ZUR KENNTNISS DER KREISPUNKTE

VON

ALLVAR GULLSTRAND
in UPSALA.

Um die Constitution des im Auge gebrochenen Strahlenbündels kennen zu lernen hatte ich nöthig das Normalenbündel unter Hinzuziehung von Differentialquotienten der Flächengleichung bis einschliesslich der vierten Ordnung zu untersuchen. Da diese Untersuchungen auch die Normalenbündel eines Flächenelementes, auf welchem sich ein Kreispunkt befindet, umfassen mussten, haben sie zu Ergebnissen geführt, welche vielleicht auch für den Mathematiker vom Fache Interesse haben können.

Die folgende Darstellung ist zum grössten Theile ein Résumé von den das Flächenelement betreffenden Resultaten der an anderer Stelle ausführlich publicirten Untersuchung; doch habe ich die Untersuchung der Kreispunkte hier, wo der rein mathematische Gesichtspunkt ausschlaggebend ist, in gewissem Grade verallgemeinert, während ich mich dort auf das für den speciellen Zweck nöthige Gebiet beschränkt habe.

Von den Kreispunkten hatte man damals keine andere Kenntnisse als die Angabe von Darboux,[1] nach welcher für den Fall, wo sämmtliche Differentialquotienten dritter Ordnung der Flächengleichung von Null verschieden sind, die Zahl und Richtung der in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinien gefunden werden können, und, wie ich später erfahren habe, eine Untersuchung einer speciellen Kreispunktsform von Frost,[2] zu welcher Cayley[3] eine Bemerkung gefügt hat.

---

[1] *Théorie des surfaces.* T. II, S. 357—359.

[2] *On the direction of lines of curvature in the neighbourhood of an umbilicus.* The quarterly journal of pure and applied mathematics, X, 1870, S. 78.

[3] Ibid. S. 111.

Zwar hatte schon längst LIOUVILLE [1] eine schöne Zeichnung von den Krümmungslinien eines Ellipsoides gegeben, aus welcher ersichtlich ist, dass in die auf solchen vorkommenden Kreispunkte nur eine Krümmungslinie eintreten kann, aber dennoch scheint die Ansicht allgemein geherrscht zu haben, dass von allen Seiten her Krümmungslinien in einen Kreispunkt eintreten, wie z. B. eine Stelle bei PICARD [2] andeutet.

Die neueren Arbeiten über die durch eine Differentialgleichung bestimmten Curven waren noch nicht auf die Krümmungslinien der Fläche angewendet worden.

Seit dem Erscheinen meiner Abhandlung [3] hat aber WAHLGREN [4] gezeigt, dass die Untersuchung der singulären Punkte der Krümmungslinien auf eine Untersuchung von Differentialgleichungen ersten Grades zurückgeführt werden kann, für welche Untersuchung schon früher BENDIXSON [5] die Mittel angegeben hatte.

August 1902.

I. Das allgemeine Flächenelement.

Es sei in einem rechtwinkligen Coordinatensysteme, in welchem der positive Theil der Z-Achse nach vorn vom Anfangspunkt belegen ist, wenn die entsprechenden Theile der X- und Y-Achse nach rechts bezw. nach oben liegen, die Flächengleichung

$$z = px + qy + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \frac{1}{6}(ux^3 + 3vx^2y + 3wxy^2 + uy^3)$$
$$+ \frac{1}{24}(\partial^{40}x^4 + 4\partial^{31}x^3y + 6\partial^{22}x^2y^2 + 4\partial^{13}xy^3 + \partial^{04}y^4) + \dots$$

und es werde eine Krümmung als positiv bezeichnet, wenn das Curvenstück

[1] In seiner Ausgabe von MONGE, *Application de l'analyse à la géométrie*, Paris 1850.

[2] *Traité d'analyse*, T. III, S. 225.

[3] *Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie*, Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups., Ser. III, 1900. Separat im Buchhandel zugänglich.

[4] *Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre et du second degré*, Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handlingar, Bd. 28, Ser. I, N° 4.

[5] *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta math., T. 24.

die concave Seite nach der betreffenden positiven Richtung kehrt, eine Torsion, wenn die Curve im Sinne einer Schraube rechtsgedreht ist, d. h. wenn, x als unabhängige Variabele angesehen, im Coordinatensysteme $dz = dy = d^2y = 0$ das Produkt $d^2z\,d^3y\,dx$ positives Vorzeichen hat.

Die Hauptkrümmungen werden so bezeichnet, dass im Coordinatensysteme $p = q = s = 0$ die Beziehungen

$$D_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\rho_{\mathrm{I}}} = r, \qquad D_{\mathrm{II}} = \frac{1}{\rho_{\mathrm{II}}} = t$$

gelten.

Für die Ableitungen der Hauptkrümmungen nach den Bogenlängen σ_{I} bezw. σ_{II} der Hauptkrümmungslinien wende ich folgende Bezeichnungen an:

$$\frac{dD_{\mathrm{I}}}{d\sigma_{\mathrm{I}}} = U, \qquad \frac{dD_{\mathrm{I}}}{d\sigma_{\mathrm{II}}} = V, \qquad \frac{dD_{\mathrm{II}}}{d\sigma_{\mathrm{I}}} = W, \qquad \frac{dD_{\mathrm{II}}}{d\sigma_{\mathrm{II}}} = \mathfrak{W}$$

und nenne U bezw. $\mathfrak{W}$ die directe Krümmungsasymmetrie längs der bezüglichen Hauptkrümmungslinie, W bezw. V die transversale Krümmungsasymmetrie längs der ersten bezw. zweiten Hauptkrümmungslinie.

Diese Asymmetrienwerthe, welche von einander unabhängig sind, bestimmen zusammen mit den Hauptkrümmungen und den Richtungscosinus der Normale sämmtliche Differentialquotienten der Flächengleichung bis einschliesslich der dritten Ordnung und umgekehrt. Im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ gelten die einfachen Beziehungen

$$U = u, \qquad V = v, \qquad W = w, \qquad \mathfrak{W} = \mathfrak{w}.$$

Die geodätischen Krümmungen der beiden Hauptkrümmungslinien sind durch folgende allgemeingiltige Relationen gegeben

$$VR_{\mathrm{I}} = D_{\mathrm{I}} - D_{\mathrm{II}} = -WR_{\mathrm{II}}$$

wobei R_{I} bezw. R_{II} die bezüglichen Krümmungshalbmesser sind.

Für die Winkel ϑ_{I} bezw. ϑ_{II} zwischen den Hauptnormalen der bezüglichen Krümmungslinien und der Flächennormale, welche positiv gerechnet werden, wenn im Coordinatensysteme $p = q = s = 0$ die betreffende Hauptnormale sich zwischen den positiven Theilen der bezüglichen Coordinatenachsen befindet, gilt:

$$\operatorname{tg}\vartheta_{\mathrm{I}} = \frac{\rho_{\mathrm{I}}}{R_{\mathrm{I}}} = \frac{V}{D_{\mathrm{I}}(D_{\mathrm{I}} - D_{\mathrm{II}})}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta_{\mathrm{II}} = \frac{\rho_{\mathrm{II}}}{R_{\mathrm{II}}} = -\frac{W}{D_{\mathrm{II}}(D_{\mathrm{I}} - D_{\mathrm{II}})}$$

und die ersten Krümmungshalbmesser der beiden Hauptkrümmungslinien sind:

$$\rho' = \rho_1 \cos\vartheta_1 = R_1 \sin\vartheta_1, \qquad \rho'' = \rho_{11} \cos\vartheta_{11} = R_{11} \sin\vartheta_{11}.$$

Von den beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche sei diejenige die erste oder σ'-Schale genannt, welche von der zweiten Hauptnormalebene der Fläche berührt wird, und in welcher die Kantlinie der ersten, d. h. der von den Flächennormalen längs der ersten Krümmungslinie gebildeten, abwickelbaren Normalfläche eine geodätische Linie ist.

Bogenelement $d\sigma_1'$ und Krümmungshalbmesser R' dieser Kantlinie oder σ_1-Linie der σ'-Schale sind:

$$d\sigma_1' = -\frac{U}{D_1^2} d\sigma_1, \qquad R' = \frac{U}{D_1^3}$$

ihre rectificirende Linie ist die Polare der ersten Hauptkrümmungslinie mithin ihre rectificirende Fläche die abwickelbare Polarfläche dieser, ihre Torsion ist:

$$T' = \frac{D_1^2 V}{U(D_1 - D_{11})} = \frac{\rho_1}{R_1 R'} = \frac{\operatorname{tg}\vartheta_1}{R'}.$$

Die Berührungslinie zwischen der ersten Evolutenschale und der zweiten abwickelbaren Normalfläche, die σ_{11}-Linie der σ'-Schale hat das Bogenelement

$$d\sigma_{11}' = \frac{1}{D_1^2}\sqrt{V^2 + D_1^2(D_1 - D_{11})^2}\, d\sigma_{11} = \frac{D_1 - D_{11}}{D_1 \cos\vartheta_1} d\sigma_{11}.$$

Diese Linie wird von der Polare der ersten Krümmungslinie der Fläche berührt, so dass die σ_1- und σ_{11}-Linien der Evolute conjugirte Liniensysteme bilden.

Die Normalschnittkrümmung der σ'-Schale längs der σ_{11}-Linie ist:

$$-\frac{D_1 W \cos^2\vartheta_1}{(D_1 - D_{11})^2}.$$

Für die zweite Evolutenschale gelten die analogen Werthe, nur hat die Torsion der Kantlinie in diesem System entgegengesetztes Vorzeichen.

Für weitere Untersuchungen benütze ich die Ableitungen zweiter Ordnung der Hauptkrümmungen sowie die ersten Ableitungen der geodätischen Krümmungen der Hauptkrümmungslinien laut folgender Bezeichnungen

$$\frac{d^2 D_1}{d\sigma_1^2} = \Phi', \qquad \frac{d}{d\sigma_1}\frac{1}{R_1} = \Psi', \qquad \frac{d^2 D_1}{d\sigma_{11}^2} = \Omega',$$

$$\frac{d^2 D_{11}}{d\sigma_1^2} = \Omega'', \qquad \frac{d}{d\sigma_{11}}\frac{1}{R_{11}} = \Psi'', \qquad \frac{d^2 D_{11}}{d\sigma_{11}^2} = \Phi''$$

und nenne Φ' bezw. Φ'' die direkte Abflachung längs der bezüglichen Krümmungslinie, Ω'' bezw. Ω' die transversale Abflachung längs der ersten bezw. zweiten Krümmungslinie, während Ψ' und Ψ'' lediglich die geodätischen Krümmungsasymmetrien sind.

Diese sechs Werthe bestimmen zusammen mit den Krümmungsasymmetrien, den Hauptkrümmungen und den Richtungscosinus der Normale sämmtliche Differentialquotienten der Flächengleichung bis einschliesslich der vierten Ordnung und umgekehrt.

Mit Ausnahme der zwischen den beiden transversalen Abflachungen bestehenden Relation

$$\Omega' - \Omega'' = D_1 D_{11}(D_1 - D_{11}) + \frac{V(2V - W) - W(U - 2W)}{D_1 - D_{11}}$$

sind sie von einander unabhängig. Im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ ergeben sie sich aus folgenden Beziehungen:

$$\Phi' = \partial^{40} - 3r^3 + \frac{3v^2}{r - t}, \qquad \Omega'' = \partial^{22} - r^2 t - \frac{v(2v - w)}{r - t},$$

$$\Psi' = \frac{\partial^{31}}{r - t} - \frac{v(2u - 3w)}{(r - t)^2}, \qquad \Psi'' = -\frac{\partial^{13}}{r - t} + \frac{w(3v - 2w)}{(r - t)^2},$$

$$\Omega' = \partial^{22} - rt^2 - \frac{w(u - 2w)}{r - t}, \qquad \Phi'' = \partial^{04} - 3t^3 - \frac{3w^2}{r - t}$$

und es sind die übrigen Ableitungen derselben Ordnung:

$$\frac{dU}{d\sigma_{11}} = (D_1 - D_{11})\Psi' + \frac{2UV}{D_1 - D_{11}}, \qquad \frac{dW}{d\sigma_1} = -(D_1 - D_{11})\Psi'' - \frac{2WW}{D_1 - D_{11}},$$

$$\frac{dV}{d\sigma_1} = (D_1 - D_{11})\Psi' + \frac{V(U - W)}{D_1 - D_{11}}, \qquad \frac{dW}{d\sigma_{11}} = -(D_1 - D_{11})\Psi'' + \frac{W(V - W)}{D_1 - D_{11}},$$

$$\frac{d}{d\sigma_{11}}\frac{1}{R_1} = \frac{\Omega'}{D_1 - D_{11}} - \frac{V(V - W)}{(D_1 - D_{11})^2}, \qquad \frac{d}{d\sigma_1}\frac{1}{R_{11}} = -\frac{\Omega''}{D_1 - D_{11}} + \frac{W(U - W)}{(D_1 - D_{11})^2}$$

aus welchen letztgenannten Werthen unmittelbar das bekannte Gesetzt von LIOUVILLE:

$$\frac{d}{d\sigma_{11}}\frac{1}{R_1}+\frac{d}{d\sigma_1}\frac{1}{R_{11}}=D_1D_{11}+\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_{11}^2}$$

hervorgeht.

