# SUR LES SÉRIES DE MAC-LAURIN À PLUSIEURS VARIABLES

PAR

HENRI DULAC

à Grenoble.

**1.** La théorie des séries de TAYLOR et de MAC-LAURIN à plusieurs variables présente, dès ses débuts, une importante lacune qui a été signalée par plusieurs mathématiciens.[1] Pour nous borner au cas de deux variables, soit

$$F(x, y) = {}^{(n)}\sum f_n(x, y) \equiv {}^{(n)}\sum (a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \cdots + a_{0,n}y^n) \tag{1}$$

une série de polynomes homogènes. Dans les théories classiques, on sépare chaque terme $f_n$ en ses éléments et l'on considère la serie double:

$$ {}^{(p,q)}\sum a_{p,q}x^p y^q . \tag{2}$$

Si cette série (2) converge absolument pour $x = x_0$, $y = y_0$, elle converge absolument dans le domaine $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$ et represente dans ce domaine, une fonction analytique et holomorphe de $x$, $y$. D'où une suite de conséquences classiques.

Mais si on laisse intacts les termes de la série (1), que peut-on dire sur la convergence d'une telle série et sur la fonction qu'elle représente? En particulier, *si une série* (1) *converge uniformément pour toutes les valeurs réelles de* $x$, $y$ *suffisamment petites, converge-t-elle pour les valeurs imaginaires et représente-t-elle une fonction analytique de* $x$, $y$, *holomorphe pour* $x = 0$, $y = 0$?[2]

L'affirmative paraissait très probable; mais il n'en existait pas de démonstration rigoureuse. J'ai pu établir cette démonstration:[3] *une série dont les*

---

[1] Voir une Note de M. PAINLEVÉ (Comptes rendus 2e semestre 1899, p. 27).

[2] En dehors de son intérêt général, la question se pose, ainsi que nous le verrons, dans des applications importantes.

[3] Comptes Rendus: 3 août 1903.

*termes sont des polynomes homogènes, à un nombre quelconque de variables, definit une fonction holomorphe dans le voisinage de l'origine, à condition que cette série soit uniformément convergente dans le domaine $D$ formé par l'ensemble des valeurs des variables réelles et voisines de zéro.* Ce théorème reste vrai, même en supposant le domaine $D$ bien moins étendu. Par exemple, la série (1) définit une fonction holomorphe pour $x = y = 0$, si cette série converge uniformément pour $x$ et $y$ coordonnées des différents points d'un arc de courbe (autre qu'une droite possant par l'origine) tracé dans le plan réel $xoy$.

**2. Lemme.** *Si un polynome $f(x_1, x_2, \ldots x_q)$ homogène ou non, de degré au plus égal à $n$ par rapport à chacune des variables, reste inférieur en module à un nombre $M$, lorsque les affixes des variables $x_1, x_2, \ldots x_q$ occupent, chacune dans son plan, toutes les positions possibles respectivement sur des arcs de courbe $C_1, C_2, \ldots C_q$, les coefficients de ce polynome sont inférieurs en module à $M\lambda^n$; $\lambda$ ne dépend ni des coefficients du polynome, ni de son degré, et ne dépend que des arcs $C_1, C_2, \ldots C_q$ considérés.*

Avant d'établir le théorème dans le cas le plus général, je considère les deux cas particuliers suivants: 1° un polynome $f(x)$, de degré $n$, reste inférieur en module à $M$, lorsque $x$ est réel et varie entre 0 et 1; 2° le module de $f(x)$ reste inferieur à $M$ lorsque $x$ décrit un arc de courbe $C$.

