ÉTUDE D'UNE FONCTION ENTIÈRE

PAR

J. MALMQUIST

à STOCKHOLM.

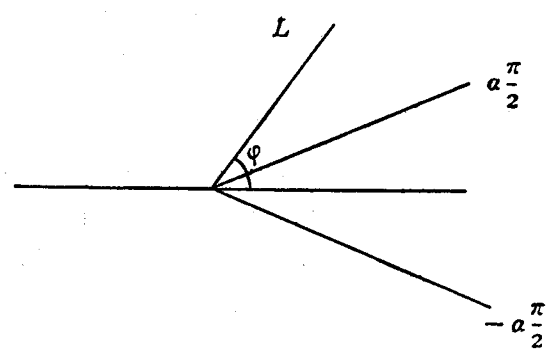
Les recherches de mon Professeur, M. MITTAG-LEFFLER, sur les séries [1]

$$E_a(x) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{x^\nu}{\Gamma(1 + a\nu)}$$

ont montré l'existence d'une fonction entière $E_a(x)$ ayant la propriété suivante rélative à la croissance de la fonction le long de vecteurs issus de l'origine. Si φ est un nombre réel satisfaisant à la condition

$$a\frac{\pi}{2} < \varphi < 2\pi - a\frac{\pi}{2}$$

$E_a(x)$ tendra vers zéro, si nous ferons croître x le long du vecteur L faisant l'angle φ avec l'axe réel est positif.



[1] Acta mathematica, t. 29.

Ce résultat fait probable l'existence d'une fonction entière ne devenant infinie que le long d'un seul vecteur issu de l'origine, et il est naturel de la chercher parmi les fonctions

$$\sum_\nu \frac{x^\nu}{\Gamma(1 + \nu\alpha_\nu)}$$

où α_ν est une fonction de ν tendant vers zero avec $\frac{1}{\nu}$,

Nous prendrons

$$\alpha_\nu = \frac{1}{(\log \nu)^\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

et nous allons démontrer que *la fonction entière*

$$G(x) = \sum_{2}^{\infty}{}_\nu \frac{x^{\nu-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{(\log \nu)^\alpha}\right)}$$

tend vers zéro, si x tend vers l'infini le long d'un vecteur issu de l'origine ne coïncidant pas avec l'axe réel et positif.

D'abord, il est évident que $G(x)$ représente une fonction entière, car, la fonction $\Gamma(1 + n)$ croissant approximativement comme n^n, nous avons

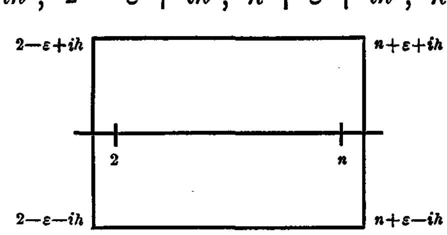
$$\lim_{\nu=\infty} \left\{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{(\log \nu)^\alpha}\right)\right\}^{\frac{1}{\nu}} = \lim_{\nu=\infty} e^{\frac{1}{(\log\nu)^\alpha}\log\frac{\nu}{(\log\nu)^\alpha}} = \infty.$$

Pour démontrer la propriété énoncée de $G(x)$ concernant la croissance, considérons avec M. Mittag-Leffler l'intégrale [1]

$$\int_R \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{x^{z-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{z}{(\log z)^\alpha}\right)} dz$$

pris suivant un rectangle R ayant comme sommets les points

$$2 - \varepsilon - ih\,, \quad 2 - \varepsilon + ih\,, \quad n + \varepsilon + ih\,, \quad n + \varepsilon - ih.$$



[1] loc. cit.

Nous choisirons la détermination de $(\log z)^\alpha$ que l'on obtiendra de la valeur réelle pour une valeur réelle de z par extension analytique le long d'un chemin situé dans R. Alors on trouvera facilement la valeur

$$\sum_{2}^{n}{}_{\nu} \frac{x^{\nu-2}}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{(\log \nu)^\alpha}\right)}$$

de l'intégrale considerée, car les seules singularités de la fonction sous le signe $\int$ situées dans R sont

$$2, 3, \ldots, n$$

et les résidus correspondants

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{2}{(\log 2)^\alpha}\right)}, \quad \frac{1}{2\pi i}\frac{x}{\Gamma\left(1+\frac{3}{(\log 3)^\alpha}\right)}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2\pi i}\frac{x^{n-2}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{(\log n)^\alpha}\right)}.$$

