederzeit ein Dreieck gezeichnet werden, dessen Seiten durch diese 3 Punkte gehen (vgl. § 4). Dagegen dürfen von den 6 Schnittpunkten eines vollständigen Vierecks blos 5, von denen eines vollständigen n-Ecks blos $2n - 3$ willkürlich angenommen werden.

8. Die Geraden der Figur Φ mögen mit a_1, a_2, a_3, bis a_n bezeichnet sein und die a in den Punkten A_1, A_2, A_3 bis A_n treffen. Es mögen sich ferner 3 Gerade, etwa a_1, a_2, a_3, darunter befinden, die nicht durch einen Punkt gehen, und deren Schnittpunkte der Figur angehören und durch weitere Gerade, a_4, a_5 bis a_λ mit anderen Punkten der Figur verbunden sind. Ist nun a mit den Punkten A_1 bis A_n bekannt, ferner a_1, a_2 und a_3, so können wir a_4 bis a_λ einzeichnen. Wir werden im allgemeinen unter den Schnittpunkten der a_1 bis a_λ untereinander neue Punkte

von $\varPhi$ vorfinden und durch dieselben neue Gerade $a_{\lambda+1}$ bis a_μ ziehen können, die wieder neue Punkte liefern. Werden auf diesem Wege nach und nach alle Stücke der Figur erchöpft, und bestimmt diese Figur zugleich eine Verknüpfung zwischen den Punkten A_i, so soll diese eine *projektive Verknüpfung* genannt werden. Das Bestehen einer Verknüpfung äussert sich dadurch, dass von einzelnen Geraden a_k, a_l, a_r, ... bei unserem Verfahren *zwei Punkte* ermittelt werden, so dass die Punkte A_k, A_l, A_r nicht willkürlich sind.

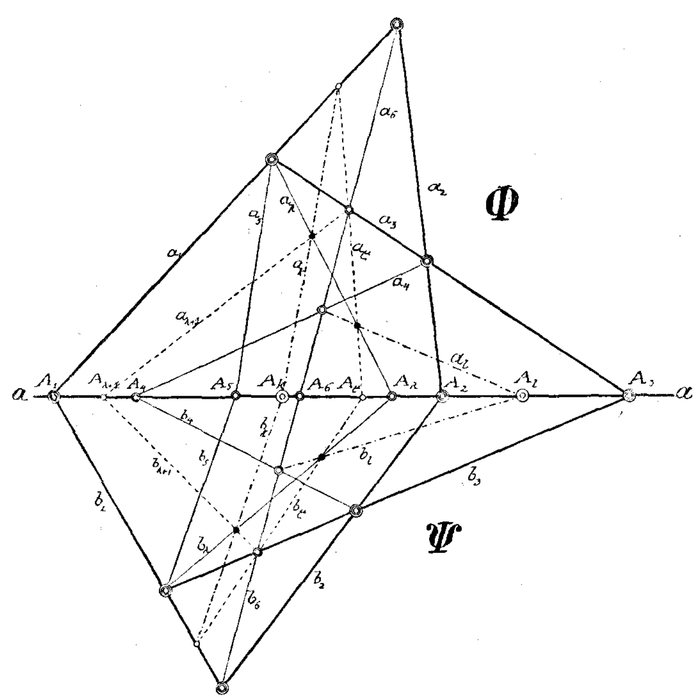

Fig. 1.

9. Wir wollen nunmehr beweisen, dass diese Punkte $A_k, A_l, A_r, \dots$ für eine projektive Verknüpfung von der speciellen Wahl der drei ersten Geraden a_1, a_2, a_3 unabhängig, also durch die willkürlichen Punkte $A_1, \dots,$ A_μ eindeutig bestimmt sind. Wir zeichnen eine zweite, gleichartige Figur $\varPsi$ mit den Geraden b_i in derselben Reihenfolge der Stücke durch dieselben Punkte $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Die drei Geraden b_1, b_2, b_3 durch A_1, A_2, A_3 bilden ein Dreieck, das mit dem Dreieck aus a_1, a_2, a_3 auf Grund des DESARGUES'schen Satzes centralcollinear gelegen ist. Denn die homologen

Seiten schneiden sich auf a, also gehen die Verbindungslinien homologer Ecken durch einen Punkt S.

In dieser durch $b_1 b_2 b_3$ bestimmten Collineation entsprechen die Geraden b_4 bis b_λ den Geraden a_4 bis a_λ, da die Ecken der Dreiecke $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$ sich untereinander und die Punkte A_4 bis A_λ als Punkte der Axe sich selbst entsprechen. Daher entsprechen auch die durch $b_1, \ldots, b_\lambda$ neu gefundenen Punkte von Ψ und hinwiederum die dadurch neu gefundenen Geraden $b_{\lambda+1}$ bis b_μ den homologen Stücken von Φ in unserer Collineation u. s. f. Speciell entspricht zuletzt b_k der a_k, und da sich entsprechende Gerade auf der Axe der Collineation schneiden, trifft b_k die a in dem Punkt A_k, *dessen Lage mithin von der speciellen Wahl der Geraden $a_1 a_2 a_3$ unabhängig ist*, w. z. b. w.

Indem wir das Resultat des § 6 beachten, folgt: *Besteht zwischen den Punkten A_1 bis A_n eine projektivische Verknüpfung, so besteht sie zwischen den Punkten jeder dazu projektivischen Punktreihe A'_1 bis A'_n.*

II. *Die Vierecksverknüpfung.*

10. Wir betrachten diejenige projektive Verknüpfung, die entsteht, wenn die Figur Φ ein vollständiges Viereck ist, und nennen sie *Vierecksverknüpfung.*[1] Sie besteht zwischen 6 Punkten einer Geraden und bestimmt den sechsten eindeutig aus den fünf anderen.