Die geometrische Bedeutung der Abflachungswerthe ist leicht darzustellen, wenn die Krümmungsasymmetrien gleich Null sind. Wenn direkte Abflachung und Hauptkrümmung verschiedenes Vorzeichen haben, mithin ein numerisches Maximum der Krümmung im gegebenen Punkte sich vorfindet, so ist $-\frac{\Phi}{D^3}$ das Quadrat der Excentricität derjenigen conischen Section, welche eine Berührung vierter Ordnung mit dem bezüglichen Hauptschnitte hat. Liegt aber ein numerisches Minimum der Krümmung vor, ist $\frac{\Phi}{\Phi+D^3}$ das Quadrat der Excentricität der Ellipse, welche im Punkte kleinster Krümmung eine Berührung vierter Ordnung mit dem bezüglichen Hauptschnitte hat. Sind auch die geodätischen Krümmungsasymmetrien gleich Null, und besteht die Identität

$$\frac{\Phi'}{D_1^2}+\frac{\Phi''}{D_{11}^2}=\frac{3(\Omega'+\Omega'')}{D_1D_{11}}$$

so stellen die in unendlich kleinem Abstande vom fraglichen Punkte parallel zur Tangentialebene geführten Schnitte der Fläche bis auf unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung als der vierten Ellipsen dar. Haben bei positiven Werthen der Hauptkrümmungen die transversalen Abflachungen höhere Werthe, als durch diese Relation angegeben wird, so ist das Flächenelement in den diagonalen Richtungen zwischen den Hauptnormalebenen relativ mehr zusammengebogen als ein solches, in welchem ein in der Nähe des Scheitelpunktes parallel zur Tangentialebene gelegter Schnitt eine Ellipse darstellt. Im entgegengesetzten Falle ist es in den genannten Richtungen relativ mehr ausgebogen. Eine vollständige Berührung vierter Ordnung mit dem Scheitelpunkte einer Fläche zweiten Grades erfordert das Bestehen der Beziehungen:

$$\frac{\Phi'}{D_1}=\frac{3\Omega''}{D_{11}},\qquad \frac{\Phi''}{D_{11}}=\frac{3\Omega'}{D_1}.$$

Aus den geodätischen Krümmungsasymmetrien erhält man die Torsion T_1 bezw. T_{11} der Hauptkrümmungslinien auf folgende Weise:

$$T_1 = \frac{\cos^2\vartheta_1}{D_1}(\Psi' - U\operatorname{tg}\vartheta_1), \qquad T_{11} = -\frac{\cos^2\vartheta_{11}}{D_{11}}(\Psi'' - W\operatorname{tg}\vartheta_{11}).$$

Das Centrum der osculirenden Sphäre der ersten Hauptkrümmungslinie ist der Berührungspunkt zwischen der Polare und der Kantlinie der abwickelbaren Polarfläche, mithin für parallelflächen gemeinsam. Wenn der Abstand dieses Centrums von dem ersten Krümmungsmittelpunkt der Fläche mit l_1 bezeichnet wird, und l_{11} dieselbe Bedeutung für die zweite Hauptkrümmungslinie hat, so gelten die Beziehungen:

$$\frac{1}{l_1} = -\frac{D_1\cos\vartheta_1}{U}(\Psi' - U\operatorname{tg}\vartheta_1), \qquad \frac{1}{l_{11}} = -\frac{D_{11}\cos\vartheta_{11}}{W}(\Psi'' - W\operatorname{tg}\vartheta_{11}).$$

Wird die erste abwickelbare Normalfläche auf eine Ebene ausgebreitet, und der Krümmungshalbmesser ihrer Evolute mit A' bezeichnet, so ist

$$A' = -R'\frac{dR'}{d\sigma_1'} = \frac{\Phi'}{D_1^4} - \frac{3U^2}{D_1^5}.$$

Besteht keine direkte Krümmungsasymmetrie, hat mithin die Kantlinie eine Spitze, so berührt diese ihre eigene Evolute, und die Kantlinie kann, wenn unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als der vierten in der Flächengleichung vernachlässigt werden, als Kreisevolvente angesehen und konstruirt werden. Mit derselben Annäherung kann sie, wie es in der Optik gewöhnlich geschieht, als semicubische Parabel aufgefasst werden, deren Gleichung dann

$$9\Phi'\xi^2 = -8D_1^4(\zeta - \rho_1)^3$$

ist.

Die geodätische Krümmung der σ_{11}-Linie der σ'-Schale der Evolute ist

$$\frac{1}{R_{11}'} = -\frac{\cos^3\vartheta_1}{(D_1 - D_{11})^2}\left(\Omega'' - \frac{W(U - 2W)}{D_1 - D_{11}}\right)$$

und ergiebt, zusammengestellt mit dem analogen Werthe für die zweite Evolutenschale die allgemeingiltige Beziehung zwischen den beiden Schalen:

$$\frac{1}{R_{11}'\cos^3\vartheta_1} - \frac{1}{R_1''\cos^3\vartheta_{11}} = \frac{1}{\rho_{11} - \rho_1}.$$

Durch die angegebenen der Evolute angehörigen geometrischen Grössen lassen sich sämmtliche Differentialquotienten der Flächengleichung bis einschliesslich der vierten Ordnung im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ für eine beliebige Parallelfläche ermitteln.

II. Allgemeines über die Kreispunkte.

Da ein Kreispunkt niedrigster Ordnung erst dann vorliegt, wenn eine vollständige Berührung zweiter Ordnung mit einer Sphäre besteht, bezeichne ich allgemein einen Kreispunkt als von der Ordnung n, wenn die Fläche in ihm eine vollständige Berührung der Ordnung $n + 1$ mit einer Sphäre hat, d. h. wenn sämmtliche Differentialquotienten der Flächengleichung bis einschliesslich der Ordnung $n + 1$, nicht aber sämmtliche Differentialquotienten der Ordnung $n + 2$ mit denjenigen der Gleichung der osculirenden Sphäre identisch sind. Die Differentialquotienten der Flächengleichung der osculirenden Sphäre bezeichne ich mit $p_1 q_1 \ldots$ oder $\frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, \ldots.$

Wird Krümmung und Bogenelement eines beliebigen Normalschnittes mit D bezw. ds bezeichnet, und setzt man zur Verkürzung

$$N = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

so gilt bekanntlich:

$$D = \frac{r dx^2 + 2s dx\, dy + t dy^2}{N ds^2}.$$

Besteht nun eine vollständige Berührung der Ordnung $n + 1$ mit einer Sphäre, so sind, wie ersichtlich, sämmtliche Differentialquotienten der Normalschnittkrümmung bis einschliesslich der Ordnung $n - 1$ gleich Null, da durch $n - 1$ successive Differentiationen eine Gleichung erhalten wird, welche mit der für die osculirende Sphäre erhaltenen identisch ist. Die n-malige Differentiation muss aber ein von Null abweichendes Resultat geben, da nicht sämmtliche Differentialquotienten der Ordnung $n + 2$ in den Gleichungen der Fläche und der osculirenden Späre übereinstimmen. Wird diese Differentiation für beide Gleichungen ausgeführt, und dann die eine der so erhaltenen Gleichungen von der anderen subtrahirt, so erhält man eine Gleichung, welche, da sie nur Differentialquotienten der Ordnung $n+2$ enthalten kann, im Coordinatensystem $p=q=0$ auf folgende Weise geschrieben werden kann:

$$\frac{d^n D}{\cdot ds_n} = \frac{d^{n+2}z - d^{n+2}z_1}{ds^{n+2}}.$$

Wird in dieser Gleichung dx und dy durch $dR\cos\vartheta$ bezw. $dR\sin\vartheta$ ersetzt, wobei eine Zunahme von ϑ eine Drehung des Normalschnittes um die Normale herum in der Richtung vom positiven Theil der X-Achse nach dem positiven Theile der Y-Achse zu bedeutet, so kann nach ϑ differentiirt werden, wonach dx und dy wieder eingeführt werden können. Aus einem beliebig herausgegriffenen Gliede z. B dem vierten

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n-1}\partial y^3}dx^{n-1}dy^3$$

erhält man auf diese Weise unter Berücksichtigung der Identitäten

$$\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n-1}\partial y^3} = \frac{\partial^{n+1}p}{\partial x^{n-2}\partial y^3} = \frac{\partial^{n+1}q}{\partial x^{n-1}\partial y^2}$$

die zwei Glieder

$$-(n+2)dy\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\frac{\partial^{n+1}p}{\partial x^{n-2}\partial y^3}dx^{n-2}dy^3$$

$$+(n+2)dx\frac{(n+1)n}{1.2}\frac{\partial^{n+1}q}{\partial x^{n-1}\partial y^2}dx^{n-1}dy^2$$

wonach leicht ersichtlich ist, dass die Differentiation der ganzen Gleichung ein Resultat geben muss, welches durch folgende Gleichung ausgedrückt werden kann:

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = (n+2)\frac{(d^{n+1}q - d^{n+1}q_1)dx - (d^{n+1}p - d^{n+1}p_1)dy}{ds^{n+2}}.$$

Wenn der Grad der Gleichung

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$$

welcher in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ durch $n+2$ ausgedrückt wird, eine gerade Zahl ist, so muss sie jedoch wenigstens zwei reelle Wurzeln haben, indem nämlich $\frac{d^n D}{ds^n}$ bei $\vartheta = \pi$ denselben Werth wie bei $\vartheta = 0$ hat, mithin während einer ganzen Umdrehung wenigstens ein Maximum und ein Minimum haben muss.

Setzt man $dy = 0$, so findet man für den im Coordinatensystem $p = q = 0$ mit der XZ-Ebene zusammenfallenden Normalschnitt unter Berücksichtigung, dass $\frac{\partial^{n+2} z_1}{\partial x^{n+2}}$ ein Produkt aus D^{n+1} und einem jederzeit aus der Gleichung der Sphäre durch successive Differentiationen zu ermittelnden Koefficienten k besteht,

$$\frac{d^n D}{ds^n} = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+2}} - kD^{n+1}, \qquad \frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = (n+2)\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1}\partial y}$$

und es ist mithin die Schnittlinie der Fläche mit der XZ-Ebene im Coordinatensystem $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1}\partial y}$ eine Linie $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$.

Die kürzeste Linie zwischen den Normalen in zwei unendlich wenig von einander entfernten Punkten auf einer Fläche muss senkrecht auf Beiden stehen, mithin die Tangente einer Parallelfläche sein. Werden die Coordinaten eines Punktes der Parallelfläche mit ξ, η, ζ, die Richtungscosinus der normale mit α, β, γ bezeichnet, so bestehen bekanntlich die Gleichungen

$$\xi = x + k\alpha, \qquad \eta = y + k\beta, \qquad \zeta = z + k\gamma$$

in welchen k eine Constante bedeutet. Werden diese Gleichungen differentiirt, dann quadrirt und addirt, und wird die so erhaltene Gleichung nach k differentiirt, so erhält man als Bedingung dafür, dass das Bogenelement $d\sigma$ auf der Parallelfläche ein Minimum sei, den Werth

$$k = -\frac{dx\,d\alpha + dy\,d\beta + dz\,d\gamma}{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$$

welcher der Bedingung

$$d\xi\,dp + d\eta\,dq = 0$$

dass die kürzeste Linie Tangente einer asymptotischen Linie auf der fraglichen Parallelfläche sei, entspricht. Nach Einsetzen dieses Werthes erhält man schliesslich:

$$d\sigma = \frac{dq(dx + p\,dz) - dp(dy + q\,dz)}{\sqrt{(1+q^2)dp^2 - 2pq\,dp\,dq + (1+p^2)dq^2}}.$$

Bei einer vollständigen Berührung der Ordnung $n+1$ mit einer Sphäre ergeben $n-1$ successive Differentiationen dieser Gleichung den Werth Null. Nach Ausführung der n-maligen Differentiation sowohl für die Fläche als für die osculirende Sphäre erhält man durch Subtraktion für das Coordinatensystem $p=q=0$

$$d^{n+1}\sigma = \frac{(d^{n+1}q - d^{n+1}q_1)dx - (d^{n+1}p - d^{n+1}p_1)dy}{\sqrt{dp^2+dq^2}}$$

wonach bei einer vollständigen Berührung der Ordnung $n+1$ mit einer Sphäre bei $n>0$ und wenn ϑ ein in der Tangentialebene belegener Winkel ist, allgemein

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = (n+2)D\frac{d^{n+1}\sigma}{ds^{n+1}}$$

ist, und der kürzeste Abstand zwischen den Normalen in zwei unendlich wenig von einander entfernten Punkten auf der Fläche ein Unendlichkleines höherer Ordnung ist, wenn die Punkte auf einer Linie $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n}=0$ liegen, als sonst.