1°. Soit $f(x)$ le polynome de degré $n$. En posant, $x = \cos^2\omega$, on a

$$f(\cos^2\omega) = b_n \cos 2n\omega + b_{n-1}\cos 2(n-1)\omega + \cdots + \frac{b_0}{2} \tag{1}$$

avec

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos^2\omega)\cos 2p\omega\, d\omega.$$

On a par suite:

$$|b_p| < \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} M\, d\omega, \qquad |b_p| < 2M.$$

D'autre part comme on a

$$\cos 2p\omega = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^{2p} + (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^{2p}}{2},$$

$\cos 2p\omega$ est un polynome en $x$ et la somme des modules des coefficients de ce polynome sera inférieure à

$$\frac{(1+\sqrt{2})^{2p}+(1-\sqrt{2})^{2p}}{2},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{(3+2\sqrt{2})^{p}+(3-2\sqrt{2})^{p}}{2}.$$

Cette quantité est inférieure à $\frac{6^p}{2}$ car d'après une propriété connue de la somme des puissances de deux nombres dont la somme est constante, on augmente la somme des deux puissances considérés en remplacant $2\sqrt{2}$ par $3$.

La relation (1) nous donne $f(x)$ comme une somme de polynomes et nous montre que la somme des coefficients de $f(x)$ sera inférieure à

$$M(6^n+6^{n-1}+\cdots+6+1)=M\frac{6^{n+1}-1}{5}.$$

On reconnait facilement que cette somme est inférieure à $7^n M$.

Chacun des coefficients du polynome $f(x)$ est donc inférieur à $7^n M$.

Au reste la valeur du coefficient numérique élevé à la puissance $n$ n'a pas grande importance pour l'objet que nous avons en vue; l'adoption même d'une limite supérieure telle que $2\times 6^n M$ n'entrainerait aucune modification dans les raisonnements et fournirait au contraire des limites plus avantageuses pour la convergence des séries que nous voulons considérer.

2°. Montrons d'abord que si un point $X$ décrit un arc de courbe $C$ et si on considère $q$ points fixes $A_1, A_2, \ldots A_q$ placés d'une façon quelconque le produit

$$\Pi = XA_1\times XA_2\times\cdots\times XA_q$$

prendra nécessairement des valeurs supérieures à $\varrho^q$; $\varrho$ étant un nombre que nous déterminerons et qui ne dépend que de la forme de l'arc $C$.

Projetons les points $A_1, A_2, \ldots A_q$ en $A'_1, A'_2, \ldots A'_q$ sur une droite. Un point $X$ de l'arc $C$ se projettera en $X'$ sur un segment $C'$ projection de $C$. On peut supposer la longeur $l'$ de $C'$ différente de zéro. (Il n'y a qu'à prendre l'axe de projection parallèle à la plus grande corde inscrite dans l'arc $C$). Le produit $\Pi$ sera supérieur au produit

$$\Pi' = X'A'_1\times X'A'_2\times\cdots\times X'A'_q.$$

On ne pourra encore que diminuer ce dernier produit si on remplace chacun des points $A'$ qui se trouve en dehors du segment $C'$ par un point placé à celle des extrémités de $C'$ qui est la plus rapprochée de $A'$: nous supposerons donc que tous les points $A'$ sont situés sur le segment $C'$. Si nous prenons ensuitet par rapport a une des extrémités de $C'$, la figure homothétique, dans le rapport $\frac{1}{l'}$, de l'ensemble des points de $C'$ et si nous désignons par $b_1, b_2, \ldots b_q, u$, les distances à l'extrémité considérée des homologues des points $A'_1, A'_2, \ldots A'_q, X'$ on a

$$\Pi' = l'^q |u - b_1| \times |u - b_2| \times \cdots \times |u - b_q| = l'^q |\varphi(u)|.$$

Je dis qu'il est absurde de supposer que lorsque $u$ varie entre 0 et 1 le module de $\varphi(u)$ ne prend pas de valeurs supérieures à $\frac{1}{(14)^q}$. En effet s'il en était ainsi, d'après 1° les coefficients de $\varphi$ seraient inférieurs à $\frac{7^q}{14^q} = \left(\frac{1}{2}\right)^q$. En particulier la somme des racines de $\varphi$ serait inférieure à $\frac{1}{2}$ et comme toutes les racines sont positives, toutes les racines seraient comprises entre 0 et $\frac{1}{2}$; $\varphi(u)$ serait alors pour $u = 1$ supérieur à $\left(\frac{1}{2}\right)^q$ ce qui est en contradiction avec notre hypothèse. Le module de $\Pi'$ deviendra donc supérieur à $\left(\frac{l'}{14}\right)^q$. On peut toujours trouver un point $X_0$ tel que le module de $\Pi$ soit supérieur à $\varrho^q. \left(\varrho = \frac{l'}{14}\right)$.