Im Anschlusse an die vorhergegangenen Betrachtungen greifen wir drei Seiten des Vierecks heraus, die sich in drei Ecken ABC des Vierecks $ABCD$ schneiden und bezeichnen sie (abweichend von der bisherigen Bezeichnung) mit a_1, b_1, c_1. Wir beachten, dass jede einem andern Paar Gegenseiten des Vierecks angehören muss, da sich zwei Gegenseiten nicht in einer Ecke des Vierecks schneiden. Die Gegenseiten DA, DB, DC seien bezw. mit a_2, b_2, c_2 bezeichnet. Werden die Schnittpunkte mit der

[1] Die Eigenschaften derselben sind von STAUDT als Ausgangspunkt seiner Geometrie der Lage gewählt und ohne die allgemeine Betrachtung des Abschnitts I direkt aus dem DESARGUES'schen Satze hergeleitet worden.

festen Geraden a mit den entsprechenden grossen Buchstaben benannt, so wollen wir die Verknüpfung durch das Symbol

$$(A_1 , A_2 ; B_1 , B_2 ; C_1 , C_2)$$

abkürzen.

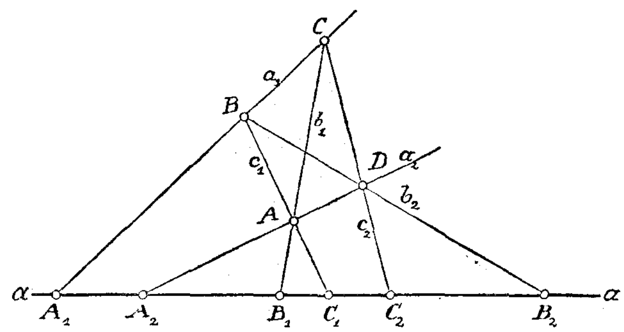

Fig. 2.

11. In diesem Symbol sind zweierlei Permutationen zulässig. Erstlich dürfen die Punktepaare beliebig mit einander vertauscht werden, aber ohne dass die Elemente eines Paares mit einander vertauscht werden. Dies folgt aus der Gleichberechtigung der drei Gegenseitenpaare.

Zweitens dürfen in zwei Punktepaaren die Elemente gleichzeitig vertauscht werden. Denn wenn sich a_1 , b_1 , c_1 in drei Ecken des Vierecks schneiden, so gilt das gleiche von a_2 , b_2 , c_1 ; a_2 , b_1 , c_2 und a_1 , b_2 , c_2. Dagegen schneiden sich a_2 , b_2 , c_2 in *einer* Ecke, ebenso a_2 , b_1 , c_1 ; a_1 , b_2 , c_1 ; a_1 , b_1 , c_2. Die Vertauschung der Elemente in einem oder allen drei Punktepaaren ist also unzulässig, sofern ihre Zulässigkeit nicht besonders erwiesen wird.

12. Denken wir uns zwei Punkte in der Vierecksverknüpfung veränderlich, so sagt das Bestehen der Verknüpfung aus, dass sie projektive Punktreihen beschreiben. Für uns kommt lediglich der Fall in Betracht, dass die veränderlichen Punkte verschiedenen Paaren angehören. Dann kann angenommen werden, dass es die Punkte B_2 , C_2 sind. Wir halten die Geraden a_1 , a_2 und b_1 fest und damit die Ecken A und C des Vierecks. Da C_1 fest ist, bleibt auch $AC_1 = c_1$, mithin auch B liegen. Bewegen sich jetzt B_2 und C_2, so bewegt sich D auf a_2 und wird von C und B

aus nach C_2 und B_2 projiciert; also beschreiben C_2 und B_2 projektive Punktreihen. Fällt D nach A, so fällt B_2 nach C_1, C_2 nach B_1. Fällt D in den Schnittpunkt von a_1 und a_2, so fallen C_2 und B_2 nach A_1; fällt D nach A_2, so fallen B_2 und C_2 nach A_2.

13. Im folgenden denken wir uns die Punkte A_1, A_2 und B_1 fest, so dass wir sie in der Bezeichnung nicht weiter anzudeuten brauchen. Wir schreiben dann abkürzungsweise

$$B_2 = (C_1 C_2)$$

um auszusprechen, dass die Verknüpfung

$$(A_1\,,\, A_2\,;\, B_1\,,\, B_2\,;\, C_1\,,\, C_2)$$

besteht. Die Bezeichnung ist eine provisorische.

Das Resultat des letzten Paragraphen kann dann so ausgesprochen werden:

V. *Bewegt sich ein Punkt X, so beschreiben die Punkte $Y = (CX)$ und $Y' = (XC)$ zu X projektive Punktreihen. Die Elemente A_1 und A_2 sind selbstentsprechende; fällt X nach B_1, so wird $Y = Y' = C$.*

Wir verallgemeinern dementsprechend unsere Bezeichnungsweise durch die Festsetzungen:

$$(A_1 X) = (X A_1) = A_1\,;$$

$$(A_2 X) = (X A_2) = A_2\,;$$

$$(B_1 X) = (X B_1) = X_1\,.$$

III. ***Das associative Gesetz.***

14. Es besteht das Gesetz:

$$(C_1(C_2 C_3)) = ((C_1 C_2) C_3)$$

welches wir rein formal, ohne einen Schnittpunktsatz zu Hülfe zu nehmen, auf Grund der bisherigen Entwickelungen beweisen können.

