# SUR LA MÉTHODE HORISTIQUE DE GYLDÉN

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

## *Introduction.*

GYLDÉN a rendu de très grands services à la Science; il a créé un certain nombre de méthodes nouvelles qui ont pu être appliquées avec succès et dans certains cas substituées avec avantage aux anciens procédés. La plupart des méthodes qu'il a proposées dans ses premiers écrits étaient correctes; HARZER et BRENDEL en ont tiré une théorie des petites planètes. Ces méthodes, à la vérité, n'étaient pas sans inconvénient, elles donnaient lieu à une foule de complications inutiles; au lieu de prendre le temps pour variable indépendante, elles prennent la longitude vraie, ou des variables auxiliaires peu différentes de cette longitude, elles introduisent une foule de variables parasites et encombrantes. Il en résulte que les équations perdent leur forme canonique, et que, si l'on veut simplement écrire par exemple l'équation des forces vives, il faut se livrer à des calculs interminables. J'estime donc que ces méthodes, quelque intéressantes qu'elles aient été autrefois, n'ont plus aujourd'hui qu'un intérêt historique, et qu'on ne saurait plus en recommander l'emploi, parce que maintenant il y en a d'autres, comme par exemple celles de HILL et de BROWN qui ont les mêmes avantages sans avoir les mêmes inconvénients.

Plus tard GYLDÉN est entré dans une voie nouvelle et a abouti à des résultats qu'il a rassemblés dans son ouvrage *Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes,* Stockholm 1892. Moins heureux que dans ses premiers travaux, il s'est cette fois complètement trompé.

Considérons une équation différentielle quelconque, faisons pager certains termes dans le 1$^{er}$ membre, d'autres dans le 2$^{d}$. En 1$^{ere}$ approximation, nous remplacerons *dans le* 2$^{d}$ *membre* les fonctions inconnues par zéro et nous intégrerons les équations ainsi obtenues; en 2$^{de}$ approximation nous remplacerons *dans le* 2$^{d}$ *membre* les fonctions inconnues par leurs valeurs de 1$^{ère}$ approximation, et ainsi de suite. Tel est le principe fondamental des nouvelles méthodes d'approximation de Gyldén, comme des anciennes et nous le retrouverons partout.

Ce principe est légitime, mais à une condition, c'est que les termes relégués dans le 2$^{d}$ membre et négligés en 1$^{ère}$ approximation soient notablement plus petits ou moins importants que les termes conservés dans le 1$^{er}$ membre. Sans cela, il est clair que le développement ne sera pas convergent. Nous aurons donc à examiner si l'analyse de Gyldén satisfait à cette condition.

On sait que dans les méthodes ordinaires de la mécanique céleste, on voit s'introduire ce qu'on appelle de petits diviseurs, de sorte que le coefficient de certains termes prend la forme

$$\frac{b}{p^2}$$

$p$ étant très petit, et deviennent infinis quand $p$ s'annule. Gyldén s'efforce de prouver qu'un calcul plus exact doit donner:

$$\frac{b}{\nu^2 + p^2}$$

$\nu$ étant une quantité qui ne s'annule pas, de sorte que le coëfficient ne devient pas infini et reste même très petit. C'est ce qu'il appelle la méthode horistique, ainsi nommée d'un mot grec d'où vient également horizon.

Il cherche à tirer de là diverses conséquences:

1° Que les séries obtenues en mécanique céleste sont convergentes si l'on tient compte des termes horistiques.

2° Que les termes d'ordre élevé de la fonction perturbatrice ne sauraient donner lieu au phénomène connu sous le nom de libration.

Ces conséquences sont manifestement fausses; mais j'ai cru longtemps que l'erreur provenait simplement de ce que Gyldén ne se doutait pas de ce que les géomètres appellent une série convergente et des précautions minutieuses qu'il faut prendre dans une démonstration de convergence.

Je croyais que, si GYLDÉN est protégé contre la critique par son obscurité même, cette obscurité empêcherait également qu'on cherchât à appliquer ses méthodes qui deviendraient ainsi inoffensives et tomberaient dans l'oubli après sa mort.

Je me trompais; d'abord ses erreurs commencent, comme nous le verrons bientôt, dès le début de son analyse; on ne peut donc le prendre pour guide, non seulement pour démontrer la convergence des développements, mais même pour en calculer approximativement les 1ers termes. De plus, certaines personnes ont voulu appliquer ces méthodes à des problèmes pratiques, et elles ont été naturellement conduites à l'erreur. D'autres ont repris les affirmations de GYLDÉN sur la convergence des séries et les ont présentées comme des vérités établies.

Il devenait donc nécessaire d'analyser dans ses détails l'ouvrage cité *Nouvelles Recherches*... et d'en discuter les conclusions. C'est là l'objet du présent travail, nous suivrons pas à pas l'ouvrage de GYLDÉN et nous en examinerons successivement chaque chapitre.

J'aurais voulu conserver les notations de GYLDÉN; mais elles sont tellement compliquées et tellement changeantes que je n'en ai pas eu le courage. Je donne cependant des indications suffisantes pour qu'on puisse passer facilement d'une notation à l'autre.

Dans les citations, quand je renvoie à une page ou à un paragraphe désigné par le signe § ou N° suivi d'un numéro, il faut entendre la page ou le paragraphe de l'ouvrage de GYLDÉN *Nouvelles Recherches*.... Quand je renvoie à un paragraphe en écrivant le mot paragraphe en toutes lettres, il s'agit d'un paragraphe du présent travail. Enfin quand je renvoie à mon ouvrage *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste,* Paris, Gauthier Villars, j'écris simplement *Méthodes Nouvelles.*

---

## *Analyse du Chapitre Premier.*

Le Chapitre 1er est consacré à l'équation

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \alpha)\rho - \beta\rho^3 = -\gamma \cos v. \tag{1}$$

GYLDÉN applique à cette équation 4 méthodes différentes dont une fondée sur l'emploi des coëfficients indéterminés et 3 sur l'emploi des fonctions elliptiques.

Mais avant d'aller plus loin, disons quels sont les résultats qui sont démontrés au sujet de cette équation et que GYLDÉN aurait dû retrouver. Si l'on applique à l'équation (1) la méthode de la variation des constantes arbitraires de LAGRANGE en regardant $\beta$ et $\gamma$ comme des quantités très petites, on obtient une série procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de deux arguments:

$$v \quad \text{et} \quad w = v\sqrt{1-\alpha} + \text{const.}$$

et suivant les puissances de $v$; cette série où $v$ figure en dehors des signes trigonométriques est convergente pourvu que $v$ soit suffisamment petit. Je l'appellerai la série $S$.

Le terme général de la série $S$ est donc de la forme:

$$Av^m \cos(pv + qw + h).$$

Si nous réunissons tous les termes de la série $S$ qui contiennent en facteur une des lignes trigonométriques d'un même arc $pv + qw$; on peut en faire la somme, et cette somme a pour valeur:

$$A \cos(pv + qf + h)$$

où $f$ est un nouvel argument de la forme

$$f = \sigma v + \varepsilon$$

$\sigma$ étant une nouvelle constante donnée et $\varepsilon$ une constante arbitraire d'intégration. En groupant les termes de cette manière, on obtient une nouvelle série $S_1$ procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples des deux arguments $v$ et $f$, et ne contenant pas $v$ en dehors des signes trigonométriques. Cette nouvelle série $S_1$ est *divergente,* au sens que les mathématiciens attachent à ce mot; elle peut néanmoins être employée dans un but pratique pourvu que ce soit avec circonspection. Elle peut donner une valeur approchée de la fonction inconnue, si l'on s'arrête à un certain terme.

Cette série $S_1$ dépend de deux constantes arbitraires; la 1[ère] est $\varepsilon$, et figure dans $f$; la 2[de] peut être choisie de bien de manières; à l'exemple de GYLDÉN nous prendrons le coëfficient du terme en $\cos f$ et nous l'appellerons $x$. Si l'on fait $x = 0$, tous les termes dépendant de $f$ disparaissent; la série $S_1$ ne contient plus que l'argument $v$, elle ne dépend plus de la constante $\varepsilon$; grâce à cette réduction, *la série $S_1$ devient convergente.* C'est la *solution périodique.*

Supposons que la constante $x$ ne soit pas nulle, mais très petite et négligeons les termes en $x^2$, nous trouvons ainsi:

$$\rho = H + xH_1 \cos f + xH_2 \sin f$$

où $H$ indépendant de $x$ représente la solution périodique que nous venons de définir et où $H$, $H_1$, $H_2$ sont développables suivant les sinus et cosinus des multiples de l'argument unique $v$. Cette série représente les solutions très voisines de la solution périodique (cf. *Méthodes Nouvelles,* chapitre IV); *elle est convergente;* je l'appellerai $S_2$.

Dans les différents termes de $S$ et de $S_1$ figurent ce que l'on appelle de *petits diviseurs* introduits par l'intégration. Parmi eux, nous distinguerons le petit diviseur $\alpha$ qui s'introduit dans la série $S$ quand on intègre un terme en $w + n(w - v)$ et qu'on retrouve dans la série $S_1$ déduite de $S$. Parmi les termes de $S_1$, conservons seulement ceux qui contiennent $\alpha$ au dénominateur à la même puissance que $\beta$ ou $\gamma$ au numérateur. L'ensemble de ces termes formera une nouvelle série $S_3$; cette série sera *convergente.* C'est celle à laquelle conduit la *méthode de Delaunay.* Comment se fait-il que la série $S_3$ étant convergente, la série $S_1$ soit néanmoins divergente; c'est à cause de la présence des petits diviseurs autres que $\alpha$; mais comme ces petits diviseurs ne se rencontrent que dans des termes d'ordre élevé, la série convergente $S_3$ nous donnera une valeur approchée de la fonction inconnue pourvu qu'on ne veuille pas l'appliquer pendant un intervalle de temps trop long; c'est là ce qui fait la légitimité de la méthode de DELAUNAY.