Wenn man in den allgemeinen Ausdruck für die Torsion einer doppelt gekrümmten Linie — x als unabhängige Variabele betrachtet —

$$\frac{dx(d^2z\,d^3y - d^3z\,d^2y)}{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (d^2y)^2dx^2 + (d^2z)^2dx^2}$$

den aus der allgemeinen Gleichung einer geodätischen Linie

$$p(dy\,d^2z - dz\,d^2y) - q\,dx\,d^2z - dx\,d^2y = 0$$

ermittelten Werth für d^2y sowie den durch Differentiation dieser Gleichung gefundenen Werth für d^3y einsetzt, so ergiebt sich als allgemeiner Ausdruck für die geodätische Torsion einer Linie auf einer Fläche:

$$T = -\frac{dq(dx+p\,dz) - dp(dy+q\,dz)}{N^2ds^2}$$

aus welchem Ausdrucke durch Zusammenstellung mit dem eben gefundenen das allgemeingiltige Gesetz

$$\frac{d\sigma}{ds} = \pm\frac{T}{\sqrt{D^2+T^2}}$$

hervorgeht, und nach schon angewendeter Methode die für eine vollständige Berührung der Ordnung $n+1$ mit einer Sphäre allgemein geltende Beziehung

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = -(n+2)\frac{d^n T}{ds^n}$$

hergeleitet werden kann, wobei ϑ wie früher, den Winkel zwischen der bezüglichen Normalebene und einer fixen Tangente bedeutet.

Die Bedingung, dass die Normalen längs einer Linie auf der Fläche eine Linie berühren, d. h. eine abwickelbare Fläche darstellen:

$$d\xi + p\,d\zeta = 0, \qquad d\eta + q\,d\zeta = 0$$

ergiebt zusammen mit den beiden Normalengleichungen

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \qquad \eta - y + q(\zeta - z) = 0$$

nach Differentiation dieser

$$\zeta - z = \frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}$$

wonach die Definition der Hauptkrümmungslinien als Schnittlinien der Fläche mit den Abwickelbaren Normalflächen oder als Linien ohne geodätische Torsion oder durch die Forderung, dass der kürzeste Abstand zwischen den Normalen in zwei unendlich wenig von einander entfernten Punkten auf der Fläche ein Unendlichkleines höherer Ordnung sei, wenn diese Punkte auf eine Hauptkrümmungslinie liegen, als sonst, eine und dieselbe ist, und in einen Kreispunkt n^{ter} Ordnung nur längs den Linien $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ Krümmungslinien eintreten können. Da mithin eine Orthogonalität dieser Linien im allgemeinen nicht im Kreispunkt besteht, nenne ich bei der weiteren Untersuchung eine durch den Kreispunkt gehende Krümmungslinie eine s-Linie ohne Rücksicht darauf, ob sie nach beiden Seiten vom Kreispunkte einer und derselben Schaar angehöre oder nicht, und die diese Linie ausserhalb des Kreispunkts rechtwinkelig schneidenden Krümmungslinien die t-Linien der Fläche, während die entsprechenden Hauptkrümmungen mit D_s bezw. D_t bezeichnet werden. Von den beiden Berührungslinien der einer s-Linie der Fläche entsprechenden abwickelbaren

Normalfläche mit der Krümmungsmittelpunktsfläche, welche sich im Krümmungsmittelpunkt des Kreispunkts treffen müssen, nenne ich diejenige, welche zugleich Kantlinie der abwickelbaren Normalfläche ist, die s-Linie, die andere die t-Linie dieser.

Mittels den eben angeführten, für die Kantlinie geltenden Gleichungen kann man den Werth von D_s in geeigneter Form erhalten, wonach durch Subtraktion dieses Werthes vom bekannten Werthe

$$\frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{N^3}$$

für die Summe der beiden Hauptkrümmungen auch D_t in geeigneter Form erhalten wird. Man findet auf diese Weise, wenn $\frac{dy}{dx}$ mit λ bezeichnet wird:

$$D_s = \frac{(1 + q^2)r - pqs + \lambda[(1 + q^2)s - pqt]}{N^3},$$

$$D_t = \frac{(1 + p^2)t - pqs - \lambda[(1 + q^2)s - pqt]}{N^3}.$$

Aus diesen Werthen ergiebt sich allgemein für einen Kreispunkt n^{ter} Ordnung im Coordinatensystem $p = q = \frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n+1}\partial y} = 0$ und für $\lambda = 0$ d. h. für eine die X-Achse berührende Krümmungslinie:

$$d^n D_s = d^n r - d^n r_1 = \left(\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n+2}} - \frac{\partial^{n+2}z_1}{dx^{n+2}}\right)ds^n,$$

$$d^{n+1} D_s = d^{n+1} r - d^{n+1} r_1 = \left(\frac{\partial^{n+3}z}{\partial x^{n+3}} - \frac{\partial^{n+3}z_1}{\partial x^{n+3}}\right)ds^{n+1},$$

$$d^n D_t = d^n t - d^n t_1 = \left(\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^n \partial y^2} - \frac{\partial^{n+2}z_1}{\partial x^n \partial y^2}\right)ds^n,$$

$$d^{n+1} D_t = d^{n+1} t - d^{n+1} t_1 = \left(\frac{\partial^{n+3}z}{\partial x^{n+1}\partial y^2} - \frac{\partial^{n+3}z_1}{\partial x^{n+1}\partial y^2} + \frac{(n+1)n}{2}\,\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n-1}\partial y^3}\,\frac{d^2y}{dx^2}\right)ds^{n+1}.$$

Verschwindet bei partieller Berührung höherer Ordnung als $n + 1$ mit der osculirenden Sphäre der eine oder andere dieser Werthe, so kann natürlich die Differentiation beliebig fortgesetzt werden, aber die Resultate lassen sich nicht länger so einfach ausdrücken.

Unter den genannten Bedingungen ergiebt sich für die Kantlinie der abwickelbaren Fläche durch die die Projektion des Krümmungshalbmessers auf die Z-Achse ausdrückende Beziehung

$$N(\zeta - z) D_s = 1$$

die Relation

$$d^n \zeta = -\frac{1}{D_s^2} d^n D_s,$$

und mittels der Gleichungen $d\xi + p d\zeta = 0$, $d\eta + q d\zeta = 0$:

$$d^n \xi = d^n \eta = d^{n+1} \eta = 0,$$

$$d^{n+1} \xi = \frac{n}{D_s} d^n D_s ds.$$

Für die t-Linie der abwickelbaren Normalfläche findet man nach derselben Methode:

$$d^n \zeta = -\frac{1}{D_t^2} d^n D_t$$

und unter Anwendung der Normalgleichungen:

$$d^n \xi = d^n \eta = d^{n+1} \eta = 0,$$

$$d^{n+1} \xi = [(n+1) d^n D_t - d^n D_s] \frac{ds}{D_t}.$$

Im allgemeinen Falle berührt also auch die t-Linie die Kreispunktsnormale, und zwar liegen, wenn n eine ungerade Zahl ist, beide Linien jede für sich ganz nach der einen Seite von der Kreispunktsnormale, während sie im entgegengesetzten Falle eine Spitze im Krümmungsmittelpunkt des Kreispunkts haben und, jede für sich, ganz nach der einen Seite der durch diesen Punkt parallel zur Tangentialebene der Fläche gelegten Ebene belegen sind.

Ist bei partieller Berührung höherer Ordnung als $n + 1$ mit der osculirenden Sphäre m bezw. μ die Ordnungszahl des ersten Differentialquotienten von D_s bezw. D_t, welcher einen von Null verschiedenen Werth hat, und ist dabei $m \geqq \mu > n$ oder $\mu \geqq m > n$, so sage ich, der Kreispunkt ist längs der fraglichen Krümmungslinie von der Ordnung μ bezw. m, indem diese Zahlen die bezüglichen Ordnungszahlen des ersten von Null verschiedenen Differentialquotienten von $D_s - D_t$ sind, und letztgenannte Ordnungszahl überhaupt, auch wenn $m = \mu = n$ ist, die partielle Ordnungszahl des Kreispunkts längs der fraglichen Krümmungslinie angiebt. Der genannte Fall, wo die Ordnungszahl nicht nur des Kreispunkts, sondern auch der Osculation mit der Sphäre längs der fraglichen Krümmungslinie grösser als n bezw. $n + 1$ ist, stellt einen speciellen Fall dar, den ich nicht in dieser allgemeinen Darstellung berücksichtigen kann. Ist nur die Ordnungszahl des Kreispunkts erhöht, dabei aber $m = \mu = n$, so sind die erhaltenen Werthe für die s- und t-Linie der abwickelbaren Normalfläche übereinstimmend, und die beiden Linien haben eine entsprechende Berührung. Besteht wiederum nur eine partielle Osculation höherer Ordnung mit der Sphäre, so wird dadurch nur der Typus der s-Linie geändert, und ist $\mu > m$ bei $m = n$, so bildet die Tangente der t-Linie im Krümmungsmittelpunkt des Kreispunkts einen endlichen Winkel mit der Kreispunktsnormale, wobei diese Linie, wenn n eine ungerade Zahl ist, mit einer Spitze die convexe Seite der s-Linie berührt, im entgegengesetzten Falle aber die Kreispunktsnormale schneidet und von der Spitze der s-Linie berührt wird.

Die Polare einer die fragliche s-Linie auf der Fläche kreuzenden t-Linie fällt mit der Tangente im entsprechenden Punkte der t-Linie der abwickelbaren Normalfläche zusammen, was wenn $\frac{1}{R_t}$ die geodätische Krümmung jener t-Linie ist durch das allgemein gültige Gesetz

$$R_t \frac{dD_t}{ds} = D_t - D_s$$

ausgedrückt wird. Im allgemeinen Falle erhält man nach $n - 1$ successiven Differentiationen dieser Gleichung:

$$R_t = 0$$

und durch die n-malige:

$$\frac{dR_t}{ds} = \frac{d^n D_t - d^n D_s}{n d^n D_t}.$$

Ist die partielle Ordnungszahl ν des Kreispunkts längs der fraglichen Krümmungslinie grösser als μ, so erhält man:

$$R_t = dR_t = d^2 R_t = \ldots = d^{\nu-\mu} R_t = 0,$$

$$d^{\nu-\mu+1} R_t = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (\nu - \mu + 1)}{\nu(\nu - 1)(\nu - 2) \ldots \mu} \frac{d^\nu D_t - d^\nu D_s}{d^\mu D_t} ds$$

sonst ergeben sich bei $\nu = \mu$ ähnliche Werthe wie im allgemeinen Falle (auch wenn $\nu > n$ ist) und bei $m > \mu$:

$$\frac{dR_t}{ds} = \frac{1}{\mu}$$

während im Falle $\mu > m$ durch den Ausdruck

$$\frac{1}{R_t} = -\frac{d^{m+1} D_t}{d^m D_s ds}$$

der Limeswerth der geodätischen Krümmung der t-Linien der Fläche bei Eintritt der fraglichen s-Linie in den Kreispunkt angegeben wird.