Zunächst konstruieren wir den Punkt $B_2 = (C_1 C_2)$ mit Hülfe eines Vierecks $ABCD$, von dem, wie bisher, die Seiten BC, CA, AB durch

A_1, B_1, C_1, die Seiten DA, DB, DC durch A_2, B_2, C_2 gehen. Sodann finden wir den Punkt $P = (B_2 C_3)$, indem wir die durch A_1, A_2 und B_2 gehenden Seiten beibehalten, folgendermassen: Wir ziehen $B_1 D$ bis zum Schnitt E mit $A_1 B$, EC_3 bis zum Schnitt F mit $A_2 D$. BF trifft a in $P = ((C_1 C_2) C_3)$.

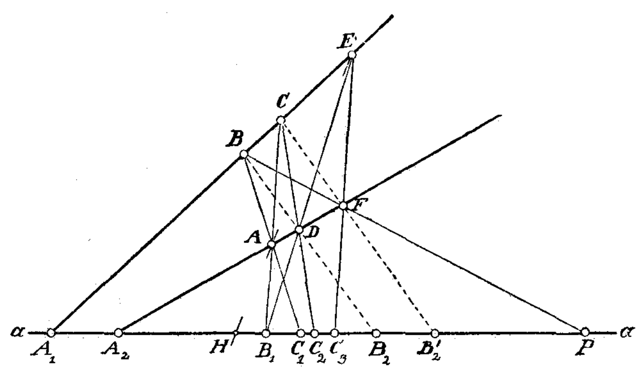

Fig. 3.

Trifft nun CF die a in B_2', so ergiebt das Viereck $CDEF$ die Verknüpfung $(A_1, A_2; B_1, B_2'; C_2, C_3)$ oder $B_2' = (C_2 C_3)$. Sodann folgt aus dem Viereck $ABCF$ die Verknüpfung

$$(A_1, A_2; B_1, P; C_1, B_2') \quad \text{oder} \quad P = (C_1 B_2') = (C_1 (C_2 C_3)).$$

Damit ist das associative Gesetz bewiesen.

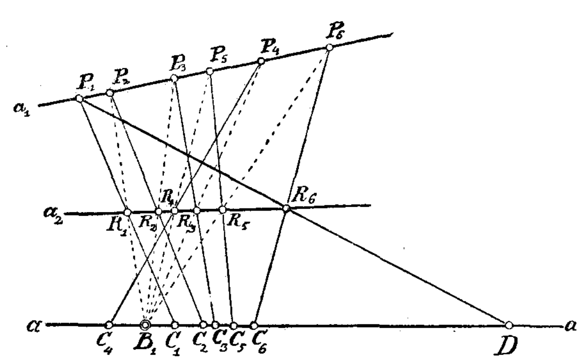

Fig. 4.

15. Figur 4 zeigt, wie der Punkt $D = (C_1 C_2 C_3 \ldots C_n)$ zu konstruieren ist. Man zieht durch C_1 einen beliebigen Strahl, der die a_1 in P_1,

die a_2 in R_1 schneiden möge. B_1R_1 schneide a_1 in P_2, C_2P_2 die a_2 in R_2, allgemein $B_1R_{\lambda-1}$ die a_1 in P_λ, $C_\lambda P_\lambda$ die a_2 in R_λ. P_1R_n trifft a in D.

Allgemeiner würde P_iR_k, wenn $k > i$ ist, die a im Punkte $(C_iC_{i+1}\ldots C_k)$ treffen. Die Konstruktion versagt nicht, wenn eines der C, etwa C_λ, mit B_1 identisch wird. Alsdann wird $R_{\lambda-1} = R_\lambda$, $P_\lambda = P_{\lambda+1}$ und die Konstruktion ändert sich nicht, wenn C_λ überhaupt fortgelassen wird.

16. Die »Auflösung« der symbolischen Gleichungen $(MX) = N$ und $(XM) = N$ nach X kann auf Grund des associativen Gesetzes in der bekannten Weise ausgeführt werden,[1] indem man einen Punkt $Y = (M^{-1})$ aus der Verknüpfung $(YM) = B_1$ oder

$$(A_1\,,\,A_2\,;\,B_1\,,\,B_1\,;\,Y\,,\,M)$$

konstruiert. Vertauscht man nach § 11 die Elemente im zweiten und dritten Paar, so entsteht die Verknüpfung $(A_1\,,\,A_2\,;\,B_1\,,\,B_1\,;\,M\,,\,Y)$ oder $(MY) = B_1$.

Hiermit folgt aus $(MX) = N$; $(YMX) = (YN)$ oder $(B_1X) = (YN)$ oder $X = (YN)$; ebenso $X = (NY)$ aus $(XM) = N$.

IV. *Das commutative Gesetz.*

17. *Das commutative Gesetz ist identisch mit dem Satz* IV (PASCAL'scher Satz), *also auf Grund der Sätze* I *bis* III *nicht zu beweisen.*

Das Bestehen der beiden symbolischen Gleichungen

$$B_2 = (C_1C_2) = (C_2C_1)$$

bedeutet die Existenz der beiden Verknüpfungen

$$(A_1\,,\,A_2\,;\,B_1\,,\,B_2\,;\,C_1\,,\,C_2) \quad \text{und} \quad (A_1\,,\,A_2\,;\,B_1\,,\,B_2\,;\,C_2\,,\,C_1).$$

Wir denken uns das zur ersten Verknüpfung gehörige Viereck mit den Bezeichnungen des § 10 gezeichnet und konstruieren das zur zweiten gehörige unter Beibehaltung der 3 Geraden a_1, a_2, b_1 also der Ecken A, C. An Stelle der Geraden $c_1 = AB$, $c_2 = DC$ treten jetzt $c_2' = AB'$, $c_1' = D'C$.