Tels sont les résultats qui sont vrais de l'équation (1) comme des équations générales du problème des 3 corps et des équations analogues.

Voyons maintenant ce qu'a fait GYLDÉN; il cherche à satisfaire à l'équation en posant

$$\rho = x \cos f + x_1 \cos v + R$$

et de façon que $R$ soit petit par rapport aux deux autres termes. Il désigne par $\frac{1}{2}(R^2)$ la partie constante de $R^2$, d'où il résulte que $(R^2)$ est petit et positif et il arrive aux équations suivantes (équations 4 de la page 10)

$$(2)\qquad \begin{cases} -\sigma^2 + (1-\alpha) + \frac{3}{4}\beta x^2 - \frac{3}{2}\beta[x^2 + x_1^2 + (R^2)] = 0 \\ -\alpha + \frac{3}{4}\beta x_1^2 - \frac{3}{2}\beta[x^2 + x_1^2 + (R^2)] = -\frac{\gamma}{x_1}. \end{cases}$$

Remarquons pour comparer ces équations à celles de GYLDÉN, que $\alpha$, $\beta$, $\sigma$ et $1$ représentent ici les $\beta_1$, $\beta_3$, $1-\varsigma$ et $1-\sigma$ de GYLDÉN.

Ces équations sont-elles exactes; il suffit pour le voir de les comparer à la série convergente $S_2$ définie plus haut et que nous savons former.

Soit d'abord $x = 0$; dans ce cas la série $S_1$ ou $S_2$ se réduit à celle qui définit la solution périodique; le terme le plus gros est le terme:

$$\rho = x_1 \cos v.$$

Alors les conclusions de GYLDÉN sont exactes et on trouve bien

$$(3)\qquad \frac{3}{4}\beta x_1^3 + \alpha x_1 - \gamma = 0$$

ce qui est conforme à l'équation (2), puisque $x$ est nul et $R$ très petit. Cette équation (3) limite bien la valeur de $x_1$ comme GYLDÉN l'a remarqué, et c'est cette remarque qui a été l'origine de tout son travail, où il a vainement cherché à la généraliser. On voit l'influence du terme en $\beta\rho^3$, et une comparaison physique la fera mieux comprendre. Si ce terme n'existait pas, l'équation (1) définirait le mouvement d'un pendule rigoureusement isochrone qui oscillerait sous l'influence d'une force périodique $\gamma \cos v$. Si cette force se trouve en résonance avec la période propre du pendule, les oscillations pourront devenir très-grandes. Grâce à l'addition de ce terme, le pendule n'est plus rigoureusement isochrone; s'il y a résonance pour les oscillations infiniment petites, l'amplitude croîtra d'abord, mais quand elle sera plus grande, la période propre du pendule ne sera plus la même, la résonance disparaîtra et l'amplitude cessera de croître. Les constructeurs de navires ont souvent employé un artifice analogue.

Si nous supposons au contraire $\gamma$ et $x_1$ nuls, l'équation (1) s'intègre très aisément par les fonctions elliptiques, on pourrait alors former aisément la $1^{\text{ère}}$ équation (2) en y faisant $x_1 = 0$ et négligeant $R$, qui est en effet négligeable si $x$ est petit. On reconnaîtrait ici encore que la formule de GYLDÉN est exacte. Observons que dans ces deux cas, il n'y a dans $\rho$ qu'un seul argument, $v$ dans le $1^{\text{er}}$ cas, $f$ dans le $2^{\text{d}}$.

Supposons maintenant que $x$ ne soit pas nul, mais très petit. Quelle devrait être d'après GYLDÉN la valeur de $\sigma$? Si $x$ est très petit, il en sera de même de $R$. On aura donc.

$$\sigma^2 = 1 - \alpha - \frac{3}{2}\beta x \tag{2 bis}$$

Cherchons maintenant la *vraie* valeur de $\sigma$. Soit $\rho_0$ la solution périodique; et $\rho = \rho_0 + \varepsilon$; dans ce cas $\rho_0$ est indépendant de $x$ et $\varepsilon$ est de l'ordre de $x$; nous pouvons donc négliger $\varepsilon^2$, ce qui donne:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dv} + (1 - \alpha - 3\beta\rho_0^2)\,\varepsilon = 0$$

et comme $\rho_0$ est sensiblement égal à $x_1 \cos v$, cela fait

$$\frac{d^2\varepsilon}{dv^2} + \left(1 - \alpha - \frac{3}{2}\beta x_1^2 - \frac{3}{2}\beta x_1^2 \cos 2v\right)\varepsilon = 0$$

ou:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dv^2} + \varepsilon\,(q^2 - q_1 \cos 2v) = 0 \tag{4}$$

en posant

$$q^2 = 1 - \alpha - \frac{3}{2}\beta x_1^2,\ q_1 = \frac{3}{2}\beta x_1^2.$$

C'est là une équation qui a fait l'objet de travaux très nombreux que j'ai résumés dans le Chapitre XVII des Méthodes Nouvelles.

Soit $\varepsilon = F(v)$ la solution de l'équation (4) qui se réduit à 1 et dont la dérivée se réduit à 0 pour $v = 0$; on aura:

$$\cos \sigma\pi = F(\pi).$$

Développons $F(v)$ suivant les puissances croissantes de $q_1$ et de $1 - q^2 = \tau$ il viendra:

$$F(v) = \cos v + \left(\frac{\tau}{2} + \frac{q_1}{4}\right) v \sin v + \frac{q_1}{16}(\cos v - \cos 3v) + R_1$$

où $R_1$ contiendront les termes dépendant des puissances plus élevées de $\tau$ et de $q_1$; parmi ces termes, nous ne conserverons que ceux qui dépendent des secondes puissances, et qui ne s'annulent pas pour $v = \pi$. Or nous aurons des termes en $v \sin v$, en $(\cos v - \cos 3v)$, en $(\cos v - \cos 5v)$, en $v^2 \cos v$; nous n'avons à nous occuper que des derniers qui sont les seuls qui ne s'annulent pas pour $v = \pi$. Or $R_1$ est donné par l'équation:

$$\frac{d^2 R_1}{dv^2} + R_1 = (\tau + q_1 \cos 2v)\left[\left(\frac{\tau}{2} + \frac{q_1}{4}\right) v \sin v + \frac{q_1}{16}(\cos v - \cos 3v)\right].$$

Nous pouvons négliger le terme en $\cos v - \cos 3v$ qui ne peut nous donner un terme en $v^2 \cos v$. D'autre part:

$$(\tau + q_1 \cos 2v) v \sin v = \left(\tau - \frac{q_1}{2}\right) v \sin v + \frac{q_1}{2} v \sin 3v$$

où le 1er terme seul peut nous donner un terme en $v^2 \cos v$; il nous suffira donc d'écrire:

$$\frac{d^2 R_1}{dv^2} + R_1 = \frac{1}{2}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right) v \sin v + \ldots$$

d'où:

$$R_1 = -\frac{1}{8}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right) v^2 \cos v + - \ldots$$

en n'exprimant que le terme en $v^2 \cos v$. Il vient donc:

$$F(\pi) = -1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right).$$

Or

$$\cos \sigma\pi = -1 + \frac{(1-\sigma)^2 \pi^2}{2}.$$

Il reste donc:

$$(1-\sigma)^2 = \frac{1}{4}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 + 3\alpha\beta x_1^2 + \frac{27}{16}\beta^2 x_1^4\right).$$

La formule de GYLDÉN donnerait:

$$(1-\sigma)^2 = \frac{\tau^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 + 3\alpha\beta x_1^2 + \frac{9}{4}\beta^2 x_1^4\right).$$

Avec la formule de GYLDÉN, $\sigma$ est toujours réel; avec la *vraie* formule, $\sigma$ peut devenir imaginaire et c'est ce qui arrive par exemple si $\alpha$ est positif, $\beta$ négatif et assez grand. Les différences peuvent être tout a fait énormes; elles ne peuvent s'expliquer par l'influence du terme en $(R^2)$ qui non seulement devrait être très petit, mais serait toujours de même signe; et étant toujours réel donnerait toujours pour $1 - \sigma$ une valeur réelle.

Cherchons d'ailleurs le terme principal de $R$. Un calcul simple nous donne en négligeant les carrés de $\tau$ et de $q_1$ et en posant $\sigma = 1 - s$

$$\rho = x_1 \cos v + x \cos f + x \cos (f - 2v) \frac{\sqrt{2\tau - q_1} - \sqrt{2\tau + q_1}}{\sqrt{2\tau - q_1} + \sqrt{2\tau + q_1}}$$

ce qui nous donne la valeur de $R$; le terme le plus important de $R$, c'est en effet le terme en $\cos (f - 2v)$. Le rapport du terme en $\cos (f - 2v)$ au terme en $\cos f$ c'est:

$$\frac{\sqrt{2\tau - q_1} - \sqrt{2\tau + q_1}}{\sqrt{2\tau - q_1} + \sqrt{2\tau + q_1}}.$$

Or le numérateur et le dénominateur sont du même ordre de grandeur; donc $R$ n'est pas négligeable devant $\rho_0$.

Le seul cas où $R$ serait négligeable devant $\rho_0$, serait celui où $q_1$ serait négligeable devant $\tau$, c'est à dire $\beta x_1^2$ devant $\alpha$; c'est à dire celui où la considération du terme en $\beta\rho^3$ est inutile, où les méthodes ordinaires suffisent, où celle de GYLDÉN est sans objet.

GYLDÉN dit page 17 que $R$ reste même dans les cas exceptionnels de l'ordre de $\rho_0$ (c'est à dire de $x \cos f + x_1 \cos v$), mais qu'elle devient très petite dans les cas ordinaires, à savoir lorsque la valeur absolue de $\omega$ est sensiblement plus grande que l'unité (c'est à dire lorsque les 3 racines de l'équation (3) diffèrent sensiblement l'une de l'autre). On peut se demander ce qu'il entend par *sensiblement*. Quand il dit que $|\omega|$ est sensiblement $> 1$, veut-il dire que $|\omega| - 1$ par exemple n'est pas très petit, ou que $|\omega|$ est très grand.