Mit diesen Werthen lassen sich unter Anwendung des S. 64 angeführten LIOUVILLE'schen Satzes, dem man bei $R_t = \frac{1}{\infty}$ am geeignetsten die Form

$$R_t^2 \frac{d}{dt} \frac{1}{R_s} = \frac{dR_t}{ds} + 1 + R_t^2 \left(\frac{1}{R_s^2} + D_s D_t \right)$$

giebt, die Verlaufstypen der collateralen Krümmungslinien einer in den Kreispunkt eintretenden s-Linie bestimmen. Wenn nämlich die geodätische Krümmung $\frac{1}{R_s}$ der fraglichen s-Linie keinen unendlich grossen Werth hat, erhellt es, dass bei Abnahme von R_t nach Null hin die der fraglichen s-Linie am nächsten verlaufenden Krümmungslinien derselben Schaar, d. h. ihre collateralen Krümmungslinien, ihr die convexe bezw. concave Seite zuwenden müssen, je nachdem $\frac{dR_t}{ds} + 1$ positiv oder negativ ist. Da nun zugleich die Tangenten dieser collateralen s-Linien Normalen der t-Linien sind, so findet man, dass bei Eintritt einer Krümmungslinie ohne unendlich grosser geodätischer Krümmung in den Kreispunkt im allgemeinen Falle, wo R_t nach Null hin abnimmt, die collateralen s-Linien bei $\frac{dR_t}{ds} > 0$ mit divergirenden Tangenten ihre convexe Seite der fraglichen s-Linie zukehren, bei $\frac{dR_t}{ds} + 1 > 0 > \frac{dR_t}{ds}$ ihre convexe Seite der fraglichen s-Linie zukehren, während die Tangenten nach einem zwischen der t-Linie und dem Kreispunkt gelegenen Punkt convergiren, bei $\frac{dR_t}{ds} + 1 < 0$ schliesslich die concave Seite der fraglichen s-Linie zukehren, während die Tangenten nach einem jenseits des Kreispunkts belegenen Punkt convergiren. Ich nenne den Verlauf der collateralen s-Linien in diesen drei Fällen *ausbiegend, anschmiegend* bezw. *umbiegend,* wodurch zwar von den anschmiegenden collateralen Krümmungslinien gesagt ist, dass sie längs der Tangente der fraglichen s-Linie zusammen mit dieser in den Kreispunkt eintreten, aber vom weiteren Verlauf der in Bezug auf eine in den Kreispunkt eintretende Krümmungslinie aus- bezw. umbiegenden collateralen Krümmungslinien nichts ausgesagt sein soll. Im Falle $\frac{dR_t}{ds} = 0$ wobei also $\nu > \mu$ ist, ergiebt sich, wenn $\nu - \mu$ eine gerade Zahl ist, ein anschmiegender bezw. ausbiegender Verlauf der collateralen Krümmungslinien, je nachdem $d^{\nu-\mu+1} R_t$ negatives oder positives Vorzeichen hat, während im entgegengesetzten Falle dies nur für den positiven Theil der s-Linie gilt, längs dem negativen Theile aber die collateralen Krümmungslinien den anderen dieser Verlaufstypen aufweisen. Der Fall $\frac{dR_t}{ds} + 1 = 0$, in welchem die t-Linie der abwickelbaren Normalfläche eine Berührung höherer Ordnung mit der Kreispunktsnormale hat, wird weiter unten berücksichtigt werden. Hat R_t einen endlichen Limeswerth, unterscheidet sich der Verlauf der collateralen Krümmungslinien nicht von dem beim allgemeinen Flächenpunkte.

Daraus, dass Krümmungslinien nur längs den Linien $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ in einen Kreispunkt eintreten können, folgt natürlich nicht, dass dies längs allen solchen Linien der Fall sei. Es hat zwar für einen Kreispunkt n^{ter} Ordnung die n-malige Differentiation der Differentialgleichung

$$(1 + p^2)s - pqr + \lambda[(1 + p^2)t - (1 + q^2)r] + \lambda^2[pqt - (1 + q^2)s] = 0$$

für die Hauptkrümmungslinien die Werthe von λ gegeben, es müssen aber auch sämmtliche successiven Differentiationen höherer Ordnung reelle Werthe für $d\lambda$, $d^2\lambda$ u. s. w. ergeben. Im allgemeinen Flächenpunkte ist das immer der Fall, da im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ bei $\lambda = 0$ ein Differential beliebiger Ordnung $d^m\lambda$ immer erst in der durch die m-malige Differentiation erhaltene Gleichung auftritt und zwar mit dem Coefficienten $t - r$. Auf ähnliche Weise tritt derselbe Differentialquotient im Kreispunkte n^{ter} Ordnung und im Coordinatensystem $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1} \partial y} = 0$ bei

$\lambda = 0$ immer erst in der durch die $(n+m)$-malige successive Differentiation erhaltenen Gleichung auf, aber mit dem Coefficienten:

$$\frac{(n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots m}\left[\frac{n+m+1}{m+1}\left(\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^n \partial y^2}-\frac{\partial^{n+2}z_1}{\partial x^n \partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n+2}}-\frac{\partial^{n+2}z_1}{\partial x^{n+2}}\right)\right]$$

welcher theils aus der Differentiation des Produktes $\lambda(t-r)$ theils aus dem Differentialquotienten $d^{n+m}s$ stammt. In den Fällen wo ein solcher Coefficient gleich Null ist, tritt entweder die fragliche Krümmungslinie unter Bildung einer Spitze im Kreispunkt ein, oder es können die betreffenden Differentialquotienten von Gleichungen höherer Ordnung bestimmt werden, wobei die fragliche Krümmungslinie imaginär sein kann, oder mehrere Krümmungslinien längs derselben Tangente eintreten können. Solche Verhältnisse können aber nur vorliegen, wenn sowohl $\frac{d^n D_s}{ds^n}$ als $\frac{d^n D_t}{ds^n}$ gleich Null sind, d. h. wenn längs der fraglichen Linie $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ die Ordnungszahl nicht nur des Kreispunkts sondern auch der Osculation mit einer Sphäre höher als n bezw. $n+1$ ist, und eben darum eignen sich diese Fälle nicht für eine allgemeine Untersuchung. Diese Fälle ausgenommen, kann ersichtlicherweise in den durch beliebig wiederholte successive Differentiationen erhaltenen Gleichungen nur dann (und zwar nur in einer Gleichung) der Coefficient des betreffenden Differentiales von λ Null werden, wenn die Bedingung $(n+1)\frac{d^n D_t}{ds^n} \gtrless \frac{d^n D_s}{ds^n} \gtrless \frac{d^n D_t}{ds^n} \gtrless 0$ erfüllt ist, d. h. wenn die fragliche in den Kreispunkt eintretende Krümmungslinie ohnehin von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet ist. In allen anderen Fällen tritt längs einer Linie $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ eine und nur eine Krümmungslinie in den Kreispunkt ein, und für diese kann weder die geodätische Krümmung, welche laut dem angegebenen Ausdruck den Werth

$$\frac{1}{R_s} = \frac{2\frac{\partial^{n+3}z}{\partial x^{n+2}\partial y}}{(n+1)\left(2\frac{d^n D_s}{ds^n}-(n+2)\frac{d^n D_t}{ds^n}\right)}$$

hat, noch irgend eine der successiven Ableitungen derselben einen unendlich grossen Werth haben, falls Kanten und Spitzen auf der untersuchten Fläche ausgeschlossen sind, was stillschweigend angenommen worden ist.

Für eine Umdrehungsfläche, deren Achse die Z-Achse ist, gilt

$$qx = py$$

wonach, wenn die Fläche im Kreispunkt n^{ter} Ordnung eine Berührung wenigstens der Ordnung $n + 2$ mit einer Umdrehungsfläche hat, die Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ für alle Werthe von ϑ erfüllt ist. Dass hier längs jeder Tangente des Kreispunkts eine Krümmungslinie verläuft, wird daraus bewiesen, dass, wie die eben ausgeführte Untersuchung lehrt, in jedem Coordinatensystem $p = q = 0$ successive Differentiationen bestimmte, nicht unendlich grosse Werthe für $d\lambda$, $d^2\lambda$ u. s. w. geben.

Wenn man mittels einer geschlossenen Linie ein Gebiet um einen Kreispunkt abgrenzt, welches keinen weiteren Kreispunkt enthält, so hat die von den Flächennormalen längs dieser Linie gebildete geradlinige Fläche einer Berührungslinie mit jeder der beiden Evolutenschalen, und von den Schnittpunkten einer beliebigen Generatrice mit diesen Linien gehört immer derjenige, dessen längs der Normale gemessener Abstand von der Fläche der kleinere ist, einer und derselben Schale an. Da dasselbe Verhalten auf den die genannte geradlinige Fläche schneidenden, durch den Kreispunkt gehenden abwickelbaren Normalflächen stattfindet, so ist es ersichtlich, dass das Vorzeichen der Differenz

$$d^\nu D_s - d^\nu D_t$$

die Schar bestimmt, welcher die fragliche Krümmungslinie angehört, wenn ν wie früher die partielle Ordnungszahl des Kreispunktes längs dieser Linie ist. Es geht daraus hervor, dass, wenn diese Zahl gerade ist, die Linie beiderseits von Kreispunkt einer und derselben Schaar angehört, im entgegengesetzten Falle aber nicht.

Ein weiteres Hilfsmittel für die Untersuchung giebt die Differentiation der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ ab. Wird diese auf dieselbe Weise ausgeführt, wie diese Gleichung selbst gewonnen worden ist, so ergiebt sich für $\lambda = 0$:

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n} = (n + 2)\left((n + 1)\frac{d^n D_t}{ds^n} - \frac{d^n D_s}{ds^n}\right) = n(n + 2)\frac{d^n D_t}{ds^n}\left(\frac{dR_t}{ds} + 1\right).$$

Es folgt hieraus, dass umbiegende collaterale Krümmungslinien nur dann vorkommen, wenn $\frac{d^n D}{ds^n}$ als Funktion von ϑ ein numerisches Maximum in der fraglichen s-Linie hat, anschmiegende nur, wenn ein numerisches Minimum vorliegt, während ausbiegende collaterale Krümmungslinien ein numerisches Minimum bezw. Maximum angeben, je nachdem das Produkt $\frac{d^n D_s}{ds^n}\frac{d^n D_t}{ds^n}$ positiven oder negativen Werth hat.

Da die Gleichung $\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ von derselben Gradzahl ist wie die Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ mithin die Anzahl ihrer Wurzeln nicht grösser als diese Gradzahl sein kann, so erhellt es, dass eine in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinie, für welche $\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ d. h. $\frac{dR_t}{ds} + 1 = 0$ ist, ein Zusammenfallen von wenigstens zwei Wurzeln der letzterwähnten Gleichung repräsentiren muss. Ist die Anzahl der zusammenfallenden Wurzeln ungerade, so stellt die Linie wieder eine Linie $\frac{d^n D}{ds^n} =$ Max. bezw. Min. dar und hat dementsprechend umbiegende bezw. anschmiegende collaterale Krümmungslinien. Im anderen Falle sind die collateralen Krümmungslinien auf der Seite zunehmender bezw. abnehmender ϑ anschmiegend bezw. umbiegend, je nachdem $\frac{d^3}{d\vartheta^3}\frac{d^n D}{ds^n}$ dasselbe Vorzeichen wie $\frac{d^n D}{ds^n}$ hat oder entgegengesetztes, auf der anderen Seite umgekehrt. Da, abgesehen von diesen, ein Zusammenfallen von wenigstens zwei Wurzeln der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ repräsentirenden Linien, $\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n}$ von Linie zu Linie Vorzeichen wechselt, da weiter anschmiegende collaterale Krümmungslinien der Bedingung $\left((n+1)\frac{d^n D_t}{ds^n} - \frac{d^n D_s}{ds^n}\right)\left(\frac{d^n D_s}{ds^n} - \frac{d^n D_t}{ds^n}\right) > 0$ entsprechen, und das Vorzeichen der Differenz $\frac{d^n D_s}{ds^n} - \frac{d^n D_t}{ds^n}$ entscheidet, welcher Schaar eine Krümmungslinie angehört, so ist es ersichtlich, was a priori postulirt werden könnte, dass wenn zwei consecutive Krümmungslinien einer und derselben Schaar angehören, die eine anschmiegende collaterale Krümmungslinien hat und umgekehrt, sowie die Unmöglichkeit des Vorkommens von zwei consecutiven Krümmungslinien, welche beide anschmiegende collaterale Krümmungslinien hätten, daraus hervorgeht, dass dieser Typus einem numerischen

Minimum von $\frac{d^n D}{ds^n}$ als Funktion von ϑ entspricht. Ein Gebiet, in welchem Krümmungslinien längs gemeinsamer Tangente in einen Kreispunkt einlaufen, oder ein offenes Nodalgebiet der Autoren, ist also immer durch eine Krümmungslinie, längs welcher innerhalb des fraglichen Gebietes keine anschmiegende Krümmungslinien eintreten, beiderseits abgegrenzt, und es stellt das erwähnte Verhalten bei einer Linie $\frac{dR_t}{ds} + 1 = 0$ nur eine scheinbare Ausnahme von dieser Regel dar, indem die eine Grenzlinie des offenen Nodalgebietes mit den einlaufenden Krümmungslinien gemensame Tangente hat.

Zu den angeführten Hilfsmitteln um die Krümmungslinienfigur eines Kreispunkts zu untersuchen kann noch der Limeswerth der geodätischen Krümmungssymmetrie einer die s-Linie in unendlich kleinem Abstande vom Kreispunkt schneidenden t-Linie gefügt werden. Aus dem im allgemeinen Flächenpunkte giltigen Werthe

$$\Psi'' = -\frac{\partial^{13}}{r-t} + \frac{w(3v-2u)}{(r-t)^2}$$

erhält man bei unendlich kleinem Werthe von R_t:

$$\frac{dR_t}{dt} = -R_t^2 \frac{d}{dt}\frac{1}{R_t} = \frac{2u}{w} = \frac{2W}{W}$$

welcher Ausdruck, da im Kreispunkte n^{ter} Ordnung

$$\frac{d^{n-1}W}{ds^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}} = \frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n-1}\partial y^3}$$

sein muss, weil die Differentialquotienten niedrigerer Ordnung der Normalschnittkrümmung gleich Null sind, durch Differentiation von Zähler und Nenner den Limeswerth

$$\frac{dR_t}{dt} = \frac{2\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n-1}\partial y^3}}{\frac{d^n D_t}{ds^n}}$$

ergiebt.