[1] Vgl. hierzu § 25 und 27.

Es ergiebt sich also B' als Schnitt von C_2A mit $a_1 = A_1C$, D' als Schnitt von C_1C mit $a_2 = A_2A$. B_2' ist der Schnitt von $B'D'$ mit a. Soll es mit $B_2 = (C_1C_2)$ zusammenfallen, so laufen die 3 Geraden BD, $B'D'$ und a durch einen Punkt.

Dann aber ist das Sechseck $ABDCD'B'$ ein PASCAL'sches, dessen Ecken abwechselnd auf zwei Geraden liegen und dessen Gegenseiten sich in Punkten $B_2C_1C_2$ einer Geraden schneiden. Die obige Behauptung ist damit erwiesen.

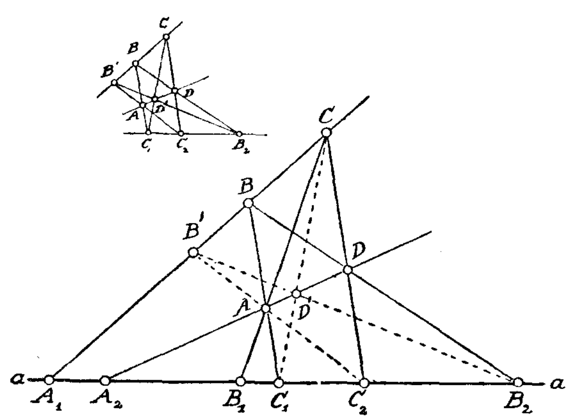

Fig. 5.

18. In speciellen Fällen kann eine Verknüpfung auch auf Grund des DESARGUES'schen Satzes commutativ sein. Der einfachste, bereits in § 16 angewandte Fall, tritt ein, wenn zwei Elemente eines Paares zusammenfallen. Denn dann kommt eine Permutation der Elemente dieses und eines zweiten Paares, die nach § 11 zulässig ist, auf eine alleinige Vertauschung der Elemente des zweiten Paares hinaus. Davon giebt es zwei Anwendungen:

VI. *Ist* $(C_1C_2) = B_1$, *so ist auch* $(C_2C_1) = B_1$.
VII. *Wenn* A_1 *und* A_2 *zusammenfallen, so ist allgemein* $(C_1C_2)=(C_2C_1)$.

Im Falle des Satzes VII wird aus Figur 5 ein PASCAL'sches Sechseck, dessen Existenz sich auf Grund unserer Entwickelungen aus dem DESARGUES'schen Satz ableiten lässt.[1]

[1] Vgl. meine Arbeit: *Über Beweise von Schnittpunktsätzen,* Archiv der Math. Bd. 3, Heft 1.

V. *Symbolischer Calcül und distributive Gesetze.*

19. Sind A_1 und A_2 von einander verschieden, so gleicht unsere Operation der Multiplication: Es giebt zwei Elemente A die durch die Operation (LA) bei beliebigem L in sich selbst übergehen. Wir legen daher A_1 das Zeichen ∞, A_2 das Zeichen 0 bei. B_1 spielt die Rolle der Einheit und werde daher mit 1 bezeichnet. An Stelle der Verknüpfung

$$(\infty\,, 0\,; 1\,, P\,; A\,, B)$$

schreiben wir von nun an symbolisch

$$P = AB.$$

Diese Operation ist associativ, aber nicht commutativ.

20. Fallen A_1 und A_2 zusammen, so gleicht unsere Operation der Addition, B_1 der Null. Wir bezeichnen daher $A_1 = A_2$ mit dem Zeichen ∞, B_1 mit 0 und schreiben für die Verknüpfung

$$(\infty\,, \infty\,; 0\,, S\,; A\,, B)$$

von nun an symbolisch

$$S = A + B.$$

Diese Operation ist associativ und commutativ.

21. Wir führen jetzt auf einer Geraden diese beiden Verknüpfungen mit denselben Fixpunkten ein, also

$$(\infty\,, 0\,; 1\,, P\,; A\,, B); \qquad P = AB,$$
$$(\infty\,, \infty\,; 0\,, S\,; A\,, B); \qquad S = A + B.$$

Dann sind beide durch die distributiven Gesetze verbunden. Nach Satz V ist nämlich die Punktreihe

$$\infty\,, 0\,, 1\,, A\,, B\,, S\,, X\,, \ldots$$

projektivisch zu den Punktreihen

$$\infty\,, 0\,, L\,, LA\,, LB\,, LS\,, LX\,, \ldots$$

und

$$\infty\,,\ \mathrm{o}\,,\ L\,,\ AL\,,\ BL\,,\ SL\,,\ XL\,,\ \ldots\,.$$

Da nun die Verknüpfung $S = A + B$ den Punkt 1 nicht enthält, andererseits eine projektivische ist, folgt aus

$$S = A + B, \quad \text{d. h.} \quad (\infty\,,\ \infty\,;\ \mathrm{o}\,,\ S;\ A\,,\ B)$$

sofort $LS = LA + LB$, nämlich

$$(\infty\,,\ \infty\,;\ \mathrm{o}\,,\ LS;\ LA\,,\ LB)$$

oder

$$L(A + B) = LA + LB$$

und analog

$$(A + B)L = AL + BL\,.$$

VI. *Der Ring aus 3 Verknüpfungen.*

22. Ein vollständiges Fünfeck $V_1 V_2 V_3 V_4 V_5$ schneidet mit seinen 10 Seiten $V_i V_k = v_{ik}$ eine Gerade a in 10 Punkten V_{ik} $(i\,,k = 1 \text{ bis } 5)$. Zwischen diesen bestimmt es 5 Vierecksverknüpfungen $\{\mathrm{I}\}$, $\{\mathrm{II}\}$ bis $\{\mathrm{V}\}$ entsprechend den fünf Vierecken (I), (II) bis (V), die durch Weglassen einer Ecke, V_1, V_2 bis V_5, aus ihm gebildet werden können.