Ensuite, en posant

$$z = \tau + it$$

nous aurons

$$\frac{z}{(\log z)^\alpha} = \frac{\tau + it}{\left(\log\sqrt{\tau^2+t^2} + i \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\tau}\right)^\alpha} = \frac{\tau + it}{\rho^\alpha(\cos\alpha\theta + i\sin\alpha\theta)} = R(\tau, t) + iI(\tau, t)$$

avec

$$\rho = \sqrt{(\log\sqrt{\tau^2+t^2})^2 + \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\tau}\right)^2},$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\tau}}{\log\sqrt{\tau^2+t^2}},$$

$$R(\tau, t) = \frac{1}{\rho^\alpha}(\tau\cos\alpha\theta + t\sin\alpha\theta),$$

$$I(\tau, t) = \frac{1}{\rho^\alpha}(-\tau\sin\alpha\theta + t\cos\alpha\theta)$$

les arc tg demeurant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Pour avoir une expression de la fonction $G(x)$, nous ferons croître R c'est-à-dire h et n d'une manière convenable déterminée de la façon suivante. Écrivons l'égalité évidente

$$\int_R = \int_{2-\varepsilon-ih}^{n+\varepsilon-ih} + \int_{n+\varepsilon-ih}^{n+\varepsilon+ih} + \int_{n+\varepsilon+ih}^{2-\varepsilon+ih} + \int_{2-\varepsilon+ih}^{2-\varepsilon-ih}$$

et cherchons à faire croître h et n de manière que les trois premières intégrales rectilignes tendent vers zéro.

Étudions d'abord l'intégrale

$$I_1 = \int_{n+\varepsilon-ih}^{n+\varepsilon+ih} \frac{1}{e^{2\pi i z}-1} \frac{x^{z-2}}{\Gamma\left(1+\frac{z}{(\log z)^a}\right)} dz$$

qui est égale à

$$i\int_{-h}^{+h} \frac{1}{e^{2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1} \frac{x^{n+\varepsilon-2}x^{it}}{\Gamma(1+R(n+\varepsilon,t)+iI(n+\varepsilon,t))} dt.$$

Nous aurons une valeur approchée de cette intégrale en observant que l'inégalité

$$R(\tau,t)>0$$

a lieu pour toutes les valeurs de τ, t en question; car t et θ ont mêmes signes, si $\tau>0$. Alors l'inégalité

$$\left|\frac{1}{\Gamma(1+R(n+\varepsilon,t)+iI(n+\varepsilon,t))}\right|$$

$$\leqq \frac{1}{\Gamma(1+R(n+\varepsilon,t))}\sqrt{\frac{e^{\pi I(n+\varepsilon,t)}-e^{-\pi I(n+\varepsilon,t)}}{2\pi I(n+\varepsilon,t)}}$$

est vraie pour toutes les valeurs de t entre $-h$ et $+h$, car nous avons [1]

---

[1] loc. cit.

$$\frac{1}{\Gamma(1+\tau+it)\Gamma(1+\tau-it)}$$

$$= e^{C(\tau+it)}\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{\tau+it}{\nu}\right)e^{-\frac{\tau+it}{\nu}}e^{C(\tau-it)}\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{\tau-it}{\nu}\right)e^{-\frac{\tau-it}{\nu}}$$

$$= e^{2C\tau}\left\{\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{\tau}{\nu}\right)e^{-\frac{\tau}{\nu}}\right\}^2\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{t^2}{(\tau+\nu)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma(1+\tau)}\right)^2\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{t^2}{\nu^2}\right)\frac{\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{t^2}{(\tau+\nu)^2}\right)}{\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{t^2}{\nu^2}\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma(1+\tau)}\right)^2\frac{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}{2\pi t}\frac{\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{t^2}{(\tau+\nu)^2}\right)}{\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{t^2}{\nu^2}\right)}.$$

En posant

$$x = re^{i\varphi}$$

nous concluons de là que la valeur absolue de I_1 est au plus égale à

$$M_1 = \operatorname*{Max}_{t=-h+\dots+h}\left\{\frac{2h}{|e^{2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1|}\frac{r^{n+\varepsilon-2}e^{-\varphi t}}{\Gamma(1+R(n+\varepsilon,t))}\sqrt{\frac{e^{\pi I(n+\varepsilon,t)}-e^{-\pi I(n+\varepsilon,t)}}{2\pi I(n+\varepsilon,t)}}\right\}.$$