Dans le 1^er^ cas, il se trompe, nous venons de voir que $R$ est du même ordre de grandeur que $\rho_0$ pour toutes les valeurs de $\frac{q_1}{\tau}$, c'est à dire pour toutes les valeurs de $\omega$, sauf pour les *très petites* valeurs de $\frac{q_1}{\tau}$.

Dans le 2[d] cas, ce qu'il dit est exact, car si $\omega$ est très grand, $\frac{q_1}{\tau}$ est très petit mais si $\frac{q_1}{\tau}$ est très petit l'emploi de la méthode n'a plus, comme nous l'avons dit, aucune raison d'être.

Il semble bien d'ailleurs que sa pensée doit être interprétée de la 1[ère] manière. Il sait trop bien le français pour avoir employé une expression impropre et le contexte semble plutôt favorable à cette interprétation.

Est-il vrai du moins que $R$ ne peut jamais être *très grand* par rapport aux termes conservés de $\rho$? Oui, si l'on suppose $x$ très petit, car alors nous avons

$$\rho = x_1 \cos v + x \cos f + x' \cos (f - 2v)$$

et nous avons donné l'expression du coefficient $x'$; c'est le dernier terme qui représente $R$. Si nous posons:

$$2v - f = f'$$

cette équation devient:

$$\rho = x_1 \cos v + x' \cos f' + x \cos (f' - 2v).$$

On retombe donc sur une expression de même forme, mais où le rôle des coefficients $x$ et $x'$ est interverti. On peut donc *indifféremment* prendre $x$ ou $x'$ pour le coefficient du terme principal, ou pour celui de $R$; si l'on *convient* de regarder toujours le plus grand des deux comme représentant le terme principal, on sera certain que $R$ ne pourra devenir très grand.

Aurait-on la même liberté si $x$ n'étant plus très petit, on devait tenir compte des puissances supérieures de $x$; on aurait alors des termes en $2f - 3v$, $2f - v$ etc. et si le coefficient de l'un de ces termes devenait très grand on ne pourrait plus employer le même artifice. Nous verrons plus loin que cela peut fort bien arriver.

### *Cause de l'Erreur de Gyldén.*

Les conclusions de Gyldén, du Chapitre 1[er], § 1, N° 2, pages 10 à 17 sont donc fausses. Quelle est l'origine de son erreur?

Il envisage l'équation (1) et égale dans les deux membres les coefficients de $\cos f$ et $\cos v$. Si $x$ est très petit, nous pouvons écrire:

$$\rho = x_1 \cos v + x \cos f + x' \cos (f - 2v).$$

Il vient alors dans $\rho^3$ des termes en

$$\text{(A)} \qquad \cos^2 v \cos f, \ \cos^3 f, \ \cos^2 (f - 2v) \cos f$$

et en

$$\text{(B)} \qquad \cos^2 v \cos (f - 2v),$$

qui peuvent donner un terme en $\cos f$.

Nous avons aussi dans $\rho^3$ des termes en

$$\text{(A')} \qquad \cos^3 v, \ \cos^2 f \cos v, \ \cos^2 (f - 2v) \cos v$$

et en

$$\text{(B')} \qquad \cos v \ \cos f \ \cos (f - 2v),$$

qui peuvent donner un terme en $\cos v$. Gyldén tient compte des termes (A) et (A'), mais ne tient pas compte des ternes (B) et (B') qui sont du même ordre.

Si $x$ n'étant plus très petit, on ne pouvait plus négliger $x^2$, il y a bien d'autres termes dont il faudrait tenir compte.

L'introduction des termes négligés ferait perdre aux équations leur forme »horistique».

Dans le N° 3, Gyldén fait une tentative pour pousser l'approximation plus loin. Il arrive ainsi à des formules très compliquées d'où il ne tire rien; elles ne lui servent même pas à lui faire découvrir l'erreur commise dans le N° précédent. Il se borne à montrer que les résultats du N° 3 concordent approximativement avec ceux du N° 2, pourvu que la quantité qu'il appelle $f$ page 25 soit très grande. Mais le cas où $f$ est très grand est précisément celui où les vieilles méthodes classiques s'appliquent sans difficulté et où tout cet appareil est inutile.

Je n'ai pu arriver à déterminer quel est le but poursuivi dans le N° 4, et comme il n'est fait dans la suite aucune application des résultats qui y sont contenus, je m'abstiendrai d'en analyser ici le contenu.

### *Emploi des Fonctions Elliptiques.*

Dans le § 2, Gyldén applique une seconde méthode, fondée sur l'emploi des fonctions elliptiques; nous allons voir qu'elle ne diffère pas de la méthode de Delaunay et qu'elle permet par conséquent d'obtenir correctement une première approximation. Nous verrons ensuite l'usage que Gyldén cherche en faire pour les approximations suivantes.

Posons

$$\rho = ge^{iv} + he^{-iv}; \; \gamma \cos v = \frac{\gamma}{2}(e^{iv} + e^{-iv}).$$

Substituons dans l'équation (1) et égalons dans les deux membres les coefficients de $e^{iv}$ et $e^{-iv}$. Nous aurions aussi des termes en $e^{\pm 3iv}$, mais nous ne nous en occupons pas par ce qu'ils ne sauraient donner naissance à de petits diviseurs. Nous obtenons ainsi les deux équations.

$$(5) \qquad \begin{cases} g'' + 2ig' = \alpha g + 3\beta g^2 h - \dfrac{\gamma}{2} \\ h'' - 2ih' = \alpha h + 3\beta g h^2 - \dfrac{\gamma}{2} \end{cases}$$

où $g', g''$ désignent les dérivées successives de $g$ par rapport à $v$.

Dans $g$ et $h$ nous ne conserverous que les termes à longue période qui seuls peuvent donner lieu à de petits diviseurs; mais alors nous pouvons négliger $g''$ et $h''$ devant $g'$ et $h'$, et il reste:

$$(6) \qquad \begin{cases} 2ig' = \alpha g + 3\beta g^2 h - \dfrac{\gamma}{2} \\ -2ih' = \alpha h + 3\beta g h^2 - \dfrac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

Multiplions par $h'$, et $g'$, ajoutons et intégrons, il viendra:

$$(7) \qquad \alpha gh + \frac{3}{2}\beta g^2 h^2 - \frac{\gamma}{2}(h + g) = \text{const.}$$

On peut ensuite achever l'intégration par les fonctions elliptiques. Telle est, aux notations près, la $2^{de}$ méthode de Gyldén.

Comparons avec la méthode de DELAUNAY. Posons

$$F = \frac{1}{2}(\rho'^2 + \rho^2) - \frac{\alpha}{2}\rho^2 - \frac{\beta}{4}\rho^4 + \gamma\rho \cos v + u$$

$\rho'$ désignant la dérivée de $\rho$ par rapport à $v$, et $u$ une variable auxiliaire.

L'équation (1) peut être remplacée par les équations canoniques

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = \dfrac{dF}{d\rho'} = \rho'; \; \dfrac{d\rho'}{dt} = -\dfrac{dF}{d\rho} = -(1-\alpha)\rho + \beta\rho^3 - \gamma \cos v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dF}{du} = 1; \; \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{dF}{dv}. \end{cases}$$

Posons $\rho = \sqrt{2\xi}\cos\omega$, $\rho' = \sqrt{2\xi}\sin\omega$; d'où:

$$F = \xi + u - \alpha\xi\cos^2\omega - \beta\xi^2\cos^4\omega + \gamma\sqrt{2\xi}\cos v \cos\omega$$

les équations conserveront avec les variables $\xi, \omega$; $v, u$ la forme canonique. Si, conformément à la méthode de DELAUNAY, nous ne conservons que les termes à longue période; si par conséquent nous laissons de côté les termes en $\cos 2\omega$, $\cos 4\omega$, $\cos(v-\omega)$, il restera:

$$F = \xi + u - \frac{\alpha}{2}\xi - \frac{3}{8}\beta\xi^2 + \frac{1}{2}\gamma\sqrt{2\xi}\cos(v+\omega).$$

Soit

$$\omega + v = \varepsilon, \; u = \zeta - \xi$$

il viendra

$$(9) \qquad F = \zeta - \frac{\alpha}{2}\xi - \frac{3}{8}\beta\xi^2 + \frac{1}{2}\gamma\sqrt{2\xi}\cos\varepsilon$$

et les équations, devant rester canoniques, deviendront:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\varepsilon} = -\gamma\frac{1}{2}\sqrt{2\xi}\sin\varepsilon; \; \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{dF}{d\xi} = +\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\beta\xi - \frac{\gamma\cos\varepsilon}{2\sqrt{2\xi}}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dF}{d\zeta} = 1; \; \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{dF}{dv} = 0.$$

Si nous posons:

$$g = \frac{1}{2}\sqrt{2\xi}\,e^{-i\varepsilon}, \; h = \frac{1}{2}\sqrt{2\xi}\,e^{i\varepsilon}$$

on retombera sur les équations (6) d'où il suit que la 2[de] méthode de GYLDÉN, étant identique à celle de DELAUNAY nous donne une 1[ère] approximation correcte.

On voit sans peine que $g$ et $h$ sont des fonctions doublement périodiques de $v$. On peut alors construire les équations correctes qui lient les quantités appelées plus haut $x, x_1$ et $\sigma$; ces équations sont transcendantes et elles n'ont par conséquent aucun rapport avec les équations (2). A ce point de vue les conclusions du § 2 sont en contradiction directe avec celles du § 1.

Dira-t-on au moins que les formules concordent quand $x$ est très petit non seulement d'une façon absolue, mais par rapport à $x_1$. Nous allons voir que non, et l'Analyse que nous venons de donner dans le paragraphe 2 suffisait d'ailleurs pour que nous en fussions sûrs d'avance.