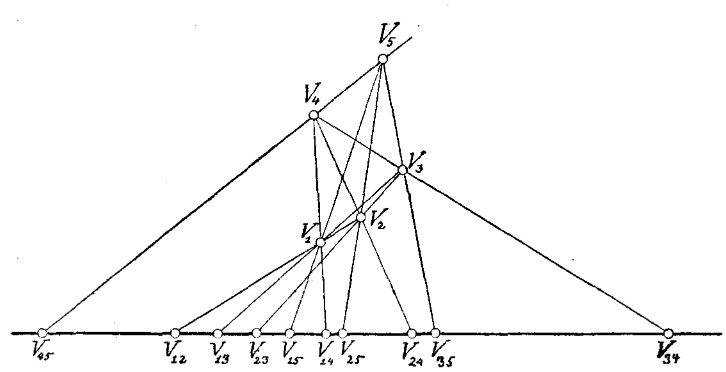

Fig. 6.

Die Verknüpfung $\{\mathrm{V}\}$ bestimmt aus 5 beliebig angenommenen der Punkte V_{ik} $(i\,,k = 1 \text{ bis } 4)$ den sechsten. Nimmt man weiterhin V_{15}

und V_{25} beliebig an, so hat man die Geraden $V_1 V_5$ und $V_2 V_5$ (falls das Viereck (V) gezeichnet ist), und mit diesen die Ecke V_5. Aus dem Viereck (III) findet man sodann V_{45}; besteht umgekehrt die Verknüpfung $\{III\}$, so geht $V_4 V_5$ durch V_{45}. Endlich geht $V_3 V_5$ durch V_{35}, wenn die Verknüpfung $\{II\}$ besteht.

Allgemein wird also das Bestehen dreier der Verknüpfungen hinreichend sein, damit die Punkte V_{ik} die Schnittpunkte eines vollständigen Fünfecks sind. *Je zwei der fünf Verknüpfungen sind daher Consequenzen der dritten*, in unserem speciellen Falle $\{I\}$ und $\{IV\}$ von $\{II\}$, $\{III\}$ und $\{V\}$

23. Wir betrachten nunmehr das specielle Fünfeck, welches entsteht, wenn V_1, V_2, V_3 in gerader Linie liegen. Unser Satz wird dann nicht mehr *bedingungslos* gelten, da die zwei Verknüpfungen $\{IV\}\{V\}$ durch das Zusammenfallen der Punkte V_{12}, V_{23}, V_{31}, d. h. die Degeneration der Vierecke (IV), (V) bedeutungslos werden. Aber unsere specielle Schluss-

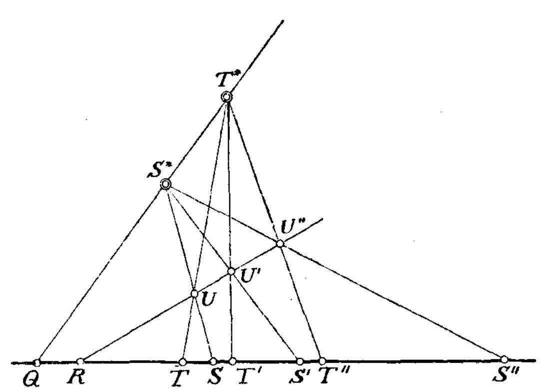

Fig. 7.

weise bleibt wörtlich gültig, und mit ihr die Folgerung, dass die *Verknüpfung* $\{I\}$ *eine Consequenz von* $\{II\}$ *und* $\{III\}$ *ist.* Die diesen Verknüpfungen entsprechenden Vierecke degenerieren nicht. Aus einer kleinen Abänderung der Bezeichnung wird zugleich die Symmetrie der Beziehung zwischen $\{I\}$, $\{II\}$, $\{III\}$ klar werden. Wir nennen diese, durch ein specielles Fünfeck vermittelte Beziehung zwischen drei Verknüpfungen einen *Ring* und sagen: *die drei Verknüpfungen* $\{I\}$, $\{II\}$, $\{III\}$ *bilden einen Ring.*

24. Wir ändern die Bezeichnungen V_4, V_5 in S^*, T^*; V_1, V_2, V_3 in U, U', U''; V_{45} in Q; $V_{12} = V_{23} = V_{31}$ in R; V_{41}, V_{42}, V_{43} in S, S', S''; V_{51}, V_{52}, V_{53} in T, T', T''. Alsdann lautet unser Satz:

VIII. *Von den drei Verknüpfungen*

$$(Q, R; S, T'; T, S'), \ (Q, R; S', T''; T', S''); \ (Q, R; S'', T; T'', S)$$

ist jede eine Consequenz der beiden andern.

Der Satz ist leicht direkt, ohne die allgemeine Betrachtung des § 22 an der Figur 7 zu beweisen, und zwar ohne Anwendung von Schnittpunktsätzen, rein formal, wie in der hier gegebenen Ableitung.

Macht man die Substitutionen

$$\frac{Q, R; S, S', S''; T, T', T''}{A_2, A_1; B_1, C_1, P_1; B_2, P_2, C_2}$$

so nimmt Satz VIII die Gestalt an

VIII$_a$. *Die drei Verknüpfungen*

$$(A_1, A_2; P_1, P_2; C_1, C_2); \ (A_1, A_2; B_1, P_2; C_1, B_2); \ (A_1, A_2; B_1, C_2; P_1, B_2)$$

bilden einen Ring.