Supposons que le maximum a lieu pour $t=t_n$. Faisons ensuite croître h et n d'une manière convenable. Nous allons voir qu'il est suffisant de poser

$$h=\frac{n}{(\log n)^\beta},\qquad 0<\beta<1.$$

En effet, observons d'abord que l'on a

$$\lim_{n=\infty}\frac{t_n}{n}=0$$

d'où

$$\lim_{n=\infty}\theta(n+\varepsilon,t_n)=0,$$

$$\rho(n+\varepsilon,t_n)=\log n(1+\varepsilon_n)$$

où

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0;$$

(Dans la suite nous entendrons toujours par ε_n une quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$)

par suite

$$R(n+\varepsilon, t_n) = \frac{n}{(\log n)^\alpha}(1+\varepsilon_n)$$

et

$$\Gamma(1 + R(n+\varepsilon, t_n)) = e^{n(\log n)^{1-\alpha}(1+\varepsilon_n)}$$

car

$$\Gamma(1+n) = e^{n\log n(1+\varepsilon_n)};$$

de l'égalité

$$2\frac{n}{(\log n)^\beta} r^{n+\varepsilon-2} = e^{n\log r(1+\varepsilon_n)}$$

et du fait que r est constant nous concluons enfin

$$\frac{2\frac{n}{(\log n)^\beta} r^{r+\varepsilon-2}}{\Gamma(1+R(n+\varepsilon, t_n))} = e^{-n(\log n)^{1-\alpha}(1+\varepsilon_n)}.$$

Pour avoir maintenant la valeur limite de M_1 quand n croît indéfiniment, il nous faut distinguer trois cas différents. Il pourrait arriver que pour certaines valeurs n' de n indéfiniment croissantes

$$\lim_{n'=\infty} \frac{t_{n'}}{n' \sin\alpha\theta(n'+\varepsilon, t_{n'})} = \infty.$$

Alors, le deuxième terme de l'expression de $I(n'+\varepsilon, t_{n'})$ en déterminera la croissance, d'où

$$I(n'+\varepsilon, t_{n'}) = \frac{t_{n'}}{(\log n')^\alpha}(1+\varepsilon_{n'}) = \frac{n'}{(\log n')^\alpha}\varepsilon_{n'}$$

car

$$t_{n'} = \varepsilon_{n'} n'.$$

Dans le deuxième cas nous aurons

$$\lim_{n''=\infty} \frac{t_{n''}}{n'' \sin \alpha\theta(n'' + \varepsilon, t_{n''})} = 0;$$

alors le premier terme de $I(n'' + \varepsilon, t_{n''})$ déterminera la croissance, d'où nous concluons

$$I(n'' + \varepsilon, t_{n''}) = \frac{n''}{(\log n'')^{\alpha}} \varepsilon_{n''}$$

comme précedemment, car $\sin \alpha\theta$ tend vers zéro.

Enfin nous aurons à considérer les valeurs n''' de n indéfiniment croissantes et telles que

$$\lim_{n'''=\infty} \frac{t_{n'''}}{n''' \sin \alpha\theta(n''' + \varepsilon, t_{n'''})} = k \qquad (k \text{ positif fini}).$$

Alors, nous pouvons employer ou bien le premier ou bien le deuxième raisonnement, mais comme ils conduisent tous les deux au même résultat, il est démontré, que l'on a pour toutes les valeurs de n indéfiniment croissantes

$$I(n + \varepsilon, t_n) = \frac{n}{(\log n)^{\alpha}} \varepsilon_n.$$

De là nous concluons

$$\sqrt{\frac{e^{\pi I(n+\varepsilon, t_n)} - e^{-\pi I(n+\varepsilon, t_n)}}{2\pi I(n + \varepsilon, t_n)}} = e^{\frac{n}{(\log n)^{\alpha}} \varepsilon_n}$$

par suite

$$\lim_{n=\infty} \frac{2^{\frac{n}{(\log n)^{\beta}}} r^{n+\varepsilon-2}}{\Gamma(1 + R(n + \varepsilon, t_n))} \sqrt{\frac{e^{\pi I(n+\varepsilon, t_n)} - e^{-\pi I(n+\varepsilon, t_n)}}{2\pi I(n + \varepsilon, t_n)}} = 0.$$