Nous allons développer $g$ et $h$ suivant les puissances de $x$, et écrire:

$$g = g_0 + g_1 + g_2 + \ldots, \qquad h = h_0 + h_1 + h_2 + \ldots$$

où $h_n$ représente l'ensemble des termes de l'ordre de $x^n$. Nous trouvons d'abord:

$$g_0 = h_0 = \text{const.}; \qquad \alpha g_0 + 3\beta g_0^3 = \frac{\gamma}{2}$$

et ensuite:

$$(10) \qquad \begin{cases} 2ig_1' = (\alpha + 6\beta g_0^2)\, g_1 + 3\beta g_0^2 h_1 \\ -2ih_1' = (\alpha + 6\beta g_0^2)\, h_1 + 3\beta h_0^2 g_1. \end{cases}$$

Ce sont des équations linéaires à coefficients constants; nous pourrons y satisfaire en posant:

$$g_1 = xe^{-i\varsigma v}, \qquad h_1 = x'e^{-i\varsigma v}$$

ou bien

$$g_1 = x'e^{i\varsigma v}, \qquad h_1 = xe^{i\varsigma v}.$$

Ou bien encore en faisant la demi somme de ces deux solutions particulières; on obtient ainsi:

$$\rho = 2g_0 \cos v + x \cos f + x' \cos (f - 2v)$$

avec

$$f = (1 - \varsigma)\, v \qquad 2g_0 = x_1$$

et en substituant dans les équations (10), on trouve:

$$x(2\varsigma - \alpha - 6\beta g_0^2) = 3\beta g_0^2 x'$$

$$x'(-2\varsigma - \alpha - 6\beta g_0^2) = 3\beta g_0^2 x.$$

Mais $\alpha + 6\beta g_0^2$ c'est ce que nous avons appelé plus haut $\tau$, et $3\beta g_0^2$, c'est ce que nous avons appelé $\frac{1}{2} q_1$; il vient ainsi:

$$x(2\varsigma - \tau) = \frac{1}{2} q_1 x'$$

$$x'(-2\varsigma - \tau) = \frac{1}{2} q_1 x$$

d'où:

$$4\varsigma^2 = \tau^2 - \frac{q_1^2}{4}$$

et

$$\frac{x'}{x} = \frac{\sqrt{2\tau - q_1} - \sqrt{2\tau + q_1}}{\sqrt{2\tau - q_1} + \sqrt{2\tau + q_1}}.$$

Ces formules sont en concordance avec les résultats du paragraphe 2 et en désaccord avec les équations (2), c'est à dire avec les équations de GYLDÉN.

Cherchons encore les termes constants de $g_2$ et $h_2$. Nous avons:

$$2ig_2' - (\alpha + 6\beta g_0^2) g_2 - 3\beta g_0^2 h_2 = 6\beta g_0 g_1 h_1 + 3\beta g_0 g_1^2$$

$$-2ih_2' - (\alpha + 6\beta g_0^2) g_2 - 3\beta g_0^2 h_2 = 6\beta g_0 g_1 h_1 + 3\beta g_0 h_1^2.$$

Nous cherchons seulement les parties constantes de $g_2$ et $h_2$; nous devons donc faire $g_2' = h_2' = 0$, $g_2 = h_2$, et remplacer $g_1 h_1$, $g_1^2$ et $h_1^2$ par leurs parties constantes. Or nous avons:

$$g_1 = \frac{x}{2} e^{-i\varsigma v} + \frac{x'}{2} e^{+i\varsigma v}$$

$$h_1 = \frac{x'}{2} e^{-i\varsigma v} + \frac{x}{2} e^{i\varsigma v}$$

d'où:

$$\text{partie constante } g_1^2 = \text{partie constante } h_1^2 = \frac{xx'}{2}$$

$$\text{partie constante } g_1 h_1 = \frac{x^2 + x'^2}{4}$$

d'où:

$$-(\alpha+9\beta g_0^2)g_2=\frac{3\beta g_0}{2}(x^2+x'^2+xx').$$

Or nous allons avoir; non plus $x_1=2g_0$ comme dans l'approximation précédente, mais:

$$x_1=2g_0+2g_2.$$

Comparons avec la seconde équation (2) qui peut s'écrire

$$-\alpha x_1-\frac{3}{4}\beta x_1^3-\frac{3}{2}\beta x_1(x^2+x'^2)=-\gamma$$

en remarquant que $x'^2$ n'est pas autre chose que ce que Gyldén appelle $(R^2)$. En première approximation, nous avons:

$$\alpha x_1+\frac{3}{4}\beta x_1^3=\gamma,\qquad x_1=2g_0.$$

Soit $x_1=2g_0+2\delta$, de sorte que $\delta$ devrait être égal à $g_2$. Cela fera en négligeant $\delta^2$, $\delta x^2$, $\delta x'^2$

$$-(\alpha+9\beta g_0^2)\delta=\frac{3}{2}\beta g_0(x^2+x'^2)$$

on reconnaît déjà que la formule est erronée.

### *Discussion de la Méthode Précédente.*

Jusqu'ici les conclusions du § 2, d'ailleurs contradictoires avec celles du § 1 sont correctes, mais Gyldén veut pousser plus loin l'approximation et tenir compte des termes négligés. Il écrit donc les équations (avec d'autres notations)

$$(11)\qquad\left\{\begin{aligned}&2ig'-\alpha g-6\beta g^2h+\frac{\gamma}{2}=M'\\&-2ih'-\alpha h-6\beta h^2g+\frac{\gamma}{2}=N'\end{aligned}\right.$$

où $M'$ et $N'$ représentent l'ensemble des termes d'abord négligés et il les intègre par approximations successives.

J'aurais à faire au sujet de ses conclusions la remarque suivante. Ayant résolu correctement les équations (6), il constate qu'elles conduisent dans certains cas à des solutions asymptotiques.

»Mais, ajoute-t-il page 67, nous verrons dans ce qui suit que la solution asymptotique n'appartient pas à notre problème; elle est due uniquement à la manière d'aborder les approximations...».

Il est évident qu'ici GYLDÉN se trompe. Les équations approximatives (6) admettent un système de solutions asymptotiques et par conséquent une solution périodique pour laquelle les exposants caractéristiques sont réels et différents de zéro. Si les équations approximatives admettent une solution périodique, il en sera de même des équations exactes, qui en diffèrent fort peu; car si l'on fait varier un système d'équations différentielles d'une manière continue, une solution périodique ne peut disparaître que quand l'un des exposants caractéristiques est nul, ce qui n'est pas le cas; de plus cette solution périodique aura encore des exposants caractéristiques réels, puisqu'ils différeront très peu de ceux qui correspondent aux équations (6); et l'existence des exposants caractéristiques réels entraîne celle des solutions asymptotiques. Tous ces points sont hors de doute et je les ai établis d'une façon très simple et rigoureuse dans mes méthodes nouvelles.

GYLDÉN cherche à nous donner la démonstration promise d'abord page 71, puis page 75; il cherche d'abord à montrer qu'on peut diriger les approximations de façon à ne plus rencontrer de solution asymptotique. Pour cela il écrit les équations (11) sous la forme suivante:

$$(11 \text{ bis}) \qquad \begin{cases} 2ig' - (\alpha + \varepsilon)g - 6\beta g^2 h + \frac{\gamma}{2} = M' - \varepsilon g \\ -2ih' - (\alpha + \varepsilon)h - 6\beta g h^2 + \frac{\gamma}{2} = N' - \varepsilon h \end{cases}$$

et il intègre par approximations successives en faisant d'abord les seconds membres égaux à zéro, remplaçant ensuite les inconnues dans les 2$^{\text{ds}}$ membres par les valeurs trouvées en 1$^{\text{ère}}$ approximation et ainsi de suite.

Il choisit $\varepsilon$ de façon à éviter la solution asymptotique et il se flatte de pouvoir conduire les approximations suivantes en évitant l'introduction de cette solution et en aboutissant à une série convergente.

Pour juger cette prétention, il suffit de comparer à un exemple simple.

Soit:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + \beta\rho = \cos v.$$

Nous voyons que si $\beta = 1$, l'équation ne comporte plus de solution périodique et que $v$ sort des signes trigonométriques. Croira-t-on que l'on peut échapper à cette conséquence par l'artifice suivant. Soit $\beta = 1$ et écrivons l'équation sous la forme:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 + \varepsilon)\rho = \cos v + \varepsilon\rho.$$

Nous trouvons en 1ère approximation $\rho = 0$, puis $\rho = \frac{\cos v}{\varepsilon}$, puis $\rho = \frac{2 \cos v}{\varepsilon}$, puis $\rho = \frac{3 \cos v}{\varepsilon}$, suite manifestement divergente.

Eh bien, Gyldén fait absolument la même chose. Il y a page 72 quelques lignes sur l'ordre de grandeur des quantités introduites. Ces lignes, trop concises pour être claires tendent évidemment à prouver que la série obtenue sera convergente, ou du moins que les termes iront en diminuant.

Or cela n'est pas exact; car si nous supposons $M' = N' = 0$, les équations (11 bis) se réduisent aux équations (6) et nous savons, Gyldén l'a démontré lui-même que ces équations admettent des solutions asymptotiques. La série en question est donc divergente, puisque si elle était convergente, ces solutions n'existeraient pas.

La série converge-t-elle dans d'autres cas? Les seconds membres de (11 bis) peuvent-ils être assez petits pour qu'il en soit ainsi? Cela n'a pas lieu, nous venons de le voir quand $M'$ et $N'$ sont nuls; cela ne pourrait donc être vrai que si $M'$ et $N'$ détruisaient les termes les plus importants de $\varepsilon g$ et de $\varepsilon h$. Or il est évident qu'il ne peut pas en être ainsi *quels que soient* $M'$ et $N'$. Eh bien, dans le raisonnement de Gyldén, il n'est fait aucune hypothèse sur $M'$ et $N'$ (ou ce qui revient au même sur ce qu'il appelle $M$ *et* $N$). Son raisonnement est donc inexact.

Gyldén cherche ensuite à montrer que la solution asymptotique ne peut pas servir de point de départ à une véritable approximation (pages 75, 199) parce que le 2d terme du développement est susceptible de devenir infini.