Unter Verwendung der abgekürzten Bezeichnung des § 13:

VIII$_b$. *Die Verknüpfungen*

$$(A_1, A_2; P_1, P_2; C_1, C_2); \qquad P_2 = (C_1 B_2); \qquad C_2 = (P_1 B_2)$$

bilden einen Ring.

Nach Elimination von B_2 nach § 16:

VIII$_c$. *Die Verknüpfung*

$$(A_1, A_2; P_1, P_2; C_1, C_2) \ \textit{ist identisch mit} \ P_2 = (C_1 (P_1^{-1}) C_2)$$

(*Transformation des dritten Fixpunktes*).

25. Der § 16 selbst enthält bereits in den Verknüpfungen

$$(XM) = N, \qquad (MY) = B_1, \qquad X = (NY),$$

einen Ring, der aus VIII_b durch die Specialisierung $P_2 = B_1$ und die Substitutionen

$$P_1 = N, \qquad B_2 = Y, \qquad C_1 = M, \qquad C_2 = X$$

hervorgeht. Die Existenz des Elementes $Y = (M^{-1})$ folgt also direkt aus Satz VIII, ohne die Betrachtungen des Abschnittes III.

Anmerkung. Unter Beachtung dieser Thatsache kann man das associative Gesetz aus Satz VIII ableiten. Ersetzt man, wie eben gezeigt war, die Verknüpfungen des § 14

$$(A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2) \quad \text{bezw.} \quad (A_1, A_2; B_1, B_2'; C_2, C_3)$$

durch

$$(A_1, A_2; B_1, B_1; C_2, H) \text{ (vgl. Fig. 3),}$$

und

$$(A_1, A_2; B_1, C_1; B_2, H) \quad \text{bezw.} \quad (A_1, A_2; B_1, C_3; H, B_2')$$

so folgt hieraus und aus

$$(A_1, A_2; B_1, P; B_2, C_3) \quad \text{bezw.} \quad (A_1, A_2; B_1, P'; C_1, B_2')$$

auf Grund des Satzes VIII [1]

$$(A_1, A_2; H, P; C_1, C_3) \quad \text{bezw.} \quad (A_1, A_2; H, P'; C_1, C_3),$$

also $P = P'$, da die Vierecksverknüpfung jedes Element aus den 5 andern eindeutig bestimmt.

26. Die Eigenschaften des Ringes geben uns ein Mittel an die Hand, um aus einer Verknüpfung eine andere abzuleiten, in der zwei Elemente ein Paar bilden, die in der ersten getrennt waren.

Es sei durch geeignete Permutationen bewirkt, dass die getrennten und zu vereinigenden Elemente an vierter und fünfter Stelle stehen. Sie seien mit A und B bezeichnet und unsere Verknüpfung laute

$$(V, U; E, A; B, F) \qquad [= (U, V; A, E; B, F)].$$

---

[1] Man mache die Substitutionen

$$\frac{Q, R; S, S', S''; T, T', T''}{A_1, A_2; C_1, B_2, P; H, B_1, C_3} \quad \text{bezw.} \quad \frac{Q, R; S, S', S''; T, T', T''}{A_2, A_1; C_3, B_1', P'; H, B_1, C_1}.$$

Wir führen sie über in

$$(V, U; A, B; F', E) \qquad [= (U, V; A, B; E, F')]$$

nach VIII und durch die Substitution

$$\frac{Q, R; S, S', S''; T, T', T''}{V, U; E, F, A; B, A, F'};$$

als mittelste der Relationen VIII ergiebt sich:

$$(V, U; F, F'; A, A) \qquad [= (U, V; A, A; F', F)].$$

Aus den eingeklammerten Umschreibungen ersieht man leicht folgende Regel:

IX. *Um B mit A zusammenzubringen, lasse man das weder B noch A enthaltende Paar unverändert, vertausche B mit dem zu A gehörenden Element E und ersetze das letzte Element F durch ein neues F', welches aus einer dritten Verknüpfung zu entnehmen ist.*

Diese wird so gebildet: Das von A und B freie Paar lasse man stehen; das zweite Paar entsteht durch Verdoppelung von A. Das dritte besteht aus denjenigen Elementen, die zuletzt übrig bleiben, wenn man die vertauschten Elemente (B und E) auch noch ausscheidet, — dass sind F und F'.

27. Als Beispiel wählen wir nochmals die Auflösung der Gleichung $B_2 = (C_1 C_2)$ nach C_1.

Es ist in der Relation

$$(A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2)$$

C_1 an die Stelle von B_2 zu bringen, da es mit B_1 ein Paar bilden soll. Wir vertauschen es mit B_2 und schreiben C_2' für C_2 (erste Hälfte der Regel):

$$(A_1, A_2; B_1, C_1; B_2, C_2').$$

C_2' ergiebt sich, indem man A_1, A_2 stehen lässt, B_1 verdoppelt, die vertauschten (B_2 und C_1) ausscheidet und die übrigbleibenden, — C_2 und C_2' — als drittes Paar wählt (zweite Hälfte der Regel):

$$(A_1, A_2; B_1, B_1; C_2, C_2').$$

Dies sind die drei Relationen

$$B_2 = (C_1 C_2), \qquad C_1 = (B_2 C_2'), \qquad (C_2 C_2') = B_1 .$$

VII. *Coordinaten, Gleichung der Geraden.*

28. Projiciert man einen Punkt P der Ebene auf zwei verschiedenen Wegen auf dieselbe Gerade a, so sollen diese Projektionen X und Y die Coordinaten des Punktes heissen. Führt man auf a einen Calcül ein, so kann man nach der Relation fragen, die zwischen X und Y besteht, wenn sich P auf einer Geraden bewegt.