Die angeführten Eigenschaften der s- und t-Linien der abwickelbaren Normalflächen reichen im allgemeinen dazu aus, die gestaltlichen Verhältnisse der Evolute hinreichend kennen zu lernen. Für die einfacheren Kreispunktstypen kann man noch die Schnittlinien der Evolute mit der durch den Krümmungsmittelpunkt des Kreispunkts parallel zur Tangentialebene gelegten Ebene hinzuziehen, deren Tangenten bei Kreispunkten erster Ordnung durch eine quadratische, bei solchen Kreispunkten zweiter Ordnung, welche Schnittpunkte zweier auf der bezüglichen Fläche verlaufenden Symmetrielinien sind, durch eine als quadratische auflösbare Gleichung vierten Grades angegeben werden.

Durch Differentiation von Zähler und Nenner im allgemeinen Ausdruck für das Krümmungsmass der Evolute findet man, dass das Vorzeichen des Krümmungsmasses bei unendlich kleiner Differenz der Hauptkrümmungen dem Vorzeichen des Produktes $\frac{d^n D_s}{ds^n} \frac{d^n D_t}{ds^n}$ entgegengesetzt ist, was für den Theil der Evolute gilt auf welchem die s-Linie einer abwickelbaren, die Kreispunktsnormale enthaltenden, Fläche eine geodätische Linie ist.

Für eine mit einer t-Linie der abwickelbaren Normalfläche zusammenfallenden Kante entscheidet der Limeswerth des für den allgemeinen Flächenpunkt giltigen Ausdruckes

$$\Phi'' = \partial^{04} - 3t^3 - \frac{3w^2}{r - t}$$

ob sie nach der Fläche schaut oder nicht. Da die beiden ersten Glieder zusammen die Abflachung des auf der fraglichen s-Linie senkrechten Normalschnittes bedeuten, welche mit φ^t bezeichnet werden mag, so kann dieser Ausdruck allgemein als eine Gleichung

$$\Phi^t = \varphi^t + \frac{3W}{R_t}$$

zwischen rein geometrischen vom Coordinatensystem unabhängigen Grössen geschrieben werden. Man ersieht, dass in den Kreispunkten erster Ordnung Φ^t beim Durchgang der fraglichen s-Linie durch den Kreispunkt einen unendlich grossen Werth erhält und das Vorzeichen wechselt. Für diesen Fall setzt man am geeignetsten

$$\frac{1}{\Phi^t} = \frac{R_t}{3W + R_t \varphi^t}$$

und erhält durch Differentiation:

$$d\frac{1}{\Phi^t} = \frac{dR_t}{3W} = \frac{\frac{dD_t}{ds} - \frac{dD_s}{ds}}{3\left(\frac{dD_t}{ds}\right)^2} ds.$$

Für die Kreispunkte zweiter Ordnung erhält man den Limeswerth

$$\Phi^t = \varphi^t + \frac{6\left(\frac{d^2D_t}{ds^2}\right)^2}{\frac{d^2D_t}{ds^2} - \frac{d^2D_s}{ds^2}}$$

und für solche höherer Ordnung nach $n - 1$ Differentiationen allgemein:

$$(n - 1)\, dR_t d^{n-2}(\Phi^t - \varphi^t) = 3d^{n-1} W$$

mithin:

$$\frac{d^{n-2}\Phi^t}{ds^{n-2}} = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n-2}\partial y^4} - \frac{\partial^{n+2} z_1}{\partial x^{n-2}\partial y^4} + \frac{3n}{n-1} \frac{\left(\frac{d^nD_t}{ds^n}\right)^2}{\frac{d^nD_t}{ds^n} - \frac{d^nD_s}{ds^n}}.$$

Mit den angegebenen Hilfsmitteln können nun die gestaltlichen Verhältnisse sowohl der Krümmungslinien wie der Evolute eines Kreispunktes beliebiger Ordnung untersucht werden, wenn die betreffenden Differentialquotienten der Flächengleichung bekannt sind, indem nach numerischer Auflösung der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^nD}{ds^n} = 0$ in den verschiedenen Coordinatensystemen $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1}\partial y} = 0$ die bezüglichen Werthe $\frac{d^nD_s}{ds^n}, \frac{d^nD_t}{ds^n}$ ermittelt werden. Für eine allgemeinere Untersuchung von besonderen Kreispunktstypen giebt es aber bequemere Mittel. So genügt z. B. die Kenntniss der Wurzeln der Gleichung $\frac{d^nD}{ds^n} = 0$ um das Vorzeichen von $\frac{d^nD_s}{ds^n}$ für jede der Linien $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^nD}{ds^n} = 0$ zu bestimmen. Um Ähnliches auch betreffs $\frac{d^nD_t}{ds^n}$ und der Differenz $\frac{d^nD_s}{ds^n} - \frac{d^nD_t}{ds^n}$ erreichen zu können, kann man auf folgende Weise verfahren. Nach derselben Methode wie die Gleichung für $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^nD}{ds^n}$

kann eine Gleichung für $\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n}$ erhalten werden. Mittels der leicht zu constatirenden Identitäten

$$\frac{d}{d\vartheta}(d^{n+1}p - d^{n+1}p_1) = (n+1)[(d^n s - d^n s_1)dx - (d^n r - d^n r_1)dy],$$

$$\frac{d}{d\vartheta}(d^{n+1}q - d^{n+1}q_1) = (n+1)[(d^n t - d^n t_1)dx - (d^n s - d^n s_1)dy]$$

und der schon beviesenen Relation

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n} = (n+2)\left((n+1)\frac{d^n D_t}{ds^n} - \frac{d^n D_s}{ds^n}\right)$$

erhält man die Gleichung

$$d^n D_t = \frac{(d^n t - d^n t_1)dx^2 - 2(d^n s - d^n s_1)dx dy + (d^n r - d^n r_1)dy^2}{ds^2}$$

wonach unter Anwendung der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ in folgender Form

$$(d^n s - d^n s_1)(dx^2 - dy^2) = (d^n r - d^n r_1 - d^n t + d^n t_1)dx dy$$

für jede beliebige Krümmungslinie die Gleichung

$$d^n D_s - d^n D_t = (d^n r - d^n r_1 - d^n t + d^n t_1)\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2 - dy^2} = (d^n s - d^n s_1)\frac{dx^2 + dy^2}{dx dy}$$

besteht, in welcher $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ zu erhalten ist.

Zum Schlusse dieses Capitels mag es mir gestattet sein die Eigenschaften der Krümmungslinien im allgemeinen Flächenpunkte den hier bewiesenen Eigenschaften im Kreispunkte zusammenfassend gegenüberzustellen.

Wenn allgemein Krümmung, geodätische Torsion und Bogenlänge einer Normalschnittlinie der Fläche bezw. der kürzeste Abstand zwischen den Flächennormalen in zwei auf dieser Linie belegenen Punkten mit D, T und s bezw. σ bezeichnet werden, und ϑ den Winkel zwischen der

Tangente der Normalschnittlinie und einer fixen Tangente bedeutet, so gelten für den allgemeinen Flächenpunkt die Beziehungen

$$\frac{dD}{d\vartheta} = -2T, \qquad \frac{d\sigma}{ds} = \pm \frac{T}{\sqrt{D^2 + T^2}}$$

und es ist im Coordinatensystem $p = q = 0$ für die die Coordinatenachsen berührenden Normalschnittlinien

$$\frac{dD}{d\vartheta} = \pm 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

wobei das obere Zeichen für die die X-Achse, das untere für die die Y-Achse berührende Linie gilt. Im Kreispunkt n^{ter} Ordnung, in welchem mithin eine vollständige Berührung der Ordnung $n + 1$ mit der osculirenden Sphäre besteht, sind diese sowie die, sämmtlichen successiven Ableitungen bis einschliesslich der Ordnung $n - 1$ entsprechenden, Werthe gleich Null und es bestehen die Relationen

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = -(n+2)\frac{d^n T}{ds^n}, \qquad \frac{d^{n+1}\sigma}{ds^{n+1}} = \pm \frac{\frac{d^n T}{ds^n}}{\sqrt{D^2 + T^2}}$$

wobei im Coordinatensystem $p = q = 0$ für die die X-Achse bezw. die Y-Achse berührende Normalschnittlinie

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = (n+2)\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1}\partial y} \quad \text{bezw.} \quad \frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = -(n+2)\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x \partial y^{n+1}}$$

ist.

Die Krümmungslinien, oder die ohne geodätische Torsion auf der Fläche verlaufenden Linien, oder die Schnittlinien der Fläche mit ihren abwickelbaren Normalflächen, haben allgemein die Eigenschaft, dass der kürzeste Abstand der Flächennormalen in zwei unendlich wenig von einander entfernten Punkten, wenn diese Punkte auf einer Krümmungslinie liegen, ein Unendlichkleines höherer Ordnung darstellt, als sonst. Im allgemeinen Flächenpunkt verlaufen sie in den durch eine Gleichung zweiten Grades bestimmten Richtungen $\frac{dD}{d\vartheta} = 0$ und werden im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ von den Coordinatenachsen berührt. Im Kreispunkte n^{ter} Ordnung verlaufen sie in den durch eine Gleichung vom Grade $n + 2$, bestimmten Richtungen $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ und es wird in jedem Coordinatensystem $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1} \partial y} = 0$ bezw. $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x \partial y^{n+1}} = 0$ eine Krümmungslinie von der X-Achse bezw. von der Y-Achse berührt.

Wie ersichtlich, würden die Gesetze für den allgemeinen Flächenpunkt in den für die Kreispunkte geltenden enthalten sein, wenn man den allgemeinen Flächenpunkt als Kreispunkt von der Ordnung Null und eine Funktion als ihre eigene Ableitung von der Ordnung Null bezeichnen dürfte.

Unter dieser Bedingung würde übrigens der im Kreispunkt geltende Werth für die geodätische Krümmung einer eintretenden Krümmungslinie auch im allgemeinen Flächenpunkte die Giltigkeit behalten.

III. Die wichtigsten Kreispunktstypen.

1. *Kreispunkte erster Ordnung.*

Es mag allgemein als eine Linie $u = 0$ bezw. eine Linie $w = 0$ u. s. w. eine Linie bezeichnet werden, welche in einem Coordinatensystem $p = q = u = 0$ bezw. in einem Coordinatensystem $p = q = w = 0$ u. s. w. mit der X-Achse zusammenfällt. Die Krümmungslinien sind also die Linien $v = 0$ deren Orientation durch die Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{dD_s}{ds} = 0$ angegeben wird, welche folgende Form hat

$$v dx^3 - (u - 2w) dx^2 dy + (u - 2v) dx dy^2 - w dy^3 = 0$$

und in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ für die Orientirung der beiden übrigen Haupttangenten die quadratische Gleichung

$$w \operatorname{tg}^2 \vartheta - u \operatorname{tg} \vartheta + u - 2w = 0$$

giebt, in welcher $\frac{dy}{dx}$ mit $\operatorname{tg}\vartheta$ bezeichnet ist.

Für die die X-Achse in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ berührende Hauptkrümmungslinie haben wir nun, indem wir die mit den Bezeichnungen im allgemeinen Flächenelemente analogen Bezeichnungen

$$\frac{dD_s}{ds} = U, \qquad \frac{dD_t}{ds} = W, \qquad \frac{d^2 D_s}{ds^2} = \Phi, \qquad \frac{d^2 D_t}{ds^2} = \Omega$$

einführen, laut obigen Deductionen:

$$U = u, \qquad W = w, \qquad \Phi = \partial^{40} - 3r^3, \qquad \Omega = \partial^{22} - r^3 + \frac{u\partial^{31}}{2u - 3w},$$

$$\frac{1}{R_s} = \frac{\partial^{31}}{2u - 3w}, \qquad \frac{dR_t}{ds} = \frac{w - u}{w} = \frac{W - U}{W}.$$

Die Krümmung der s- bezw. t-Linie der abwickelbaren Normalfläche deren Schnittlinie mit der Fläche die fragliche Krümmungslinie darstellt, welche mit $\frac{1}{R^s}$ bezw. $\frac{1}{R^t}$ bezeichnet werden mag, ist:

$$\frac{1}{R^s} = \frac{r^3}{u} = \frac{D^3}{U}, \qquad \frac{1}{R^t} = -\frac{r^3(u - 2w)}{w^2} = -\frac{D^3(U - 2W)}{W^2}.$$

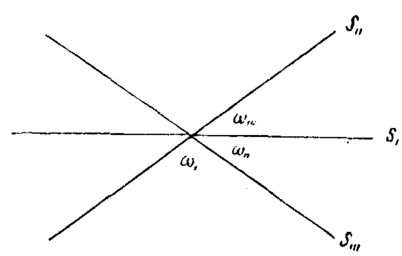


Fig. 1.