C'est comme si l'on disait que quand $\alpha$ est petit $\sqrt{x}$ n'est pas une valeur approchée de $\sqrt{x+\alpha}$, sous prétexte que si l'on développe suivant les puissances de $\alpha$, le $2^d$ terme du développement est $\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{x}}$ et devient infini pour $x=0$.

Dans le § 3, GYLDÉN applique une nouvelle méthode qui ne diffère de la précédente que par quelques complications nouvelles. Il néglige les termes $M'$ et $N'$ de sorte que les équations (11) se réduisent aux équations (6); nous venons de voir que ces équations s'intègrent très aisément par les fonctions elliptiques. Je n'ai pu arriver à comprendre pourquoi il aborde ainsi par une méthode approximative et compliquée un problème qu'il a lui-même résolu par une méthode rigoureuse et simple.

Il n'y a qu'un passage où il ne dit pas explicitement qu'il néglige $M'$ et $N'$, c'est celui de la page 93; mais on doit remarquer qu'il y regarde $W$ comme une fonction périodique de l'argument *unique* $w$, ce qui ne peut s'expliquer que de deux manières; ou bien s'il néglige $M'$ et $N'$ comme dans le reste du §, ou bien s'il réduit $M'$ et $N'$ aux termes $-g''$ et $-h''$ qui sont négligés dans les équations (6). Dans ce dernier cas, on retomberait sur les équations (12) du paragraphe suivant, sur lesquelles nous reviendrons.

### *Nouvelle Méthode de Gyldén.*

Dans le § 4, GYLDÉN emploie encore une nouvelle méthode, fondée également sur l'emploi des fonctions elliptiques. Elle consiste à développer la solution de l'équation (1) suivant les puissances de $\gamma$.

Si l'on appliquait cette méthode dans toute sa rigueur, on trouverait en $1^{\text{ère}}$ approximation, c'est à dire pour $\gamma=0$, que $\rho$ est une fonction doublement périodique de $v$, développable suivant les sinus et les cosinus des multiples d'un argument unique $f=v+w$, fonction linéaire de $v$. Dans les approximations suivantes on trouverait des termes en

$$mv + nw$$

$m$ et $n$ étant des entiers quelconques.

Il s'introduirait aussi des termes séculaires où $v$ sortirait des signes trigonométriques mais GYLDÉN évite l'introduction de ces termes séculaires par l'artifice suivant:

Il écrit l'équation (1) sous la forme:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \alpha')\rho - \beta\rho^3 = -\gamma \cos v + (\alpha - \alpha')\rho$$

$\alpha'$ étant une indéterminée. Dans le $2^d$ membre, il substitue à la place de $\rho$, d'abord zéro, puis à la $2^{de}$ approximation la valeur de $\rho$ trouvée en $1^{ère}$ approximation et plus généralement à la $n^e$ approximation, la valeur trouvée en $n - 1^e$ approximation. Il dispose ensuite de l'indéterminée $\alpha'$ à chaque approximation, de façon à faire disparaître les termes en cos $f$ qui lui donneraient après intégration des termes séculaires. *Cet artifice est légitime.*

De plus, il laisse de côté à chaque approximation les termes en $mv + nw$ où l'entier $m$ n'a pas la valeur $\pm 1$. Ce qui justifie dans une certaine mesure cette manière de faire, c'est que les termes de la forme $v + nw$ sont ceux où s'introduit le plus important de tous les petits diviseurs; mais on ne doit pas oublier que d'autres termes, (qu'on ne rencontre pas il est vrai dans les $1^{ères}$ approximations, mais seulement dans les suivantes) introduisent de nouveaux petits diviseurs encore plus petits, et que c'est précisément à ces petits diviseurs qu'est due la divergence des séries.

Opérer de la sorte, cela revient à déterminer $g$ et $h$ par les équations

$$(12) \qquad \begin{cases} g'' + 2ig' - \alpha g - 6\beta g^2 h + \frac{\gamma}{2} = 0 \\ h'' - 2ih' - \alpha h - 6\beta h^2 g + \frac{\gamma}{2} = 0. \end{cases}$$

Cette méthode se rapproche de celle de Delaunay; elle n'est pas plus précise; car les termes par lesquels les équations (12) diffèrent des équations (6) ne sont pas plus grands et plus importants que les autres termes négligés.

Il ne faudrait pas croire non plus que l'on obtient par ce procédé tous les termes en $v + nw$ avec leurs coefficients exacts. En effet, il peut s'introduire à la $k^e$ approximation des termes de la forme $mv + nw$ $(m > 1)$ dont la combinaison produira à la $k + p^e$ approximation un terme en $v + nw$; si l'on néglige ces termes à la $k^e$ approximation, le coefficient du terme en $v + nw$ ne sera plus exact à la $k + p^e$.

Quoi qu'il en soit les équations (12) admettent l'intégrale:

$$g'h' - \alpha gh - \frac{3}{2}\beta g^2 h^2 + \frac{\gamma}{2}(h + g) = \text{const.}$$

On ne peut pas en trouver l'intégrale générale; mais pour l'objet poursuivi par GYLDÉN, il suffit d'en connaître une solution périodique. Cette solution périodique existe et le développement correspondant converge, comme il arrive toujours pour une solution périodique.

Les développements trouvés par GYLDÉN dans ce § 4 sont donc bien convergents, ainsi qu'il l'annonce. Ils pourraient être très facilement obtenus par la théorie des solutions périodiques. Mais dès qu'il voudrait tenir compte des termes en $mv + nw$, la convergence cesserait.

L'analyse de GYLDÉN ne nous apprend d'ailleurs rien de plus que la méthode de DELAUNAY. Elle n'est pas plus précise; elle n'est pas plus propre à nous renseigner sur la convergence des développements *complets*.

### *Analyse du Second Chapitre.*

Passons au Chapitre II et au § 5; GYLDÉN y envisage des équations plus compliquées où figure dans le 1er membre outre la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dv^2}$, un polynôme entier en $y$ et $\frac{dy}{dv}$ dont les coefficients sont des fonctions connues de $v$. Quant au 2d membre, c'est une fonction connue de $v$. Toutes ces fonctions connues de $v$ sont supposées développables en séries trigonométriques.

GYLDÉN commence par étudier des transformations, permettant de simplifier cette équation. Je n'expliquerai pas ici le détail de ces transformations. Il arrive page 137 à l'équation suivante:

$$\frac{d^2y}{dv^2} + \gamma_1 y + \gamma_2 y^2 + \gamma_3 y^3 = \Omega$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \Omega$ sont des fonctions connues de $v$, *toutes très petites*; mais il n'énonce pas de résultats assez nets pour qu'on puisse les discuter.

A la page 142, il envisage une équation analogue, mais où $\gamma_1$ est très voisin de 1. La discussion des transformations qu'il lui applique nous entraînerait trop loin, j'ai hâte d'arriver à ce qu'il dit page 158 d'une équation plus simple qui est son équation (39)

$$\frac{d^2z}{du^2}+(1-\beta_1-\beta_3\eta^2)z+\beta_0\chi\eta^2=\Omega$$

$$\eta^2=(1-\beta)z^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2$$

($\Omega$ et $\chi$ donnés).

Il cherche à satisfaire à cette équation en posant:

$$z=V_0+V_1+V_2+\ldots$$

et en déterminant les $V$ par une série d'équations qu'il appelle (47) page 170 et qui sont de la forme:

$$\frac{d^2V_n}{du^2}+(1-\beta_1-\beta_3H)V_n=\Omega_n$$

$\Omega_n$ étant connu et $H$ étant la partie constante de $\eta^2$.

Laissant de côté, pour simplifier, $\beta$ et $\chi$, ainsi que $\beta_1$ et faisant $\beta_3=-1$ pour fixer les idées, nous voyons que l'équation peut s'écrire

$$\frac{d^2z}{du^2}+z\left(1+z^2+\frac{dz^2}{du^2}\right)=\Omega. \tag{13}$$

Gyldén s'imagine qu'il obtiendra une 1ère approximation, en négligeant dans le coefficient de $z$ les termes périodiques, de sorte que ce coefficient se réduise à une constante $H$ et que l'équation (13) devienne:

$$\frac{d^2z}{du^2}+z(1+H)=\Omega. \tag{13 bis}$$

Il est important d'examiner si cela est légitime, parce que c'est le principe même de la méthode horistique.

Soit:

$$\Omega=\gamma\cos u+\gamma'\cos(u+\omega)$$

où $\omega=\sigma v$, $\sigma$ étant petit.

L'équation (13 bis) nous conduirait alors à une solution de la forme

$$z=x\cos u+x'\cos(u+\omega)$$

et alors on aurait sensiblement (à cause de la petitesse de $\sigma$)

$$\eta^2 = z^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = x^2 + x'^2 + 2xx' \cos \omega$$

$$H = x^2 + x'^2.$$

Substituons dans les équations (13) et (13 bis). L'équation (13 bis) donne:

$$(14) \qquad \begin{cases} x(x^2 + x'^2) = \gamma \\ -x'(2\sigma + \sigma^2) + x'(x^2 + x'^2) = \gamma' \end{cases}$$

d'où Gyldén conclut que $x$ et $x'$ sont limités. Mais on néglige ainsi la différence entre les 1[ers] membres de (13) et (13 bis), c'est à dire:

$$2zxx' \cos \omega = x^2 x' \cos(u + \omega) + x^2 x' \cos(u - \omega) + x'^2 x \cos u + x'^2 x \cos(u + 2\omega).$$

Si $\sigma$ est très petit, si $\gamma$ et $\gamma'$ sont comparables entre eux, $x$ et $x'$ sont du même ordre de grandeur, $x^2 x'$, $x^3$, etc. sont comparables à $\gamma$ et les termes négligés sont de l'ordre de $\Omega$, c'est à dire des termes conservés.