Il reste à étudier

$$\frac{e^{-\varphi t_n}}{|e^{2\pi i\varepsilon - 2\pi t_n} - 1|};$$

pour des valeurs de n indéfiniment croissantes telles que t_n reste plus petit qu'un nombre fixe, cette expression restera aussi plus petite qu'un certain nombre fixe, pour des valeurs de n telles que

$$\lim_{n=\infty} t_n = +\infty$$

elle tendra vers zéro, si l'on a

$$\varphi > 0,$$

enfin, pour des valeurs de n telles que

$$\lim_{n=\infty} t_n = -\infty$$

elle tendra vers zéro, si

$$\varphi < 2\pi.$$

Par conséquent, h et n croissant de la manière indiquée, l'intégrale I_1 tendra vers zéro, si φ satisfait à la seule condition

$$0 < \varphi < 2\pi.$$

Passons maintenant à l'étude de l'intégrale

$$I_2 = \int_{2-\varepsilon+ih}^{n+\varepsilon+ih} \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{x^{z-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{z}{(\log z)^a}\right)} dz;$$

il est égale à

$$\int_{2-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \frac{1}{e^{2\pi i\tau - 2\pi h} - 1} \frac{x^{\tau-2} x^{ih}}{\Gamma(1 + R(\tau, h) + iI(\tau, h))} d\tau.$$

Sa valeur absolue est donc au plus égale à

$$M_2 = \underset{\tau=2-\varepsilon \dots n+\varepsilon}{\mathrm{Max}} \left\{ \frac{1}{|e^{2\pi i\tau - 2\pi h} - 1|} \int_{2-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \frac{r^{\tau-2}}{\Gamma(1 + R(\tau, h))} d\tau . e^{-\varphi h} \sqrt{\frac{e^{\pi I(\tau, h)} - e^{-\pi I(\tau, h)}}{2\pi I(\tau, h)}} \right\}.$$

L'intégrale

$$\int_{2-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \frac{r^{\tau-2}}{\Gamma(1 + R(\tau, h))} d\tau$$

qui se présente ici, tend vers zéro, h et n croissant de la façon supposée. En effet, en désignant par $\tau_{h,n}$ une valeur entre h et n, nous aurons

$$R(\tau_{h,n}, h) = \frac{\tau_{h,n}(1 + \varepsilon_n)}{(\log \tau_{h,n})^a} \geqq k \frac{h}{(\log n)^a} = k \frac{n}{(\log n)^{a+\beta}} \qquad (k \text{ fixe})$$

le premier terme de $R(\tau_{h,n}, h)$ déterminant la croissance, car θ tend vers zéro. Donc

$$\int_{2-\varepsilon}^{n+\varepsilon} = \int_{h}^{n+\varepsilon} + \int_{2-\varepsilon}^{h} \leq k' \frac{nr^n}{\Gamma(1 + R(\tau_{h,n}, h))} + \operatorname*{Max}_{\tau=2-\varepsilon\ldots h} \frac{hr^{\tau-2}}{\Gamma(1 + R(\tau, h))} \quad (k' \text{ fixe})$$

$$\leq k'' \frac{nr^n}{e^{n(\log n)^{1-\alpha-\beta}(1+\varepsilon_n)}} + M \quad (k'' \text{ fixe})$$

$$= \varepsilon_n + M,$$

si $\alpha + \beta < 1$, ce que nous supposons.

Soit τ_h la valeur de τ pour laquelle le maximum M aura lieu. Pour évaluer la limite de M il est suffisant de considérer deux cas. En premier lieu, pour les valeurs h' de h telles que

$$\operatorname*{Lim}_{h'=\infty} \frac{\tau_{h'}}{h' \sin \alpha\theta(\tau_{h'}, h')} = 0$$

nous aurons

$$\theta(\tau_{h'}, h') = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \varepsilon_{h'}}{\log h'}$$

$$\tau_{h'} = \frac{h'}{\log h'} \varepsilon_{h'};$$

en effet

$$\tau_{h'} = h' \varepsilon_{h'},$$

d'où

$$\theta(\tau_{h'}, h') = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \varepsilon_{h'}}{\log \sqrt{\tau_{h'}^2 + h'^2}} = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \varepsilon_{h'}}{\log h'};$$

ensuite, la condition imposée à h' donne la valeur assignée de $\tau_{h'}$.