Es mögen weiter nach dem Schema der Fig. 1 die positiven Richtungen der drei möglichen Krümmungslinien mit $s_1\ s_{11}\ s_{111}$ und die zwischen ihnen gebildeten, immer positiv gerechneten Winkel mit $\omega_1\ \omega_{11}\ \omega_{111}$ sowie die Werthe, welche $u\ w\ \frac{dR_t}{ds}$ u. s. w. annehmen, wenn der positive Theil der betreffenden Hauptkrümmungslinie mit dem positiven Theile der X-Achse zusammenfällt mit $u_1 u_{11}\ w_1 w_{11}\ \frac{dR_t}{ds_1}\frac{dR_t}{ds_{11}}$ u. s. w. bezeichnet werden.

Aus der S. 82 angegebenen Gleichung

$$d^n D_s - d^n D_t = (d^n s - d^n s_1)\frac{dx^2 + dy^2}{dx\,dy}$$

welche in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ die Form

$$U_n - W_n = \frac{w}{\cos\vartheta}$$

hat, und in welcher U_n bezw. W_n die Werthe für eine Hauptkrümmungslinie angeben, deren Tangente mit der X-Achse den Winkel ϑ bildet, resultiren in den verschiedenen Coordinatensystem $p = q = v = 0$ folgende Gleichungen

$$\cos\omega_{1} = -\cos(\omega_{11} + \omega_{111}) = -\frac{w_{11}}{u_{111} - w_{111}} = -\frac{w_{111}}{u_{11} - w_{11}},$$

$$\cos\omega_{11} = \frac{w_{111}}{u_{1} - w_{1}} = \frac{w_{1}}{u_{111} - w_{111}},$$

$$\cos\omega_{111} = \frac{w_{1}}{u_{11} - w_{11}} = \frac{w_{11}}{u_{1} - w_{1}}$$

aus welchen einestheils hervorgeht, dass das Product $w(u - w)$ in allen Coordinatensystemen $p = q = v = 0$ denselben Werth hat, d. h. dass das mit dem negativen Werthe dieses Productes identische Product $W^2 \frac{dR_t}{ds}$ längs jeder Hauptkrümmungslinie einen und denselben Werth hat, anderentheils aber auch die Beziehung

$$\frac{1}{\cos\omega_{1}\cos\omega_{11}\cos\omega_{111}} = \frac{dR_t}{ds_1} \cdot \frac{dR_t}{ds_{11}} \cdot \frac{dR_t}{ds_{111}}$$

hergeleitet wird.

Man erzieht hieraus, dass im Falle $W(U - W) < 0$, wobei immer drei Haupttangenten existiren, sämmtliche Winkel ω spitz sind, und für alle Hauptkrümmungslinien $\frac{dR_t}{ds} > 0$ ist. Bei $W(U - W) > 0$ können eine, zwei oder drei Hauptkrümmungslinien vorhanden sein, einer der Winkel ω ist grösser als $\frac{\pi}{2}$, so dass sämmtliche Haupttangenten innerhalb eines Quadrantes verlaufen, und $\frac{dR_t}{ds}$ hat für alle einen negativen Werth. Den Übergang zwischen den beiden Typen stellen die Fälle $W(U - W) = 0$ dar, in welchen immer zwei orthogonale Krümmungslinien und eine Linie $v = u - w = 0$ existiren. Längs der letzteren, welche mit einer der beiden anderen zusammenfallen kann, ist also der Kreispunkt von höherer Ordnung, und bei dem erwähnten Zusammenfallen besteht noch dazu längs dieser Linie eine Berührung höherer Ordnung mit der Sphäre, indem sie eine Linie $v = u = w = 0$ darstellt.

Wenn in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ auch $w = 0$ gefunden wird, so ist das Flächenelement bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als der dritten symmetrisch zur XZ-Ebene, und die t-Linie der mit dieser Ebene zusammenfallenden abwickelbaren Normalfläche stellt mithin eine Kantlinie auf der Evolute dar. Um diese für die gestaltlichen Verhältnisse der Evolute bedeutungsvollen Kantlinien zu untersuchen geht man daher am besten von den Fällen aus, in welchen die vorhandenen Linien $w = 0$ mit den Krümmungslinien zusammenfallen. Wenn in der Gleichung $\frac{dD_s}{ds} = 0$ mit Rücksicht darauf dass die Linien $w = 0$ senkrecht auf den Linien $u = 0$ stehen, $\operatorname{tg}\theta$ für $-\frac{dx}{dy}$ eingesetzt wird, so erhält man im Coordinatensystem $p = q = v = 0$ für die Orientirung der Linien $w = 0$ die cubische Gleichung

$$u \operatorname{tg}^3 \theta + 3w \operatorname{tg}\theta - w = 0$$

welche nur eine reelle Wurzel hat, sobald

$$u^2 w^3 + 4w^3 u > 0$$

ist.

Schnittlinien der Evolute mit der durch den Krümmungsmittelpunkt parallel zur Tangentialebene gelegten Ebene, der Fokalebene, findet man, indem man in den Gleichungen der Normale

$$\xi = x(1 - \zeta r) - \frac{\zeta}{2}(ux^2 + wy^2), \qquad \eta = y(1 - \zeta r) - \frac{\zeta}{2}(2wxy + wy^2),$$

$\zeta = \frac{1}{r}$, $\frac{y}{x} = y'$, $\frac{\eta}{\xi} = \eta'$ einsetzt und dann den resultirenden Ausdruck

$$\eta' = \frac{2wy' + wy'^2}{u + wy'^2}.$$

differentiirt:

$$\frac{d\eta'}{dy'} = \frac{2(uw + uwy' - w^2 y'^2)}{(u + wy'^2)^2}$$

indem die der Bedingung $\frac{d\eta'}{dy'} = 0$ entsprechende Werthe von η' bei nach Null hin abnehmenden Werthen von x und y die Tangenten der Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene im Fokalpunkte darstellen müssen.

Die Bedingung dafür, dass die Evolute die Fokalebene schneidet ist mithin

$$uw + \mathfrak{u}wy' - w^2y'^2 = 0$$

d. h.

$$u^2\mathfrak{u}^2 + 4w^3u \geqq 0.$$

Werden die Wurzeln dieser Gleichung für y' mit $a_1 a_{11}$ und die entsprechenden Werthe für η' mit $c_1 c_{11}$ bezeichnet, dann die Werthe

$$a_1 + a_{11} = \frac{u\mathfrak{u}}{w^2}, \qquad a_1 a_{11} = -\frac{u}{w}, \qquad a_1^2 + a_{11}^2 = \frac{u^2\mathfrak{u}^2 + 2w^3u}{w^4}$$

in den Ausdruck

$$c_1 + c_{11} = \frac{2wa_1 + \mathfrak{u}a_1^2}{u + wa_1^2} + \frac{2wa_{11} + \mathfrak{u}a_{11}^2}{u + wa_{11}^2}$$

und den entsprechenden für $c_1 c_{11}$ eingesetzt, so findet man

$$c_1 + c_{11} = \frac{\mathfrak{u}}{w}, \qquad c_1 c_{11} = -\frac{w}{u}$$

d. h. fün η' die Gleichung:

$$uw\eta'^2 - u\mathfrak{u}\eta' - w^2 = 0$$

und die Identitäten

$$c_1 = -\frac{1}{a_{11}}, \qquad c_{11} = -\frac{1}{a_1}.$$

Wird dann der Winkel, den die in der Fokalebene durch den Krümmungsmittelpunkt des Kreispunkts gezogenen Tangenten der Evolute bilden, der *Evolutenwinkel,* mit ε bezeichnet, so hat man:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{c_1 - c_{11}}{1 + c_1 c_{11}} = \frac{\sqrt{u^2\mathfrak{u}^2 + 4w^3u}}{w(u - w)}.$$

Aus diesem Ausdrucke ersieht man, dass bei $u^2\mathfrak{u}^2 + 4w^3u < 0$ d. h. wenn drei Linien $\mathfrak{u} = 0$ vorhanden sind, die Evolute nicht die Fokalebene schneidet, und dass, wenn zwei Linien $\mathfrak{u} = 0$ existiren — bei $u^2\mathfrak{u}^2 + 4w^3u = 0$ — nur eine Schnittlinie zwischen Evolute und Fokalebene sich vorfindet, während für Kreispunkte mit nur einer Linie $\mathfrak{u} = 0$ immer zwei solche Linien existiren, deren Tangenten im Fokalpunkte den

Evolutenwinkel bilden. Die Categorie mit nur einer Linie $\mathfrak{u} = 0$ umfasst theils die Fälle $w(u-w) > 0$ und $w(u-w) = 0$, theils aber auch Fälle $w(u-w) < 0$. Hierbei muss aber, da nur eine Linie $u = 0$ vorhanden ist, immer eine Hauptkrümmungslinie vorhanden sein, längs welcher u ein numerisches Minimum darstellt. Es muss also längs dieser Linie u und $2w-u$ dasselbe Vorzeichen haben, wonach, da $w(u-w) < 0$ ist, auch w und u dasselbe Vorzeichen haben müssen. In Kreispunkten mit nur einer Linie $\mathfrak{u} = 0$ giebt es also immer ein Coordinatensystem $p = q = v = 0$ in welchem sowohl u als w positive Werthe haben und folglich der aus der Normalengleichung erhaltene Werth für ξ in der Fokalebene immer negativ ist. Es folgt hieraus, dass sämmtliche Normalen die Fokalebene innerhalb eines der vier Winkel ε treffen, wonach die Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene nicht den Fokalpunkt überschreiten, sondern in ihm endigen. Der so bestimmte Winkel muss also wenigstens so gross sein als die Summe der zwei kleinsten Winkel ω. Da nun bei $w(u-w) < 0$ diese Summe grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist und beim Durchgehen des Werthes $w(u-w)$ durch Null, der Werth von $\operatorname{tg}\varepsilon$ durch ∞ hindurchgeht, so folgt hieraus, dass der angegebene Werth für $\operatorname{tg}\varepsilon$ auch dem Vorzeichen nach die Grösse des Evolutenwinkels angiebt, während seine Orientirung dadurch bestimmt ist, dass in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$, in welchem sowohl u als w positiv sind, der negative Theil der X-Achse innerhalb desselben verläuft. Näher wird die Orientirung durch die Bissectrice bestimmt, welche mit der X-Achse in einem solchen Coordinatensystem den Winkel

$$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{c_1 + c_{11}}{1 - c_1 c_{11}} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\mathfrak{u}u}{w(u+w)}$$

bildet.

Die Bedingung $u^2\mathfrak{u}^2 + 4w^3u > 0$ bedeutet übrigens auch eine Beziehung zwischen den Winkeln ω. Aus der für ein Coordinatensystem $p = q = v = 0$ giltigen Gleichung

$$w\operatorname{tg}^2\vartheta - \mathfrak{u}\operatorname{tg}\vartheta + u - 2w = 0$$

für die Orientirung der beiden übrigen Hauptkrümmungslinien, findet man nämlich, wenn die s_1-Linie mit der X-Achse zusammenfällt, und wenn $\operatorname{tg}\vartheta_1$ $\operatorname{tg}\vartheta_{11}$ die beiden Wurzeln der Gleichung sind:

$$-\operatorname{tg}\vartheta_{1}\operatorname{tg}\vartheta_{11}=\frac{2w-u}{w}=\frac{dR_t}{ds_1}+1=\operatorname{tg}\omega_{11}\operatorname{tg}\omega_{111}$$

wonach aus der für $\omega_1+\omega_{11}+\omega_{111}=\pi$ giltigen Beziehung

$$\operatorname{tg}\omega_1+\operatorname{tg}\omega_{11}+\operatorname{tg}\omega_{111}=\operatorname{tg}\omega_1\operatorname{tg}\omega_{11}\operatorname{tg}\omega_{111}$$

die Identität

$$\frac{dR_t}{ds_1}=\frac{\operatorname{tg}\omega_{11}+\operatorname{tg}\omega_{111}}{\operatorname{tg}\omega_1}$$

erhalten wird. Wird nun diejenige Hauptkrümmungslinie in einem Kreispunkte vom Typus $w(u-w)<0$ mit nur einer Linie $u=0$, für welche $w \gtrless u \gtrless 0$ mithin $\frac{dR_t}{ds}<1$ ist, als die s_1-Linie bezeichnet, so erhellt es, dass die Bedingung $u^2u^2+4w^3u>0$ mit der Bedingung, dass die trigonometrische Tangente eines der Winkel ω grösser ist als die Summe der trigonometrischen Tangenten der beiden anderen, zusammenfällt.

In den Fällen $u^2u^2+4w^3u<0$, in welchen sowohl u als w zwischen zwei consecutiven Coordinatensystemen $p=q=v=0$ Vorzeichen wechseln, ist dass Krümmungsmass der Evolute längs den s-Linien der abwickelbaren Normalflächen positiv, und die drei Linien $u=0$ können mit den Hauptkrümmungslinien zusammenfallen, wonach sie ebenso viele Kanten auf der Evolute darstellen. Man findet, dass die beiden Evolutenschalen Trichter mit drei Kanten bilden und im Fokalpunkte sich gegenseitig mit den Spitzen berühren.