Du reste on montre cela d'un façon plus frappante en raisonnant comme il suit:

Faisons $\sigma = 0$, $\gamma = \gamma'$; les deux équations (14) ajoutées donnent

$$2x^3 = \gamma = 2x'^3 = \gamma'; \qquad (x + x')^3 = 4\gamma.$$

Mais si $\sigma = 0$, les deux termes de $\Omega$ se confondent en un seul et on a $\Omega = 2\gamma \cos u$, d'où par la 1[ère] équation (14) (qui est alors exacte):

$$(x + x')^3 = 2\gamma$$

résultat contradictoire avec le précédent.

L'analyse de Gyldén ne ressemble donc en rien à une approximation. Mais il faut se poser la question d'une façon plus large et se demander: Supposons que Gyldén n'ait pas commis cette erreur et qu'il ait calculé exactement ces coefficients $x$, ces coefficients auraient-ils été limités?

Soit plus généralement:

$$\Omega = \sum \gamma_n \cos f_n, \qquad f_n = u(1 + \sigma_n), \qquad \sigma_n = \varepsilon \lambda_n$$

$$z = \sum x_n \cos f_n, \qquad \mu_n = 2\lambda_n + \varepsilon \lambda_n^2.$$

Nous supposons les $\sigma_n$ très petits, $\varepsilon$ très petit, $\lambda_n$ et $\mu_n$ finis.

Nous voyons d'abord que $z$ est une fonction paire de $u$, de telle façon que pour $u = 0$ ses dérivées d'ordre impair s'annulent. Nous désignerons par $y, y'', y^{\mathrm{IV}}$, etc. les valeurs de $z$ et de ses dérivées successives d'ordre pair pour $u = 0$; et de même par $\Omega_0, \Omega_0''$ etc. les valeurs de $\Omega$, et de ses dérivées pour $u = 0$. On trouve ainsi:

$$y'' + y + y^3 = \Omega_0$$

$$(y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y) + (y + y'')y(y + 2y'') = \Omega_0 + \Omega_0''.$$

Or:

$$y = \sum x_n, \qquad \Omega_0 = \sum \gamma_n, \qquad y = y'' = -\varepsilon \sum x_n \mu_n$$

$$\Omega_0 + \Omega_0'' = -\varepsilon \sum \gamma_n \mu_n, \qquad y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = \varepsilon^2 \sum x_n \mu_n^2,$$

d'où:

$$-\varepsilon \sum x\mu + (\sum x)^3 = \sum \gamma$$

$$\varepsilon \sum x\mu^2 + \sum (x\mu) \sum x (\sum x + 2\varepsilon \sum x\mu) = -\sum \gamma\mu,$$

ou si $\varepsilon$ est très petit:

$$(\sum x)^3 = \sum \gamma, \qquad \sum (x\mu)(\sum x)^2 = -\sum \gamma\mu,$$

ou enfin:

$$\sum x\mu = \frac{-\sum \gamma\mu}{(\sum \gamma)^{\frac{2}{3}}}.$$

Or si $\sum \gamma = 0$, cette expression devient infinie; il faut donc que l'un des $x$ *au moins* devienne infini, (ou plutôt deux au moins, puisque $\sum x = 0$). *Les coefficients $x$ ne sont donc pas limités.*

Ici encore la méthode horistique est en défaut.

### *Equations de la Longitude.*

Jusqu'ici Gyldén a envisagé surtout les équations dont il se sert pour la détermination du rayon vecteur. Dans le § 6, il envisage plus particulièrement celles qui lui servent à déterminer la longitude. L'examen de la méthode horistique dans ce dernier cas est d'autant plus important qu'on a fait des tentatives pour l'appliquer, ce qu'on n'a jamais cherché à faire pour le rayon vecteur.

Un astronome tout à fait éminent, M. Backlund, trop confiant dans les résultats de Gyldén, s'est même un instant laissé entraîner à des conclusions inexactes qu'il a rectifiées depuis. M. Stockwell avait déterminé par les méthodes ordinaires certaines inégalités de la précession; M. Harzer avait calculé par les méthodes de Gyldén une inégalité de la longitude d'Hécube; j'intends par les premières méthodes de Gyldén et non par la méthode horistique. M. Backlund appliqua à ces deux cas les formules horistiques de Gyldén, et ces formules lui donnèrent des coefficients 3 ou 4 fois plus petits que ceux qu'avaient obtenus ses devanciers. (Bulletin de l'Académie de S:t Petersbourg, mai 1900).

Les équations de la longitude, de même que celles de la précession, peuvent être ramenées à la forme:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \sum a \sin (nt + v) + \sum b \sin pt$$

où $\sin (nt + v)$ est l'un des termes à courte période et où $\sin pt$ est l'un des termes à longue période. Pour plus de simplicité, je n'envisagerai qu'un terme de chaque sorte et j'écrirai.

$$\frac{d^2v}{dt^2} = a \sin (nt + v) + b \sin pt. \tag{15}$$

Je supposerai que $a$ et $n$ sont petits, mais $b$ et $p$ beaucoup plus petits de sorte que $\frac{b}{p^2}$ soit beaucoup plus grand que $\frac{a}{n^2}$, et que $p^2$ soit comparable à $\frac{a^2}{n^2}$.

Posons alors:

$$\frac{d^2v_0}{dt^2} = a \sin (nt + v_0), \tag{16}$$

et

$$v = v_0 + \varepsilon.$$

En négligeant le carré de $\varepsilon$, on trouve:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a\varepsilon \cos (nt + v_0) + b \sin pt. \tag{17}$$

Dans les anciennes méthodes (Stockwell et Harzer) on néglige le 1er terme qui est à courte période et on écrit

$$\varepsilon = -\frac{b}{p^2}\sin pt.$$

Voici maintenant ce que donne la méthode horistique appliquée par M. Backlund. On trouve sensiblement:

$$v_0 = -\frac{a}{n^2}\sin nt$$

d'où:

$$\cos(nt + v_0) = \cos nt + \frac{a}{n^2}\sin^2 nt.$$

L'équation (17) devient ainsi

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \varepsilon\left(a\cos nt + \frac{a^2}{n^2}\sin^2 nt\right) + b\sin pt$$

ou, *si l'on conserve seulement la valeur moyenne du coefficient de* $\varepsilon$:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{a^2}{2n^2}\varepsilon + b\sin pt$$

d'où:

$$\varepsilon = -\frac{b\sin pt}{\frac{a^2}{2n^2} + p^2}.$$

Telles sont les deux analyses entre lesquelles il s'agit de décider; cela est facile, puisque les équations (16) et (17) peuvent s'intégrer exactement et que Gyldén lui-même a souvent intégré des équations de même forme dans le cours de ses recherches.

Cette intégration montre que le terme en $\sin pt$ qui est le seul sensible est réduit à

$$\varepsilon = -\frac{b\sin pt}{p^2}$$

ce qui est conforme aux résultats obtenus par les anciennes méthodes (Cf Comptes Rendus tome 132, page 50).

Backlund revenant sur la question (Comptes Rendus, tome 132, page 291) découvrit le point faible de l'analyse qu'il avait d'abord suivie;

mais il voulut généreusement prendre la faute tout entière sur lui et disculper GYLDÉN; sa conduite dans cette circonstance montre que son caractère est digne de son talent.

»GYLDÉN, dit-il, considère dès le début des approximations l'équation:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a\varepsilon\cos(nt+v_0) - \frac{1}{2}a\varepsilon^2\sin(nt+v_0) - \frac{1}{6}a\varepsilon^3\cos(nt+v_0) + b\sin pt \tag{18}$$

(c'est à dire qu'il néglige $\varepsilon^4$ et non $\varepsilon^2$) et il arrive pour le terme en $\sin pt$ à l'expression

$$-\frac{b\sin pt}{\nu^2+p^2}$$

où $\nu^2$ est sans doute beaucoup plus petit que $\frac{a^2}{2n^2}$, mais n'est cependant pas nul.»

BACKLUND reconnu ensuite (Bulletin Astronomique, tome 19, page 433) que la même objection s'applique non seulement au cas de la précession, mais aussi au cas d'Hécube, et il ajouta qu'il serait très désirable qu'une analyse plus approfondie conduisît à la détermination de $\nu^2$.

Ce qui résulte de l'analyse précédente, c'est à dire de l'intégration exacte de l'équation (17), c'est que $\nu^2$ s'annule avec $b$. Voyons comment GYLDÉN traite notre équation (18), qui joue un rôle analogue à celui de son équation (12) de la page 189 (voir pages 189 à 199).

Par une série de transformations assez compliquées, il la ramène à la forme:

$$\frac{d^2y}{du^2} - 1024q^4h_2y - 96q^2\left(\frac{dy}{du}\right)^2 y = Y$$

$Y$ représentant un ensemble de termes connus; c'est son équation (16) de la page 198. GYLDÉN réduit $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ à sa valeur moyenne, qui est une constante positive, quitte à faire passer les termes négligés dans le 2^d membre et à les confondre avec $Y$. Son équation prend alors la forme:

$$\frac{d^2y}{du^2} - \beta y = -Q \quad \text{(équation 17 de la page 198)}$$

où $\beta$ est une constante *positive* et où $Q$ est connu. C'est ce terme en $\beta y$ qui permet d'éviter les petits diviseurs et qui joue le rôle de »terme horistique».

C'est toujours le même procédé qui consiste à remplacer une des fonctions qui figure dans nos équations pas sa valeur moyenne, et dont nous avons à plusieurs reprises reconnu l'illégitimité. Mais ici le terme en $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ ne joue qu'un rôle secondaire, car $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ est beaucoup plus petit que $h_2$. C'est donc le terme en $h_2 y$ qui est le principal *terme horistique;* comment s'est-il introduit dans les équations de GYLDÉN? Nous le voyons apparaître à la page 189.

»D'abord, dit GYLDÉN, nous en retranchons le terme dépendant de la partie constante de $V_1^2$, terme qui se réunit immédiatement avec la fonction $Z_0$.»