Wir wählen als einfachste sich bietende Methode die direkte Projektion aus zwei verschiedenen Centren Ξ und H; ΞP treffe a in X, HP treffe sie in Y. Ausserdem sei der Schnitt von $H\Xi$ mit a durch U bezeichnet. Wenn X und Y nicht beide nach U fallen, ist P eindeutig bestimmt und liegt nicht auf ΞH. Die Punkte von ΞH müssen also vorläufig als ausgeschlossen betrachtet werden.

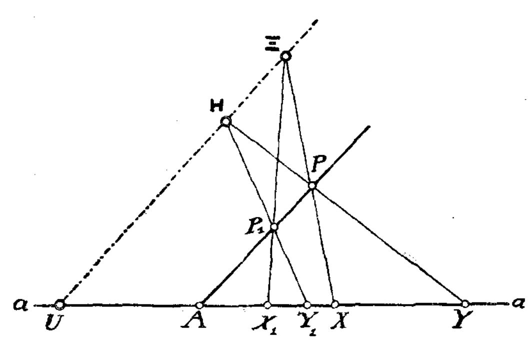

Fig. 8.

29. Schneidet die Gerade PP_1 die a in A, und sind $X_1 Y_1$ die Coordinaten von P_1, so folgt aus dem Viereck ΞHPP_1 die Verknüpfung

$$(U, A; X_1, Y; Y_1, X),$$

die die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass P auf AP_1 liegt.

Da allen diesen Verknüpfungen das Element U gemeinsam ist, empfiehlt es sich, dasselbe als Fixpunkt des Calcüls zu wählen, am besten als

∞, da dieser in der Addition und Multiplikation an erster Stelle steht, während die Rollen von o und 1 in beiden Operationen von Grund aus verschieden sind.

Es handelt sich jetzt darum, die Verknüpfung

$$(U, A; X_1, Y; Y_1, X)$$

durch die speciellen unseres Calcüls, in dem die Elemente o und 1 irgendwie angenommen seien, auszudrücken.

30. **Erster Fall**: A falle nach o. Wir schreiben nach Satz VIII$_c$ sofort hin:

$$Y = Y_1 X_1^{-1} X = EX$$

wenn $E = Y_1 X_1^{-1}$ gesetzt wird.

Wie man sieht ist E die Y-Coordinate desjenigen Punktes, für den X in den Einheitspunkt fällt. Man hätte diesen Punkt als P_1 wählen können, wodurch die Verknüpfung sofort die Gestalt

$$(\infty, 0; 1, Y; E, X) \quad \text{oder} \quad Y = EX$$

angenommen hätte.

31. **Zweiter Fall**: A falle nicht nach o. Die Y-Coordinate desjenigen Punktes, für den X nach o fällt, sei N. Wir wählen diesen Punkt als P_1 und erhalten:

$$(\infty, A; 0, Y; N, X).$$ [1]

Wir vertauschen nach Satz IX o mit A

(1) $$(\infty, 0; A, Y'; N, X)$$

und erhalten nach demselben Satz für Y':

(2) $$(\infty, \infty; Y, Y'; N, X).$$

Für (1) schreiben wir nach VIII$_c$

$$Y' = NA^{-1}X$$

[1] Fällt A nach ∞, so enthält man $Y = N + X$; dies entspricht einer Festsetzung $A^{-1} = 0$ im Endresultat.

und für (2) nach demselben Satz:

$$Y' = N - Y + X.$$

Damit ergiebt sich nach Elimination von Y':

$$\begin{aligned} Y &= (1 - NA^{-1})X + N \\ &= EX + N \quad \text{für} \quad E = 1 - NA^{-1}. \end{aligned}$$

Also ist die Gleichung der Geraden stets vom ersten Grade und die Coefficienten stehen links von den Coordinaten.

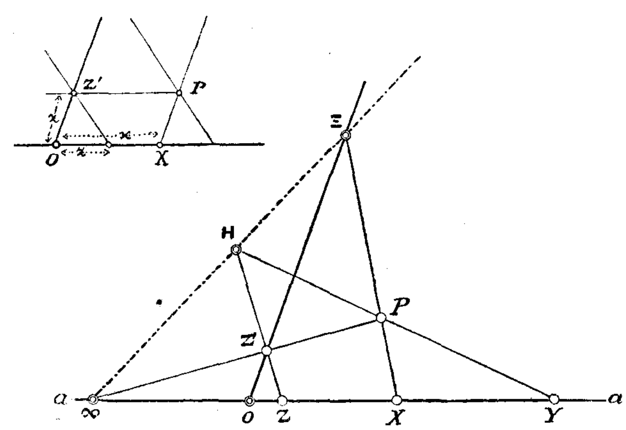

Fig. 9.

32. Zieht man die Gerade Ξo, projiciert P von ∞ auf dieselbe nach Z' und Z' von H nach Z auf a, so erhält man die projektive Verallgemeinerung des von Herrn Hilbert benutzten, dem cartesischen analogen Systems. Zwischen Z, X, Y findet man aus dem Viereck $Z'P\Xi H$ sofort die Verknüpfung

$$(\infty, \infty; 0, Y; X, Z)$$

oder

$$Y = Z + X.$$

Danach wird die Gleichung der Geraden in X und Z

$$\begin{aligned} Z + X &= (1 - NA^{-1})X + N, \\ Z &= E'X + N \quad \text{für} \quad E' = -NA^{-1} \end{aligned}$$

also wieder vom ersten Grade.