In den Fällen $u^2u^2+4w^3u>0$ findet man, dass der auf der einen Seite der Fokalebene gelegene Theil der s-Linie der abwickelbaren Normalfläche derselben Schale der Evolute angehört wie der auf der anderen Seite der Fokalebene gelegene Theil der t-Linie derselben. Da nun diese mit der Linie $u=0$ zusammenfallen und somit eine Kante darstellen kann, so findet man, dass jede Evolutenschale eineKante hat, welche im Fokalpunkte endigt, und dass die Schnittlinien der beiden Schalen mit der Fokalebene im Fokalpunkte dieselben Tangenten haben, welche den Evolutenwinkel bilden. Der S. 81 angegebene Werth für $\frac{d}{ds}\frac{1}{\Phi^t}$ ergiebt in jedem Falle, dass die Kante der einen Schale nach der anderen Schale schaut.

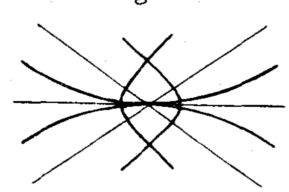
Die angeführten Relationen reichen dazu aus, um alle Fälle in Detail zu untersuchen ausser der Fälle, in welchen längs einer Krümmungslinie sowohl die Ordnungszahl des Kreispunkts wie die Osculation mit der Sphäre von höherer Ordnung ist. Für diese durch ein Coordinatensystem $p = q = v = u = w = 0$ charakterisirten Fälle, welche man am besten durch die Untersuchung vom Zusammenrücken mehrerer Kreispunkte kennen lernt, so wie für die detaillirtere Untersuchung verweise ich auf meine a. a. O. gegebene Darstellung und beschränke mich hier auf folgende Zusammenfassung.

1. *Umbiegende Krümmungslinien.* In den Coordinatensystemen

$$p = q = v = 0$$

ist $w(u - w) > 0$. Die zwei Evolutenschalen sind offen und haben jede eine Kante, welche im Fokalpunkte endigt. Sie schneiden sich beim Durch-

Fig. 2.



gang durch die Fokalebene, wobei ihre in dieser belegenen Tangenten einen Evolutenwinkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ bilden. Sämmtliche Haupttangenten verlaufen innerhalb eines Winkels von $\frac{\pi}{2}$. Bei $u^2 < 4w(u - 2w)$ existirt nur eine Haupttangente. Wenn in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$, $u^2 = 4w(u - 2w)$ ist, so giebt es noch ein anderes, in welchem $u = 2w$ ist, wobei die entsprechende Krümmungslinie auf der nach dem spitzen Winkel zwischen den zwei Haupttangenten gewendeten Seite von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet ist. Bei $u^2 > 4w(u - 2w)$ giebt es immer drei Haupttangenten, und diese Bedingung ist für alle drei Coordinatensysteme $p = q = v = 0$ erfüllt. Die mittlere der drei in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinien ist beiderseits von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet. S. Fig. 2.

2. *Ausbiegende Krümmungslinien.* Drei Coordinatensysteme

$$p = q = v = 0.$$

In allen $w(u-w)<0$. Nirgends mehr als zwei Haupttangenten innerhalb eines Winkels von $\frac{\pi}{2}$. S. Fig. 3.

a) $u^2 w^2 + 4w^3 u > 0$ in den Coordinatensystemen $p=q=v=0$. Die Tangente des einen Winkels zwischen zwei Haupttangenten ist grösser als die Tangentensumme der beiden anderen. Die Evoluten schneiden einander in der Fokalebene. Evolutenwinkel grösser als $\frac{\pi}{2}$. Jede Schale hat eine Kante, welche im Fokalpunkte endigt.

b) In zwei der bezüglichen Coordinatensystemen ist $u^2 w^2 + 4w^3 u = 0$ im dritten $u=0$. Die Tangente des einen Winkels zwischen zwei Haupttangenten ist gleich der Tangentensumme der beiden anderen. Jede Evolutenschale hat eine Kante, welche in dem Fokalpunkt endigt. Die eine Schale geht mit nur einer Schnittlinie durch die Fokalebene. Die andere ist längs einer diese Schnittlinie im Fokalpunkt berührenden Kante umgebogen und liegt ganz auf der einen Seite der Fokalebene.

Fig. 3.

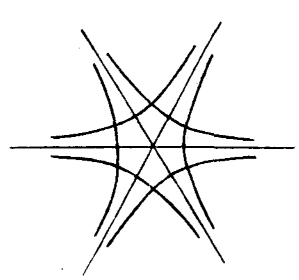
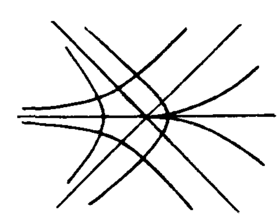


Fig. 4.



c) In allen Coordinatensystemen $p=q=v=0$ ist $u^2 w^2 + 4w^3 u<0$. Kein Winkel zwischen zwei Haupttangenten hat eine trigonometrische Tangente, welche die Tangentensumme der beiden anderen erreicht oder übersteigt. Die Evolutenschalen bilden jede einen geschlossenen Trichter mit drei Kanten, sind auf verschiedenen Seiten der Fokalebene belegen und stossen mit ihren Spitzen im Fokalpunkt zusammen.

3. *Eine durchgehende Krümmungslinie und zwei orthogonale.* Für alle bezüglichen Coordinatensysteme ist $w(u-w)=0$. Der Krümmungslinientypus zeigt eine Combination von ausbiegenden und umbiegenden Krümmungslinien. S. Fig. 4. Beide Evolutenschalen schneiden die Fokalebene.

Der Evolutenwinkel ist $\frac{\pi}{2}$. Die eine Schale ist ohne Kanten, die andere hat eine durch den Fokalpunkt hindurchgehende. Die zwei orthogonalen Krümmungslinien entsprechen Coordinatensystemen $p=q=v=w=0$. Im dritten Coordinatensystem $p=q=v=0$ ist $u=w$ und die Ordnungszahl des Kreispunkts eine gerade. Ist in einem Kreispunkte $w(u-w)=0$ längs der Linie $u=w$ die Ordnungszahl des Kreispunkts eine ungerade, so gehört er dem Typus mit umbiegenden Krümmungslinien bezw. dem Typus mit ausbiegenden Krümmungslinien und $u^2w^2+4w^3u>0$ an, je nachdem längs dieser Linie der erste Differentialquotient der Differenz D_s-D_t welcher von Null verschieden ist, dasselbe Vorzeichen wie w hat oder umgekehrt. Fällt die Linie $u-w=0$ mit einer der orthogonalen Krümmungslinien zusammen, wobei längs dieser nicht nur die Ordnungszahl des Kreispunkts, sondern auch der Osculation mit der Sphäre höher ist, so entstehen besondere Typen.

2. *Kreispunkte zweiter Ordnung.*

Die Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^2D_s}{ds^2}=0$ für die Orientirung der Haupttangenten lautet:

$$\partial^{31}dx^4+(3\partial^{22}-\partial^{40})dx^3dy+3(\partial^{13}-\partial^{31})dx^2dy^2+$$
$$+(\partial^{04}-3\partial^{22})dx\,dy^3-\partial^{13}dy^4=0$$

und in einem Coordinatensystem $p=q=\partial^{31}=0$ gelten für die von der X-Achse berührten Hauptkrümmungslinie die Werthe

$$\Phi=\partial^{40}-3r^3,\qquad \Omega=\partial^{22}-r^3,\qquad \Phi'=\partial^{04}-r^3-\frac{6\Omega^2}{\Phi-\Omega},$$
$$\frac{1}{R_s}=\frac{\partial^{41}}{3(\Phi-2\Omega)},\qquad \frac{dR_t}{ds}=\frac{\Omega-\Phi}{2\Omega}.$$

Die s- und t-Linien der von der XZ-Ebene in diesem Coordinatensystem berührten abwickelbaren Normalfläche bilden im allgemeinen Falle Spitzen im Fokalpunkt, welche bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als der dritten mit denjenigen von semicubischen Parabeln zusammenfallen.

Die der s-Linie entsprechende semicubische Parabel ist

$$9\Phi\xi^2=-8D^4(\zeta-\rho)^3$$

deren Spitze eine Evolute vom Krümmungshalbnesser $+\frac{\Phi}{D^4}$ hat. Dieser Krümmungshalbmesser ist für die t-Linie

$$+\frac{4\Omega^3}{D^4(\Phi-3\Omega)^2}$$

und die Gleichung der ihr entsprechenden semicubischen Parabel

$$9\Omega^3\xi^2=-2D^4(\Phi-3\Omega)^2(\zeta-\rho)^3.$$

Von den Kreispunkten zweiter Ordnung sind diejenigen, welche zwei Symmetrieebene besitzen zugleich die wichtigsten und der Untersuchung am leichtesten zugänglich. Sie haben zwei Coordinatensysteme

$$p=q=\partial^{31}=\partial^{13}=0,$$

in welchen also sowohl die Y- als die X-Achse Haupttangenten sind und können ausserdem noch zwei symmetrisch zu diesen Haupttangenten verlaufenden Krümmungslinien haben. Die geometrischen Grössen, welche die von der X- bezw. Y-Achse in einem solchen Coordinatensystem berührten Hauptkrümmungslinien charakterisiren, mögen mit $\Phi_{1}\,\Phi'_{1}$ bezw. $\Phi_{11}\,\Phi'_{11}$ u. s. w. bezeichnet werden, die für die beiden übrigen gemeinsamen mit $\Phi_{111}\,\Phi'_{111}$ u. s. w. Da nun aber $\Omega_1=\Omega_{11}$ ist, mag für diese Werthe die Bezeichnung Ω gebraucht werden.

In einem Coordinatensystem $p=q=\partial^{31}=\partial^{13}=0$ erhält man für einen beliebigen Normalschnitt

$$\frac{d^2D_s}{ds^2}=\Phi_1\cos^4\vartheta+6\Omega\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta+\Phi_{11}\sin^4\vartheta$$

und für die beiden s_{111}-Linien

$$\operatorname{tg}^2\vartheta=\frac{\Phi_1-3\Omega}{\Phi_{11}-3\Omega}$$

woraus resultirt

$$\Phi_{111}=\frac{\Phi_1\Phi_{11}-9\Omega^2}{\Phi_1+\Phi_{11}-6\Omega}.$$

Die S. 82 angebene Gleichung für $d^nD_s-d^nD_t$ längs einer beliebigen Hauptkrümmungslinie hat die Form

$$\Phi_{111}-\Omega_{111}=2\Omega.$$

Auf der Evolute hat das Krümmungsmass längs der s-Linie einer abwickelbaren Normalfläche entgegengesetztes Vorzeichen gegen dem Produkt $\Phi\Omega$. Als Bedingung für Schnittlinien zwischen Evolute und Fokalebene findet man auf ähnliche Weise wie in den Kreispunkten erster Ordnung

$$\frac{d\eta'}{dy'} = \frac{3\{\Phi_{11}\Omega y'^4 + (\Phi_1\Phi_{11} - 3\Omega^2)y'^2 + \Phi_1\Omega\}}{(\Phi_1 + 3\Omega y'^2)^2}.$$

woraus resultirt

$$y'^2 = \frac{3\Omega^2 - \Phi_1\Phi_{11} \pm \sqrt{(\Phi_1\Phi_{11} - \Omega^2)(\Phi_1\Phi_{11} - 9\Omega^2)}}{2\Phi_{11}\Omega}.$$

Dieser Ausdruck lehrt, dass, wenn Φ_1 und Φ_{11} verschiedenes Vorzeichen haben, für y'^2 immer ein positiver und ein negativer Werth erhalten wird, so dass immer zwei symmetrische Schnittlinien mit der Fokalebene existiren. Wenn alle drei Grössen dasselbe Vorzeichen haben sind bei $\Omega^2 \geqq \Phi_1\Phi_{11}$ vier bezw. zwei Schnittlinien vorhanden. Haben endlich Φ_1 und Φ_{11} dasselbe, Ω aber entgegengesetztes Vorzeichen so muss die Bedingung $\Phi_1\Phi_{11} \geqq 9\Omega^2$ erfüllt sein, wenn Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene vorhanden sein sollen, und man findet dabei wieder vier bezw. zwei dieser Linien, welche immer paarweise symmetrisch zu den orthogonalen Haupttangenten verlaufen.

Von den mittels dieser Hülfsmittel erhaltenen Resultaten gebe ich hier eine kurzgefasste Zusammenstellung, in welcher ich zu meiner a. a. O. gegebenen Darstellung einige durch die Untersuchung der Kantlinien mittelst der Werthe Φ' gewonnene Details hinzugefügt habe.

Kreispunkte zweiter Ordnung mit zwei Symmetrieebenen.