Ceci posé considérons le polynome $f(x)$ dont les racines sont $a_1, a_2 \ldots a_n$. Soient $A_1, A_2 \ldots A_n$ les affixes de ces racines et $X$ l'affixe de $x$. Nous supposons que, lorsque $X$ décrit un arc $C$, le module de $f(x)$ reste inférieur à $M$. Prenons dans le plan de la variable complexe $x$ et sur l'axe des quantités réelles le segment $(S)$ dont l'origine et l'extrémité ont respectivement pour abcisses 0 et 1; soit $t$ l'abcisse d'un point $T$ de ce segment. Je puis déterminer un nombre $l$ tel que la distance d'un point quelconque de $S$ à un point quelconque de $C$ reste inférieure à $l$.

Soient $1, 2, 3, \ldots, q$ les indices des racines pour lesquelles la distance $XA_i$ n'est pas constamment supérieure à $l$, lorsque $X$ parcourt $C$, tandis que pour les indices $q+1, q+2 \ldots n$, $XA_i$ reste supérieur à $l$. Pour les racines $a_1, a_2, \ldots a_q$, $TA_i$ reste inférieur à $2l$; en effet soit $X_i$ un point de l'arc $C$ pour lequel on ait $X_iA_i < l$ on a

$$TA_i < TX_i + X_iA_i < 2l.$$

On aura donc

$$Q = \frac{TA_1}{XA_1} \times \frac{TA_2}{XA_2} \times \cdots \times \frac{TA_q}{XA_q} < \frac{(2l)_q}{XA_1 \times XA_2 \times \cdots \times XA_q}$$

et si on prend pour $X$ le point $X_0$ pour lequel le dénominateur du second membre est supérieur à $\varrho^q$, on voit que $Q$ sera inférieur à $\left(\frac{2l}{\varrho}\right)^q$. Considérons le produit

$$R = \frac{TA_{q+1}}{XA_{q+1}} \times \frac{TA_{q+2}}{XA_{q+2}} \times \cdots \times \frac{TA_n}{XA_n}.$$

On a pour $i = q+1,\ q+2, \ldots n$

$$\frac{TA_i}{XA_i} < \frac{TX + XA_i}{XA_i} = \frac{TX}{XA_i} + 1$$

et comme on a $TX < l$ et $XA_i > l$, le rapport considéré sera inférieur à $2$ et $R$ sera inférieur à $2^{n-q}$.

En désignant par $x_0$ la quantité complexe qui a pour affixe $X_0$ nous aurons:

$$\left|\frac{f(t)}{f(x_0)}\right| = \left|\frac{(t-a_1)\ (t-a_2)\ \ldots\ (t-a_n)}{(x_0-a_1)\ (x_0-a_2)\ \ldots\ (x_0-a_n)}\right| = Q \times R < \alpha^n,$$

$\alpha$ designant le plus grand des deux nombres $2$ et $\frac{2l}{\varrho}$.

Nous aurons donc, pour $t$ variant entre $0$ et $1$,

$$|f(t)| < |f(x_0)|\,\alpha^n < M\alpha^n.$$

La limite supérieure des coefficients du polynome $f$ sera, d'après 1°, $(7\alpha)^n M$.

3°. Etablissons le theorème dans le cas général. Le module du polynome $f(x_1, x_2, \ldots x_q)$ reste inférieur à $M$ lorsque les $q$ variables décrivent, chacune dans son plan, respectivement des arcs $C_1, C_2 \ldots C_q$.