Hieran kann, fast mit den Worten des Herrn HILBERT, der Beweis angeschlossen werden, dass eine ebene Geometrie, in der die Sätze (I), (II), (III) gelten, als Teil einer räumlichen aufgefasst werden kann, in der die räumlichen Axiome der Verknüpfung in der bekannten Erweiterung durch ideale Elemente gültig sind, und in der es fünf Punkte giebt von denen keine 4 in einer Ebene liegen (cf. § 4).

VIII. *Gleichung der Vierecksverknüpfung.*

33. Wir lösen noch die Aufgabe, mit Hülfe unseres Calcüls die Bedingung dafür aufzustellen, dass zwischen 6 Punkten die Verknüpfung $(A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2)$ bestehe. Wir zeichnen ein Viereck $ABCD$, das

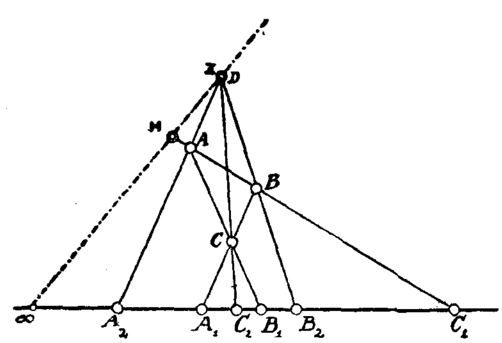

Fig 10.

in gewohnter Weise die Verknüpfung ergiebt, wählen D als Ξ und den Schnittpunkt von $\Xi\infty$ mit AB als H. Danach ergeben sich sofort 5 von den 6 Coordinaten der Punkte ABC. Nämlich:

$$X_a = A_2, \qquad Y_a = C_1,$$
$$X_b = B_2, \qquad Y_b = C_1,$$
$$X_c = C_2.$$

Um Y_c zu finden, giebt es zwei Wege: Man stellt die Gleichungen der durch C gehenden Geraden a_1 und b_1 auf:

$$Y = E_a X + N_a, \qquad Y = E_b X + N_b$$

und wählt $X = X_c = C_2$. Die Vergleichung beider Ausdrücke für Y liefert die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Verknüpfung.

34. a_1 geht durch A_1; für diesen Punkt ist $X = Y = A_1$, also

$$A_1 = E_a A_1 + N_a, \qquad N_a = -(E_a - 1) A_1.$$

Damit wird die Gleichung von a_1 zu

$$Y = E_a X - (E_a - 1) A_1$$

oder

$$Y - X = (E_a - 1)(X - A_1) = F_a (X - A_1).$$

Setzt man hierin die Coordinaten von B ein, so erhält man für F_a

$$F_a = -(B_2 - C_1)(B_2 - A_1)^{-1},$$

also

$$Y_c - X_c = -(B_2 - C_1)(B_2 - A_1)^{-1}(C_2 - A_1)$$

und aus der Gleichung für b_1 folgt analog

$$Y_c - X_c = -(A_2 - C_1)(A_2 - B_1)^{-1}(C_2 - B_1).$$

Durch Gleichsetzen ergiebt sich die in jedem ihrer Elemente lineare Bedingung

$$(A_2 - C_1)(A_2 - B_1)^{-1}(C_2 - B_1)(C_2 - A_1)^{-1}(B_2 - A_1)(B_2 - C_1)^{-1} = 1.$$

35. Fällt einer der Punkte nach ∞, so hat man die beiden Faktoren, in denen es auftritt, fortzulassen.[1] Fällt beispielsweise A_2 nach ∞, so kann man wieder D nach Ξ, zugleich aber auch A nach H legen. Dadurch wird

$$X_b = B_2, \qquad X_c = C_2, \qquad Y_b = C_1, \qquad Y_c = B_1,$$

[1] Dies ist bei Zulässigkeit von Stetigkeitsbetrachtungen sofort klar. Der Ausdruck

$$(A_2 - C_1)(A_2 - B_1)^{-1} = (1 - C_1 A_2^{-1})(1 - B_1 A_2^{-1})^{-1}$$

geht für $A_2 = \infty$ in den Wert 1 über.

und die Gleichung der Geraden A_1BC hat die Form

$$Y - X = F(X - A_1)$$

aus der sich nach Einsetzen der speciellen Wertsysteme und Elimination von F die Relation ergiebt

$$(C_2 - B_1)(C_2 - A_1)^{-1}(B_2 - A_1)(B_2 - C_1)^{-1} = 1.$$

Fallen zwei Punkte nach ∞, so kann die Gleichung der Verknüpfung mittelst der Sätze VIII sofort hingeschrieben werden.

---

36. Die Punkte einer Geraden bilden unter Ausschluss des Punktes ∞ ein *complexes Zahlensystem* im Sinne des Herrn Hilbert:[1] Es fehlen die Gesetze der Anordnung, der Stetigkeit und das commutative Gesetz der Multiplication. Die Rolle der beiden letzteren hat Herr Hilbert durch seine »Nicht-Archimedische» und ›Nicht-Pascalsche› Geometrie klargestellt.

In der Geometrie der reinen Schnittpunktsätze (Geometrie der Lage im Sinne Staudts) sind die Anordungssätze scheinbar unwesentlich: Aus den Lehrsätzen verschwinden sie nach der Einführung imaginärer Elemente gänzlich; bei den Beweisen sind sie nur hin und wieder notwendig. Auf ihre Bedeutung für diesen Zweig der Geometrie beabsichtige ich in einer zweiten Arbeit zurückzukommen.

August 1901.

---

[1] *Grundlagen der Geometrie,* § 13.