1. *Einlaufende Krümmungslinien der einen Schaar und unkreisende der anderen.* $\Omega(\Phi_1 - \Omega) > 0$, $\Omega(\Phi_{11} - \Omega) > 0$. Zwei oder vier Krümmungslinien, jede zweite beiderseits von anschmiegenden Krümmungslinien umgeben. (Figg. 5 und 6.) Die Evolute bildet zwei geschlossene Trichter auf einer und derselben Seite der Fokalebene. Die eine Schale ist ohne Kanten, die andere hat zwei oder vier durch die Spitze hindurchgehende Kanten je nach der Zahl der vorhandenen Haupttangenten, wie es die Fig. 7 in zur Fokalebene parallelen Schnitten der Evolute andeutet. Doch kann bei Vorhandensein von nur zwei Haupttangenten die eine durch die Spitze hin-

durchgehende Kante in drei zerfallen, so dass vier anstatt zwei Kanten vorhanden sind. In Falle $\Phi_1 = \Phi_{11} = 3\Omega$ besteht eine Berührung höherer Ordnung mit dem Scheitelpunkte einer Umdrehungsfläche, wobei jede Tangente des Kreispunkts eine Haupttangente ist, und eine Vermehrung der Anzahl der Kanten auf der betreffenden Evolutenschale bezw. das Degeneriren dieser in eine Umdrehungsachse stattfindet.

Fig. 5.

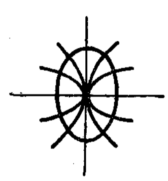


Fig. 6.

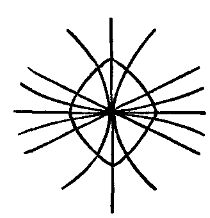
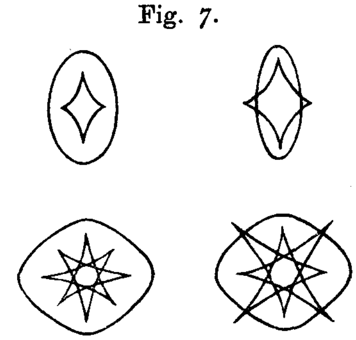


Fig. 7.



2. *Ausbiegende Krümmungslinien.* $\Omega(\Phi_1 - \Omega) < 0$, $\Omega(\Phi_{11} - \Omega) < 0$. Immer vier Haupttangenten, jede zweite einer anderen Schaar angehörend. Die Evolutenschalen bilden entweder zwei geschlossene Trichter, einen auf jeder Seite der Fokalebene, mit je zwei durch die Spitze hindurchgehenden Kanten und positiven Krümmungsmass der Flächen, oder es ist einer der Trichter theilweise durch die Fokalebene hindurch umgebogen, wobei entweder vier Schnittlinien mit der Fokalebene und zwei auf dem nicht umgebogenen Theil durch den Fokalpunkt hindurchgehende Kanten vorhanden sind, oder auch nur zwei Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene existiren, in welchem Falle die Kanten der fraglichen Evolutenschale verschwinden. Im sämmtlichen Typen kann eine Vermehrung der Anzahl der Kanten vorkommen, indem eine Kante in drei zerfallen kann.

3. *Eine durchgehende Krümmungslinie jeder Schaar.*

$$(\Phi_1 - \Omega)(\Phi_{11} - \Omega) < 0.$$

Zwei oder vier Haupttangenten. Im letzteren Falle gehören drei, welche innerhalb eines Winkels von $\frac{\pi}{2}$ verlaufen, einer und derselben Schaar an, wobei die mittlere beiderseits von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet ist (Fig. 8). Die eine Evolutenschale bildet einen geschlossenen Trichter mit einer durch den Fokalpunkt hindurchgehenden Kante. Die andere kann einen auf derselben Seite der Fokalebene gelegenen geschlossenen Trichter mit drei durch den Fokalpunkt hindurchgehenden Kanten bilden, wie es die Fig. 9 in zur Fokalebene parallelen Schnitten andeutet — bei A sind vier Haupttangenten vorhanden, bei B ist für eine Krümmungslinie $\Omega > 0$, $\Phi - 4\Omega > 0$. Bei erheblicher Zunahme dieser Differenz können auch die drei Kanten in der Fig. 9 B in eine nach aussen schauende zusammenfallen. In anderen Fällen ist die fragliche Evolutenschale theilweise durch die Fokalebene hindurch umgebogen, wobei entweder auf der-

Fig. 8.

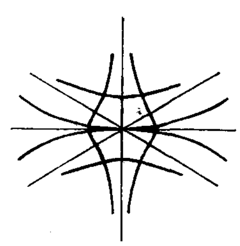
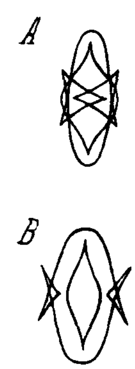


Fig. 9.



selben Seite wie die erste Schale vier Blätter bleiben, von denen zwei eine gemeinsame durch den Fokalpunkt hindurchgehende Kante haben, vier Schnittlinien mit der Fokalebene vorhanden sind, und auf dem umgebogenen Theile zwei Kanten durch den Fokalpunkt gehen, oder aber auf der ursprünglichen Seite der Fokalebene nur zwei Blätter mit einer gemeinsamen durch den Fokalpunkt hindurchgehenden Kante bleiben, nur zwei Schnittlinien mit der Fokalebene vorhanden sind, und keine Kante auf den umgebogenen Theilen verläuft. Der in diese Categorie gehörige Specialfall $\Omega = 0$ bietet eine Evolutenschale auf jeder Seite der Evolute dar mit je einer Kante, deren Tangente in der Fokalebene belegen ist und diejenige der anderen Schale rechtwinkelig schneidet.

4. *Kreispunkte, welche längs einer oder zwei Krümmungslinien von höherer Ordnung als der zweiten sind.* $(\Phi_1 - \Omega)(\Phi_{11} - \Omega) = 0$ oder $\Omega = 0$

bei $\Phi_1 \Phi_{11} > 0$. Diese Fälle, welche man durch Untersuchung des Zusammenfallens von zwei oder mehreren Kreispunkten erster und zweiter Ordnung kennen lernt, bieten verschiedene Combinationen der erwähnten Typen dar.

3. *Kreispunkte höherer Ordnung.*

Aus der Beziehung

$$d^n D\, ds^2 = d^{n+2} z - d^{n+2} z_1$$

erhellt es, da

$$d^{n+2} z - d^{n+2} z_1$$

nur Differentialquotienten der Flächengleichung von der Ordnung $n + 2$ enthält, dass sämmtliche Glieder und folglich auch sämmtliche Wurzeln der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ frei gewählt werden können. Es können also sämmtliche Wurzeln reell sein. Dabei muss aber in jedem Coordinatensystem $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1} \partial y} = 0$, in welchem die Gleichung die Form

$$0 = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+2}} - \frac{\partial^{n+2} z_1}{\partial x^{n+2}} + \frac{(n+2)(n+1)}{2} \left(\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^n \partial y^2} - \frac{\partial^{n+2} z_1}{\partial x^n \partial y^2} \right) \operatorname{tg}^2 \vartheta + \dots$$

hat, wegen der Bedeutung der Coefficienten, $\frac{d^n D_s}{ds^n} \cdot \frac{d^n D_t}{ds^n} < 0$ sein. Da nun wenigstens eine Linie $\frac{d}{d\vartheta} \frac{d^n D}{ds^n} = 0$ d. h. eine Hauptkrümmungslinie immer zwischen zwei Linien $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ belegen sein muss, so findet man, dass unabhängig von der Ordnungszahl des Kreispunkts immer ein Typus existirt mit $n + 2$ Hauptkrümmungslinien, von welchen jede zweite einer anderen Schaar angehört, mit allseitig ausbiegendem Krümmungslinientypus und positivem Krümmungsmass der Evolute längs den s-Linien der abwickelbaren Normalflächen, und in welchem die Evolute zwei geschlossene sich gegenseitig mit den Spitzen im Fokalpunkt berührende Trichter mit $n + 2$ Kanten bilden, einen auf jeder Seite der Fokalebene.

In den Kreispunkten ungerader Ordnung ist die Zahl der Glieder in den Gleichungen $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ und $\frac{d}{d\vartheta} \frac{d^n D}{ds^n} = 0$ eine gerade, und jedes Glied mit gerader Ordnungszahl der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ enthält zwei Glieder mit ungerader Ordnungszahl der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$, das letzte ausgenommen, welches nur das vorletzte Glied dieser Gleichung enthält. Auf dieselbe Weise enthält jedes Glied ungerader Ordnungszahl der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$, das erste ausgenommen, zwei Glieder der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$, und zwar in der Weise, dass sämmtliche Coefficienten und folglich auch sämmtliche Wurzeln der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ frei gewählt werden können, wobei auch sämmtliche Glieder der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ eindeutig bestimmt werden. Man kan also erstere Gleichung so wählen, dass nur eine reelle Wurzel existirt. Es resultirt für alle Kreispunkte ungerader Ordung ein Typus mit nur einer Krümmungslinie, umbiegendem Krümmungslinientypus und einer Evolute, welche aus zwei die Fokalebene schneidenden Schalen mit wenigstens je einer im Fokalpunkte endigenden Kante besteht.

In den Kreispunkten gerader Ordnung ist die Anzahl der Glieder in den Gleichungen $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ und $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ eine ungerade, woraus folgt, dass in letzterer Gleichung wohl alle Glieder gerader Ordnungszahl, nicht aber alle Glieder ungerader Ordnungszahl frei gewählt werden können, sowie dass die Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ nicht durch die Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ eindeutig bestimmt ist. Wenn aber sämmtliche Glieder gerader Ordnungszahl in der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ gleich Null sind, so sind auch sämmtliche Glieder ungerader Ordnungszahl der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ Null, und die übrigen Glieder können frei gewählt werden. Setzt man alle diese Glieder mit Ausnahme der zweiten und der vorletzten gleich Null, so nimmt diese Gleichung die Form

$$\left((n+1)\frac{d^n D_t}{ds_1^n} - \frac{d^n D_s}{ds_1^n}\right)\cos^{n+1}\vartheta \sin\vartheta - \left((n+1)\frac{d^n D_t}{ds_{11}^n} - \frac{d^n D_s}{ds_{11}^n}\right)\cos\vartheta \sin^{n+1}\vartheta = 0$$

an, wobei mit s_1 bezw. s_{11} die mit der X- bezw. Y-Achse zusammenfallende Krümmungslinie bezeichnet wird. Da nun die betreffenden Glieder der Gleichung $\frac{d^n D_s}{ds^n} = 0$ erst dann bestimmt werden, wenn noch eine Beziehung zwischen den vier in obiger Gleichung enthaltenen Grössen eingeführt wird, so kann man, wenn mit k eine beliebige Zahl gemeint wird, eine der Bedingungen

$$\frac{d^n D_s}{ds_1^n} - \frac{d^n D_t}{ds_1^n} = \pm k^2 \left(\frac{d^n D_s}{ds_{11}^n} - \frac{d^n D_t}{ds_{11}^n} \right)$$

benutzen, woraus dann erhellt, dass bei Kreispunkten gerader Ordnung immer sowohl ein Typus mit zwei einlaufenden Krümmungslinien der einen Schaar und umkreisenden der anderen wie ein Typus mit einer durchgehenden Krümmungslinie jeder Schaar vorkommt.

Wie man ersieht, kehren in den Kreispunkten höherer Ordnung die in den Kreispunkten erster und zweiter Ordnung vorkommenden Haupttypen wieder. Es lässt sich aber erwarten, dass die Zwischenformen mit steigender Ordnungszahl der Kreispunkte immer complicirter werden.

4. *Linien sphärischer Krümmung.*

Von diesen giebt es zwei Hauptformen: solche mit variirender und solche mit constanter sphärischer Krümmung. Erstere Form besteht aus einer unendlichen Reihe von Kreispunkten erster Ordnung mit einer durchgehenden Krümmungslinie und zwei orthogonalen. Die Krümmungslinien jeder Schaar schneiden also, unter sich orthogonal, die Linie sphärischer Krümmung unter endlichen Winkeln, biegen aber in den Schnittpunkten rechtwinkelig um. Die Schnittlinie der Fläche

$$z = \frac{1}{2a} \left(x^2 + \frac{a^2 y^2}{x^2 + a^2} \right)$$

mit der XZ-Ebene giebt ein Beispiel für eine solche Linie ab.

Linien constanter sphärischer Krümmung kommen auf Umdrehungsflächen vor, und sind von Kreispunkten zusammengesetzt, welche längs dem Meridiane von gerader oder ungerader Ordnung sind, je nachdem die Evolute dieser Linie im betreffenden Krümmungsmittelpunkt eine Spitze hat oder nicht. In ersten Falle gehören die Meridiane auf beiden Seiten der Linie sphärischer Krümmung derselben Schaar an, im letzteren biegen die Krümmungslinien beiderseits rechtwinkelig in die Linie sphärischer Krümmung um, und die Meridiane auf der einen Seite gehören derselben Schaar an wie die Parallelkreise auf der anderen, wobei die Umdrehungsachse aus Theilen beider Evolutenschalen entstanden ist.