Soit $n_i$ le degré du polynome par rapport à $x_i$ et $\lambda_i$ le nombre défini d'après 2° et tel que les coefficients d'un polynome en $x^i$ restent inférieurs à $M\lambda_i^{n_i}$, si le polynome reste, sur l'arc $C_i$, de module inférieur à $M$. Considérons $f$ comme un polynome en $x_1$ dont les coefficients sont des polynomes en $x_2, x_3 \ldots x_q$. Le module de chacun de ces coefficients restera inférieur à $M\lambda_1^{n_1}$. Chacun de ces coefficients étant par rapport à $x_2$ un polynome de degré au plus egal à $n_2$, dont les coefficients sont des polynomes en $x_3, x_4 \ldots x_q$, le module de chacun de ces nouveaux coefficients sera au plus égal à $M\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}$. En continuant ainsi on arrive à montrer que les coefficients des divers termes de $f(x_1, x_2 \ldots x_q)$ sont inférieurs à $M\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2} \ldots \lambda_q^{n_q}$. Les nombres $n_1, n_2 \ldots n_q$ étant supposés au plus égaux à $n$ les coefficients de $f$ seront inférieurs à $M(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_q)^n$, car les $\lambda$ sont supérieurs à un.

**3. Théorème.** *La série*

$$F = {}^{(n)}\sum f^n(x_1,\ x_2,\ \ldots x_q), \tag{3}$$

*dont les termes sont des polynomes homogènes de degré égal à l'indice, définit une fonction holomorphe pour* $x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0$, *si tous les termes* $f_n$ *de la série restent inférieurs en module à un nombre* $M$, *lorsque* $x_q$ *ayant une valeur fixe, les affixes de* $x_1,\ x_2,\ \ldots x_{q-1}$ *prennent chacune dans son plan toutes les positions possibles respectivement sur des arcs de courbe* $C_1,\ C_2,\ \ldots C_{q-1}$.

Le degré de $f_n$ par rapport à $x_1,\ x_2,\ \ldots x_{q-1}$ étant au plus égal à $n$, les coefficients de ce polynome seront d'après le lemme inférieurs en module à $M\lambda^n$. (Certains de ces coefficients seront le produit d'une constante par une puissance de $x_q$). Soit $r$ le module de la valeur fixe que prend $x_q$ dans notre hypothèse. Les termes des différents polynomes $f_n$ seront inférieurs en module aux termes correspondant du développement, suivant les puissances de $x_1,\ x_2,\ \ldots x_{q-1},\ x_q$, de

$$\frac{M r}{(1-\lambda x_1)(1-\lambda x_2)\ldots(1-\lambda x_{q-1})(r-\lambda x_q)}.$$

En effet soit $A_{n_1, n_2, \ldots, n_q} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_{q-1}^{n_{q-1}} x_q^{n_q}$ un terme de $f_n$, on a, d'après le lemme

$$|A_{n_1, n_2, \ldots, n_q}|\, r^{n_q} < M\lambda^n$$

ce qui entraine bien

$$|A_{n_1, n_2, \ldots, n_q} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_{q-1}^{n_{q-1}} x_q^{n_q}| < \frac{M\lambda^n}{r^{n_q}} |x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_{q-1}^{n_{q-1}} x_q^{n_q}|.$$

$F$ définira par suite une fonction analytique de $x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}, x_q$, holomorphe pour

$$|x_1| < \frac{1}{\lambda},\ |x_2| < \frac{1}{\lambda} \ldots |x_{q-1}| < \frac{1}{\lambda},\ |x_q| < \frac{r}{\lambda}.$$

**4.** La méthode qui nous a servi à démontrer le theorème précedent permet d'établir des theorèmes analogues dans des cas où les termes $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ ne sont plus des polynomes homogènes, mais sont soumis à des conditions limitant leur degré. Comme ce sont là des conditions qui se rencontrent peu fréquemment dans les applications, je me bornerai à donner le théorème assez général suivant:

*La série*

$$F = {}^{(n)}\sum f_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_q)$$

*dont les termes sont des polynomes en* $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_q$ *définit une fonction holomorphe pour* $x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0$, *si les trois hypothèses suivantes sont vérifiées:*