La valeur trouvée de $\theta(\tau_{h'}, h')$ montre que le seconde terme de l'expression de $R(\tau_{h'}, h')$ détermine la croissance de cette fonction. Comme d'ailleurs

$$\rho(\tau_{h'}, h') = \log h'(1 + \varepsilon_{h'})$$

nous trouverons donc

$$R(\tau_{h'}, h') = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{h'(1 + \varepsilon_{h'})}{(\log h')^{1+\alpha}},$$

d'où enfin

$$\frac{h' r^{\tau_{h'}-2}}{\Gamma(\text{I} + R(\tau_{h'}, h'))} = \frac{h' r^{\tau_{h'}}}{e^{\alpha\frac{\pi}{2}\frac{h'}{(\log h')^\alpha}(1+\varepsilon_{h'})}} = e^{-\alpha\frac{\pi}{2}\frac{h'}{(\log h')^\alpha}(1+\varepsilon_{h'})}$$

Examinons maintenant le cas où h'' satisfait à la condition

$$\operatorname*{Lim}_{h''=\infty} \frac{\tau_{h''}}{h'' \sin \alpha\theta(\tau_{h''}, h'')} \neq 0.$$

Alors

$$\tau_{h''} = K(h'') \frac{h''}{\log h''}$$

où

$$\operatorname*{Lim}_{h''=\infty} K(h'') > 0,$$

car l'inégalité

$$\tau_h \leqq h$$

entraine

$$\theta(\tau_h, h) = \frac{\overline{K}(h)}{\log h} \quad \text{avec} \quad 0 < \overline{K}(h) < k \qquad (k \text{ fixe})$$

pour toutes les valeurs de h suffisamment grandes.

Il suit de là que

$$\tau_{h''} \cos \alpha\theta(\tau_{h''}, h'') + h'' \sin \alpha\theta(\tau_{h''}, h'')$$
$$= K_2(h'') \frac{h''}{\log h''} + \overline{K}_1(h'') \frac{h''}{\log h''} = K_3(h'') \frac{h''}{\log h''},$$

K_2 et K_3 satisfaisant à la même condition que K, $\overline{K}_1$ ayant la même propriété que $\overline{K}$.

Comme d'ailleurs

$$\rho(\tau_{h''}, h'') = \log h'' (\text{I} + \varepsilon_{h''})$$

nous trouverons

$$R(\tau_{h''}, h'') = K_3(h'') \frac{h''}{(\log h'')^{1+\alpha}} (\text{I} + \varepsilon_{h''})$$

et enfin

$$\frac{h'' r^{\tau_{h''}-2}}{\Gamma(1 + R(\tau_{h''}, h''))} = \frac{e^{\log r K(h') \frac{h''}{\log h''}(1+\varepsilon_{h''})}}{e^{K_3(h') \frac{h''}{(\log h'')^{\alpha}}(1+\varepsilon_{h''})}} = \varepsilon_{h''}$$

car nous avons

$$K_3 = \overline{K}_1 + K_2 = \overline{K}_1 + K(1 + \varepsilon_{h''}) > K.$$

Il résulte de ces considérations que l'intégrale

$$\int_{2-\varepsilon}^{h} \frac{r^{\tau-2}}{\Gamma(1 + R(\tau, h))} d\tau$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{h}$; donc

$$\lim_{n=\infty} \int_{2-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \frac{r^{\tau-2}}{\Gamma\left(1 + R\left(\tau, \frac{n}{(\log n)^{\beta}}\right)\right)} d\tau = 0.$$

Ensuite, observons que dans l'expression M_2

$$I(\tau, h) = h\varepsilon_h,$$

car nous avons

$$0 \leqq \tau \sin \alpha\theta < (n+1)\theta < k\frac{n}{\log h} < k'\frac{n}{\log n} = h\varepsilon_h \qquad (k, k' \text{ fixe})$$

pour les grandes valeurs de n, d'où

$$-\tau \sin \alpha\theta + h \cos \alpha\theta = k'' h(1 + \varepsilon_h) \qquad (k'' \text{ fixe}).$$

Par suite, nous aurons

$$\lim_{h=\infty} \frac{e^{-\varphi h}}{e^{2\pi i \tau - 2\pi h} - 1} \sqrt{\frac{e^{\pi I(\tau, h)} - e^{-\pi I(\tau, h)}}{2\pi I(\tau, h)}} = 0$$

si

$$\varphi > 0$$

d'où l'on conclut que l'intégrale I_2 tend vers zéro, h et n croissant de la façon supposée.