Voici ce que cela veut dire; reprenons notre équation (15), en posant comme nous l'avons fait, $v = v_0 + \varepsilon$, et négligeant $\varepsilon^4$, elle peut s'écrire:

$$\frac{d^2v_0}{dt^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a\sin(nt + v_0) + a\varepsilon\cos(nt + v_0) - \frac{1}{2}a\varepsilon^2\sin(nt + v_0)$$

$$- \frac{1}{6}a\varepsilon^3\cos(nt + v_0) + b\sin pt.$$

Nous avons vu comment cette équation peut se scinder en deux pour donner les équations (16) et (18); mais GYLDÉN ne fait pas tout à fait la même chose; il scinde l'équation de la façon suivante:

(16 bis) $$\frac{d^2v_0}{dt^2} = a\left(1 - \frac{h}{2}\right)\sin(nt + v_0),$$

(18 bis) $$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} - a\varepsilon\cos(nt + v_0) = -\frac{1}{2}a(\varepsilon^2 - h)\sin(nt + v_0)$$

$$- \frac{a\varepsilon^3}{6}\cos(nt + v_0) + b\sin pt$$

la constante $h$ qui joue le rôle de $h_2$ étant la valeur moyenne de la fonction périodique $\varepsilon^2$.

L'équation (18 bis) ne diffère que par les notations de l'équation (12) de la page 189 de GYLDÉN. Dans cette équation (12) nous voyons la constante $h_2$ figurer deux fois; à savoir dans le 2^d et le 3^e termes. Cet $h_2$ qui figure dans le 3^e terme, finit dans la suite des transformations par aller se perdre dans les termes connus $Y$; le »terme horistique» de l'équation (16) de Gyldén provient donc uniquement du second terme de l'équation (12), c'est à dire du terme en $V_1$. Les termes en $\varepsilon^2 - h$ et en $\varepsilon^3$, dans la suite de l'analyse de Gyldén, finissent par se confondre dans les termes connus $Y$.

Voici donc, en dernière analyse, en quoi consiste la méthode de Gyldén. En première approximation, on remplacera $\varepsilon^2 - h$ et $\varepsilon^3$ par zéro dans le 2^d membre de (18 bis) et on intégrera (16 bis) et (18 bis). Dans (16 bis) on donnera à $h$ une valeur positive quelconque de l'ordre de $\varepsilon^2$. En 2^de approximation, on remplacera dans le 2^d membre de (18 bis), $\varepsilon^2 - h$ et $\varepsilon^3$ par leur 1^ère valeur approchée; quand à $h$ on le remplacera dans (16 bis) par la valeur moyenne de la fonction périodique $\varepsilon^2$ obtenue en 1^ère approximation et ainsi de suite.

Cette méthode serait légitime si le terme

$$-\frac{ah}{2}\sin(nt + v_0) \tag{19}$$

dont on tient compte était plus important que le terme

$$-\frac{a}{2}(\varepsilon^2 - h)\sin(nt + v_0) \tag{20}$$

que l'on néglige. Or le terme le plus important de $\varepsilon$ est un terme en $\sin pt$, soit donc

$$\varepsilon = k \sin pt.$$

Le terme (19) dont on tient compte est

$$-\frac{ak^2}{4}\sin(nt + v_0).$$

Le terme (20) que l'on néglige est:

$$+\frac{ak^2}{8}\sin(nt + 2pt + v_0) + \frac{ak^2}{8}\sin(nt - 2pt + v_0).$$

Les coëfficients sont du même ordre, les arguments sont à peu près les mêmes puisque $p$ est beaucoup plus petit que $n$; l'intégration ne peut introduire de petit diviseur ni en ce qui concerne (19), ni en ce qui concerne (20). Il n'y a aucune raison pour tenir compte de l'un des termes plutôt que de l'autre.

L'analyse de GYLDÉN ne permet donc pas de trancher la question. Il s'agit de déterminer le coëfficient de $\sin pt$. D'après les anciennes théories il serait sensiblement

$$\frac{b}{p^2}.$$

D'après GYLDÉN il serait

$$\frac{b}{\nu^2 + p^2}$$

où $\nu$ serait lui-même de l'ordre de $\frac{b}{p^2}$. Il faut donc faire le calcul en considérant $b$ et $p$ comme très petits et de telle façon que $\frac{b}{p^2}$ soit fini; c'est à dire développer suivant les puissances de $b$ et conserver seulement parmi les termes en $b^n$ ceux qui contiennent $p^{2n}$ au dénominateur, c'est précisément ce que l'on fait dans la méthode de DELAUNAY; si nous trouvons pour le coëfficient $\frac{b}{p^2}$, GYLDÉN aura tort, si nous trouvons une fonction de $\frac{b}{p^2}$ qui ne devient pas infinie avec $\frac{b}{p^2}$, GYLDÉN aura raison.

Appliquons donc la méthode de DELAUNAY; posons $\chi = nt + v$, de sorte que notre équation devient

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = a\sin\chi + b\sin pt.$$

Nous pouvons alors écrire, en introduisant une variable auxiliaire $\chi'$:

$$\frac{d\chi'}{dt} = a\sin\chi, \qquad \frac{d\chi}{dt} = \chi' - \frac{b}{p}\cos pt.$$

Posons (en introduisant deux nouvelles variables auxiliaires $z$ et $u$)

$$F = \frac{1}{2}\chi'^2 - \frac{b}{p}\chi'\cos z + a\cos\chi + pu$$

nos équations prendront la forme canonique:

$$\frac{d\chi'}{dt} = -\frac{dF}{d\chi}; \qquad \frac{d\chi}{dt} = \frac{dF}{d\chi'}; \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dF}{du} = p; \qquad \frac{du}{dt} = -\frac{dF}{dz}.$$

Appliquons la méthode de JACOBI.

Soit une fonction $S$ de la variable $\chi$ et du paramètre $W$ définie par l'équation:

$$\left(\frac{dS}{d\chi}\right)^2 = 2[\varphi(W) - a\cos\chi].$$

Posons ensuite:

$$\chi' = \frac{dS}{d\chi}, \qquad \frac{dS}{dW} = w = \int \frac{\varphi'(W)d\chi}{\sqrt{2(\varphi - a\cos\chi)}}.$$

Nous voyons:

1° que

$$\frac{\chi'^2}{2} - a\cos\chi = \varphi(W)$$

2° que

$$\chi' d\chi - W dw$$

est une différentielle exacte.

3° que $\chi'$, $\cos\chi$ et $\sin\chi$ sont des fonctions doublement périodiques de $w$; nous pouvons choisir la fonction $\varphi(W)$ de façon que la période réelle soit $2\pi$, et que $\chi'$, $\cos\chi$ et $\sin\chi$ soient développables suivant les sinus et les cosinus des multiples de $w$.

Il vient alors:

$$F = \varphi(W) + pu - \frac{b}{p}\chi'\cos z$$

et les équations conservant la forme canonique s'écrivent:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dF}{dw}; \qquad \frac{dw}{dt} = -\frac{dF}{dW}, \qquad \frac{dz}{dt} = p.$$

La fonction $F$ est développable suivant les cosinus et les sinus des multiples de $w$ et de $z$. Pour appliquer la méthode de DELAUNAY, il faut ne conserver dans $F$ que les termes »à longue période» c'est à dire ici ceux qui ne dépendent pas de $w$, mais seulement de $z$. Pour cela nous n'avons qu'à réduire $\chi'$ à sa valeur moyenne qui est une fonction de $W$ que j'appelle $\chi'_0$, de sorte que

$$F = \varphi(W) + pu - \frac{b}{p}\chi'_0\cos z$$

d'où:

$$\frac{dW}{dt} = 0, \qquad \frac{dw}{dt} = -\varphi'(W) + \frac{b}{p}\frac{d\chi_0'}{dW}\cos z, \qquad \frac{dz}{dt} = p$$

d'où:

$$W = \text{const.}, \qquad z = pt, \qquad w = -t\varphi'(W) + \frac{b}{p^2}\frac{d\chi_0'}{dW}\sin pt.$$

On voit que $w$ contient un terme en

$$\frac{b}{p^2}\sin pt$$

qui devient très grand si $\frac{b}{p^2}$ est très grand; or $\chi$, d'après nos hypothèses est une fonction de $w$ qui augmente de $2\pi$ quand $w$ augmente de $2\pi$. S'il y a dans $w$ un terme périodique d'amplitude très grande, il y en aura également un dans $\chi$.

Le phénomène »horistique» ne peut donc se produire comme l'avait cru Gyldén.

### 9. *Examen d'une équation particulière.*

Passons maintenant à la page 208; nous y trouverons l'équation

$$\frac{d^2y}{du^2} + \mu y\frac{dy}{du} = -a\sin\sigma u \tag{21}$$

Gyldén cherche une solution périodique de cette équation de la forme:

$$y = \sum x_n \sin n\sigma u$$

$n$ étant entier positif; on prend plaisir à se trouver en présence d'une problème aussi simple et aussi nettement posé.

Gyldén cherche à déterminer les coëfficients $x_n$ et il arrive à la fin de la page 209 à une équation qu'il cherche à discuter.

»Maintenant, dit-il, en supposant les coëfficients $x_3, x_4, \ldots$, ou connus, ou négligeables, il se comprend que la quantité $x_1$, qui s'obtient par la résolution de l'équation précédente du 3^e^ degré, ne surpasse jamais une certaine limite qui s'approche d'autant plus de zéro, que la valeur de $\frac{16a}{\mu^2}$ est plus petite.

On aura facilement des résultats semblables relativement aux coëfficients $x_2$, $x_3$, ....»

Pour juger ce résultat, développons les deux membres de (21) suivant les puissances de $u$, et égalons les coëfficients de $u$, il viendra:

$$\sigma^2[-\sum xn^2 + \mu(\sum xn)^2] = -a\sigma$$

d'où:

$$\sum |x| n^2 + \mu(\sum |x| n)^2 > \left|\frac{a}{\sigma}\right|. \tag{22}$$

Si $\sigma$ est très petit, le second membre de cette inégalité est très grand, d'où il suit que les $x$ ne peuvent pas être tous limités.