1°. *Les divers termes $f_n$ restent inférieurs en module à un nombre $M$, si les affixes de $x_1, x_2, \ldots, x_q$ occupent chacune dans son plan toutes les positions possibles respectivement sur des arcs de courbe $C_1, C_2, \ldots, C_q$.*

2°. *$n'$ designant le degré (par rapport à l'ensemble des variables) du terme de degré le plus élevé de $f_n$ et $n''$ celui du terme de degré le moins élevé, on peut trouver un nombre $k$ tel que l'on ait quel que soit $n$*

$$n' \leq kn''.$$

3°. *Si $\nu$ designe le degré d'un terme tel que $A_{n_1, n_2, \ldots, n_q} x^{n_1} x^{n_2} \ldots x_q^{n_q}$ et si $N$ est le nombre de termes semblables que l'on rencontre dans les divers polynomes $f_n$, on peut trouver un nombre positif fixe $p$ tel que l'on ait, quelque soit le terme considéré*

$$N \leq p^\nu .$$

En raisonnant comme dans le cas 3° du lemme, on démontre d'abord qu'un terme $A_{n_1, n_2, \ldots, n_q} x^{n_1} x^{n_2} \ldots x_q^{n_q}$ provenant du polynome $f_n$ est inférieur en module à $M \lambda^n x^{n_1} x^{n_2} \ldots x^{n_q}$. Comme on a

$$n_1 + n_2 \cdots + n_q = \nu \geq n'',$$

on voit que d'après l'hypothèse 2° ce terme sera inférieur en module à

$$M \lambda^{k\nu} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_q^{n_q}.$$

Si nous groupons maintenant ensemble les divers termes semblables que l'on trouve dans les divers polynomes $f_n$, nous aurons un terme inférieur en module à

$$p^\nu M \lambda^{k\nu} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_q^{n_q}.$$

Possons

$$\alpha = p \lambda^k .$$

La série $F$ définira donc une fonction analytique et holomorphe pour

$$|x_i| < \frac{1}{\alpha} \qquad i = 1, 2, \ldots, q.$$

5. En supposant toujours que $x_1, x_2, \ldots, x_q$ varient dans un domaine $D$ représenté géométriquement par un système de courbes $C_1, C_2, \ldots C_q$ tracées dans les plans respectifs des diverses variables, nous pouvons substituer à l'hypothèse: les termes de la série restent dans le domaine $D$ inférieurs à un nombre $M$, l'hypothèse: on peut trouver deux nombres $M$ et $B$ ($B$ étant en general supérieur

à un) et tels que $f_n$ demeure, quel que soit $n$, et lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_q$ varient dans $D$, inférieurs en module à $MB^{n'}$. Il ne résulte de la substitution d'une hypothèse à l'autre qu'une diminution d'étendue du domaine dans lequel la série $F$ définit une fonction holomorphe.

Au reste si la nouvelle hypothèse est verifiée dans le domaine $D$ les termes de la série resteront inferieurs à $M$, dans un domaine $D_1$, que nous obtiendrons en prenant dans le plan de chacune des variables l'homothétique de la courbe $C$ correspondante, l'origine étant le centre d'homothétie et le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{B}$ ou $\frac{1}{B^k}$, suivant quele polynome est homogène où qu'il satisfait seulement à la condition 2° du théorème du paragraphe 4. De même si nous nous préoccupons seulement du point de vue qualitatif (existence d'un domaine pour lequel la série définit une fonction holomorphe des $q$ variables) et si nous ne nous préoccupons pas du point de vue quantitatif (étendue plus ou moins grande de ce domaine) nous pouvons considérer comme équivalentes les deux hypothèses
1°. Dans le domaine $D$ les termes $f_n$, de la série restent inférieurs à un nombre $M$
2°. Dans le domaine $D$ la série est uniformément convergente.