De même, nous pouvons démontrer que sous la condition

$$\varphi < 2\pi$$

cette propriété appartient aussi à la troisième intégrale I_3 que l'on obtient de I_2 en changeant h en $-h$; car nous avons

$$R(\tau, -h) = R(\tau, h)$$

et

$$I(\tau, -h) = h\varepsilon_h$$

comme précédemment.

Nous arrivons ainsi au résultat que, sous la seule condition

$$0 < \varphi < 2\pi$$

les intégrales I_1, I_2, I_3 tendront vers zéro, le rectangle R se grandissant d'une manière convenable. De là nous concluons que *l'égalité*

$$G(x) = \lim_{h=\infty} \int\limits_{2-\varepsilon+ih}^{2-\varepsilon-ih} \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{x^{z-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{z}{(\log z)^\alpha}\right)} dz$$

$$= \lim_{h=\infty} i \int\limits_{+h}^{-h} \frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon - 2\pi t} - 1} \frac{x^{-\varepsilon+it}}{\Gamma\left(1 + \frac{2-\varepsilon+it}{(\log(2-\varepsilon+it))^\alpha}\right)} dt$$

a lieu sous cette même condition.

Par suite, nous aurons

$$|G(x)|$$

$$\leq \lim_{h=\infty} \left[\int\limits_{-h}^{+h} \frac{1}{|e^{-2\pi i\varepsilon - 2\pi t} - 1|} \frac{r^{-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{\Gamma(1 + R(2-\varepsilon, t))} \sqrt{\frac{e^{\pi I(2-\varepsilon, t)} - e^{-\pi I(2-\varepsilon, t)}}{2\pi I(2-\varepsilon, t)}} dt + \varepsilon_h \right]$$

$$= r^{-\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|e^{-2\pi i\varepsilon - 2\pi t} - 1|} \frac{e^{-\varphi t}}{\Gamma(1 + R(2-\varepsilon, t))} \sqrt{\frac{e^{\pi I(2-\varepsilon, t)} - e^{-\pi I(2-\varepsilon, t)}}{2\pi I(2-\varepsilon, t)}} dt$$

l'intégrale dans le dernier membre étant convergent, car nous avons

$$R(2-\varepsilon, t) = a\frac{\pi}{2}\frac{|t|}{(\log|t|)^{1+a}}(1+\varepsilon_t),$$

$$I(2-\varepsilon, t) = \frac{t}{(\log|t|)}(1+\varepsilon_t)$$

d'où

$$\frac{1}{\Gamma(1+R(2-\varepsilon, t))}\sqrt{\frac{e^{\pi I(2-\varepsilon, t)}-e^{-\pi I(2-\varepsilon, t)}}{2\pi I(2-\varepsilon, t)}}$$

$$= e^{-a\frac{\pi}{2}\frac{|t|}{(\log|t|)^a}(1+\varepsilon)+\frac{\pi}{2}\frac{t}{(\log|t|)^a}(1+\varepsilon_t')} = e^{t\varepsilon_t}$$

comme dans le second cas traité plus haut. Par suite, nous pouvons écrire

$$|G(x)| < r^{-\varepsilon}M(\varphi) \quad \text{si} \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

et alors, $M(\varphi)$ a la propriété d'être plus petit qu'un nombre fixe pour toutes les valeurs de φ satisfaisant à la condition

$$\varepsilon_1 < \varphi < 2\pi - \varepsilon_1,$$

ε_1 étant une certaine quantité positive. Il suit de là que $G(x)$ *tend uniformément vers zéro quand x s'éloigne à l'infini dans un angle déterminé par l'inégalité*

$$\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit.

Au contraire, quand x s'éloigne à l'infini le long de l'axe réel et positif, $G(x)$ croit au delà de toute limite comme le montre la forme de la série représentant $G(x)$. Par une méthode directe on pourrait obtenir une valeur approchée de $G(x)$, mais cela est sans interêt en vertu d'un beau théorème de M. PHRAGMÉN [1] qui contient comme cas particulier le résultat qu'aucune fonction entière ayant la même propriété que $G(x)$ rélative à la croissance le long de vecteurs ne coinsidant pas avec l'axe réel et positif ne peut être de genre fini.

---

[1] Acta mathematica, t. 29. Théorème I.