Dira-t-on que la série $\sum x$ est convergente, mais que la série $\sum xn^2$ diverge, de sorte que le 1^er^ membre de l'inégalité peut être très grand, bien que tous les $x$ soient limités?

Non, car tant que la solution périodique existe, $y$ est une fonction analytique de $u$, ses dérivées d'ordre quelconque sont des fonctions périodiques de $u$ et sont comme elle développable en série de FOURIER. La série

$$\sum |x| n^p$$

est donc convergente quelque grand que soit $p$. Soit $\gamma$ la plus grande des valeurs de $n^4|x|$, l'inégalité (22) nous donnera:

$$\gamma \sum \frac{1}{n^2} + \mu\gamma^2\left(\sum \frac{1}{n^3}\right)^2 > \left|\frac{a}{\sigma}\right|$$

ce qui montre que $\gamma$ croît indéfiniment avec $\left|\frac{a}{\sigma}\right|$.

D'ailleurs si comme le dit GYLDÉN, $x_3$, $x_4$, ... étaient »négligeables», le 1^er^ membre de (22) ne dépendrait plus que de $x_1$ et $x_2$ et ne contiendrait plus qu'un nombre fini de termes. Il serait donc impossible que $x_1$ et $x_2$ soient tous deux limités.

Enfin montrons plus directement encore que $y$ ne peut être limité. Soit $M$ le maximum de $|y|$. Intégrons l'équation (21) sous la forme:

$$\frac{dy}{du} - \frac{\mu}{2} y^2 = \frac{a}{\sigma}\cos\sigma u + C.$$

Égalons dans les deux membres les coëfficients de $\cos\sigma u$; dans $\frac{dy}{du}$ il est plus petit que $\pi\sigma M$, dans $y^2$ plus petit que $\pi M^2$; nous aurons donc:

$$\pi\sigma M + \pi M^2\frac{\mu}{2} > \left|\frac{\alpha}{\sigma}\right|$$

ce qui montre que $M$ croît indéfiniment avec $\frac{\alpha}{\sigma}$.

## 10. *Équations du rayon vecteur.*

J'arrive au § 7 page 227. Nous y retrouvons l'équation (1), avec cette différence que le 2[d] membre au lieu de se réduire à un seul terme en comprend plusieurs de même forme, dont je désignerai l'ensemble par $X$. Nous avons donc

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \alpha)\rho - \beta\rho^3 = X \tag{23}$$

Gyldén écrit ici $z$ au lieu de $\rho$; $\beta_3$ au lieu de $\beta$, et $Z$ au lieu de $1 - \alpha$; mais dans toute la 1[ière] partie de son analyse, il suppose $Z$ constant et voisin de 1.

Nous aurons d'ailleurs:

$$X = -\Sigma A_n \cos G_n, \qquad G_n = 2\lambda_n v.$$

Gyldén, page 229 introduit deux variables nouvelles $y$ et $\psi$ et pose:

$$\rho = \frac{y}{1 + \psi}.$$

Alors l'équation (23) est remplacée par les deux équations suivantes (équations (3) et (4) de Gyldén)

$$\frac{d^2\psi}{dv^2} = (1 + \psi)\nu^2 - \beta\frac{y^2}{1 + \psi}, \tag{24}$$

$$\frac{d^2y}{dv^2} + (1 - \alpha - \nu^2)y = (1 + \psi)X + 2\frac{d\psi}{dv}\frac{dy}{dv} + Y \tag{25}$$

où $Y$ désigne un ensemble de termes inutiles à écrire.

Quant à $\nu^2$ c'est une constante choisie de telle façon que $\psi$ soit une série trigonométrique dont la partie constante est nulle.

L'équation (24) peut être remplacée par la suivante: (équation (3') de GYLDÉN):

$$\frac{d^2\psi}{dv^2} - 2\nu^2\psi = U \tag{24 bis}$$

$U$ étant un ensemble de termes inutiles à écrire.

Voici alors comment GYLDÉN conduit les approximations. Il fait d'abord $\psi = 0$ dans les seconds membres de (25) et (24 bis) et il détermine à l'aide de ces deux équations $y$, $\psi$ et $\nu^2$; il substitue ensuite ces valeurs des inconnues dans les 2[ds] membres, ce qui lui fournit des valeurs plus approchées de ces mêmes inconnues et ainsi de suite.

En 1[ière] approximation, il trouve:

$$y = \sum x_n \cos G_n, \qquad \nu^2 = \frac{1}{2}\beta \sum x^2, \qquad x_n = \frac{A_n}{4\lambda_n^2 + \alpha - 1 + \nu^2}$$

et il a aussi page 230 une expression de $\psi$ que je ne transcris pas.

Commençons par comparer avec les résultats du chapitre 1[er]. Dans ce chapitre, le 2[d] membre $X$ se réduisait à un seul terme $-\gamma \cos v$; et GYLDÉN s'efforçait d'obtenir l'intégrale générale dépendant d'une constante arbitraire appelée $x$. Il obtenait ainsi l'équation (2) qui nous l'avons vu est fausse en général; mais quand il se bornait à chercher l'intégrale particulière qui correspond au cas de $x = 0$, son équation se réduisait à

$$\frac{3}{4}\beta x_1^3 + \alpha x_1 - \gamma = 0 \tag{3}$$

*qui est exacte.*

Dans le chapitre que nous citons mainténant, GYLDÉN ne cherche plus l'intégrale générale, mais seulement l'intégrale particulière dont il vient d'être question. Donc, quand $X$ se réduit à un seul terme, il devrait retrouver l'équation (3) à la différence des notations près.

Soit donc

$$X = -A_1 \cos G_1 = -\gamma \cos v$$

c'est à dire:

$$A_1 = \gamma, \qquad 2\lambda_1 = 1.$$

Les formules de la page 230 donnent alors

$$y = x_1 \cos G_1, \qquad x_1 = \frac{A_1}{\alpha + \nu^2}, \qquad \nu^2 = \frac{1}{2}\beta x_1^2, \qquad \psi = \frac{\beta x_1^2}{8 + 4\nu^2}\cos 2G_1.$$

Observons que d'après l'équation (3) si $\alpha$ et $\gamma$ sont très petits et $\beta$ fini, $x_1$ est de l'ordre de $\sqrt[3]{\gamma}$ et par conséquent petit; donc $x_1^2$ et par conséquent $\psi$ sont négligeables devant l'unité. On a donc:

$$\rho = y = x_1 \cos v$$

et

$$\nu^2 x_1 + \alpha x_1 - A_1 = 0$$

ou:

$$\frac{1}{2}\beta x_1^3 + \alpha x_1 - \gamma = 0.$$

C'est bien une équation de la forme (3); mais elle est incompatible avec l'équation (3) puisque les coëfficients sont différents.

La méthode de GYLDÉN est donc non-seulement illégitime, mais encore en contradiction avec l'un des rares résultats exacts qu'il avait obtenus antérieurement.

D'où provient cette divergence? Pour que la méthode d'approximation fussent légitimes, il faudrait que les termes négligés fussent plus petits que les termes conservés. Or il n'en est rien, il est aisé de constater que dans le 2[d] membre de (25) le terme $2\frac{d\psi}{dv}\frac{dy}{dv}$ que l'on néglige est du même ordre que le terme $X$ que l'on conserve. Et cela est vrai, bien entendu, que $X$ se réduise à un seul terme, ou en contienne plusieurs (cf. Comptes Rendus, tome 138, page 933).

### 11. *Analyse du troisième chapitre.*

Enfin dans le chapitre III, GYLDÉN cherche à appliquer aux problème des 3 corps les principes établis dans les deux premiers chapitres; comme nous avons vu que ces principes sont faux, il paraît superflu d'en discuter les applications. Un mot seulement sur la conclusion la plus importante. Les termes les moins élevés de la fonction perturbatrice peuvent donner lieu au phénomène connu sous le nom de libration; mais il n'en est pas de même des termes d'ordre élevé; pour, ceux-ci en effet, les termes horistiques prennent une influence prépondérante et s'opposent à la libration.

La fausseté de cette conclusion est manifeste. J'ai établi en effet par des démonstrations rigoureuses dans les *Méthodes Nouvelles:*

1° Qu'à chaque terme de la fonction perturbatrice, quelque élevé qu'en soit l'ordre correspond un système de solutions périodiques de la 2$^e$ ou de la 3$^e$ sortes; ces solutions sont développables suivant les puissances des masses et les séries convergent pourvu que les masses soient assez petites. (Chapitre III.)

2° Que parmi ces solutions périodiques il y en a autant de stables que d'instables; que les solutions très voisines d'une solution périodique stable, oscillent autour de cette solution périodique, ce qui donne lieu à la libration; que par conséquent un terme quelconque de la fonction perturbatrice engendrera une libration, à moins que les exposants caractéristiques correspondants ne soient tous nuls. (Chapitre IV.)

3° Que d'autre part on ne saurait prétendre que pour les termes d'ordre suffisamment élevé, ces exposants sont nuls. Il suffit pour s'en convaincre de former les expressions approchées des termes d'ordre élevé de la fonction perturbatrice par la méthode de Darboux. (Chapitre VI, en particulier n° 102.)

La conclusion de Gyldén est donc fausse; où s'est-il trompé? Je ne puis le dire exactement; il s'appuie sur ce qu'un certain coëfficient $a$ est négatif pour les termes élevés page 292; d'ou tire-t-il cette affirmation; il m'a été impossible de le découvrir; il la déduit sans doute de quelque proposition antérieure qu'il néglige de rappeler. Quelle est cette proposition, est-ce une de celles dont nous avons reconnu plus haut la fausseté; est-ce une autre qui m'a échappé et qui serait alors également fausse, puisqu'elle conduit à une conclusion inexacte? Je ne puis le savoir.

En résumé de tout ce grand effort, il ne reste rien.

Quelques-uns des résultats sont manifestement exacts, mais on aurait pu y arriver par une voie beaucoup plus rapide; un plus grand nombre sont manifestement faux; la plupart sont énoncés d'une façon trop obscure pour qu'on puisse décider s'ils sont vrais ou faux.