En effet, si la série est uniformément convergente au sens étroit du mot,[1] on peut évidemment trouver un nombre $M$ supérieur au module des divers termes de la série $F$. D'autre part, si les termes de la série restent inférieurs, dans le domaine $D$ à un nombre $M$ la série sera uniformément convergente dans le domaine $D_1$, obtenu en prenant, dans leurs plans respectifs, les homothétiques des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_q$, l'origine de chacun de ces plans étant le centre d'homothétie et le rapport d'homothétie étant inférieur à un.

**6.** D'après ce qui précède, pour que la série

$$F = {}^{(n)}\sum f_n(x, y) \tag{1}$$

où $f_n$ est un polynome homogène de degré $n$ définisse une fonction holomorphe pour $x = y = 0$, il suffit que la série converge uniformément dans un domaine $D$. Ce domaine $D$ peut être constitué par la valeur fixe $y = y_0$ et par les diverses valeurs que prend $x$ lorsque l'affixe de ce point décrit un arc de courbe $C$, dans le plan de la variable complexe $x$. En prenant pour $y_0$ une valeur réelle et pour $C$ un segment de l'axe des quantités réelles, le domaine $D$ sera réel et representé,

---

[1] On entend par là que, à tout nombre $\varepsilon$ donné, on peut faire correspondre un nombre $N$ tel que l'inégalité $n > N$ entraine l'inégalité $|r_n(x_1, x_2, \ldots, x_q)| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_q$ appartenant au domaine $D$. Par définition on a

$$r_n = F - f_1 - f_2 - \cdots - f_n.$$

dans le plan $xoy$ des variables réelles $x$ et $y$, par un segment de la droite $y=y_0$. Le domaine $D$ peut aussi être constitué par les valeurs de $x$ et de $y$ coordonnées des divers points d'un arc de courbe $\alpha\beta\gamma$ (autre qu'un segment de droite) tracé dans le plan réel $xoy$. En effet la série sera uniformément convergente à l'intérieur du secteur $o\alpha\beta\gamma$; elle le sera en particulier pour tous les points d'un segment compris à l'intérieur de ce secteur et placé sur une droite $y=y_0$. On voit également sans peine qu'on peut supposer le domaine $D$ constitué par l'ensemble des valeurs de $x$ et $y$ données par $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t$ étant un paramètre réel variant entre $t_0$ et $t_1$, $\varphi$ et $\psi$ étant deux fonctions continues entre $t_0$ et $t_1$, l'une au moins des fonctions n'étant pas nulle dans cet intervalle et le quotient $\frac{\varphi}{\psi}$ n'étant pas constant, mais ces deux fonctions pouvant prendre des valeurs imaginaires.

On montrera de même que la série à 3 variables

$$F = {}^{(n)}\sum f_n(x,\ y,\ z)$$

définit une fonction holomorphe pour $x=y=z=0$, si elle est uniformément convergente pour $x$, $y$, $z$ coordonnées réelles d'une portion de surface.

D'une façon générale, la série à $q$ variables definit une fonction holomorphe pour $x_1=x_2=\cdots=x_q=0$, si, $x_1, x_2, \ldots, x_q$ étant les coordonnées d'un point de l'espace à $q$ dimensions, la série converge uniformément sur une portion de surface (autre qu'un plan passant par l'origine).

7. Le théorème général que nous avons démontré fournit des limites assez restreintes du domaine dans lequel la série (1) définit une fonction holomorphe. Dans les questions où il y aurait intérêt à avoir un domaine de convergence holomorphe le plus étendu possible, il y aurait lieu, en appliquant les procédés de démonstration employés, de se servir des hypothèses où on est placé dans chaque cas particulier pour élargir le plus possible ce domaine de convergence. Supposons par exemple que les termes de la série (1) restent inférieurs à $M$ pour $x$ et $y$ coordonnées des différents points *réels* du cercle: $x^2+y^2=R^2$.

En posant

$$x=Ru,\quad y=Rv,\quad u=\cos\theta;\quad v=\sin\theta,$$

on a

$$f_n(Ru,\ Rv)=R^n\varphi(u,\ v).$$

Suivant que $n$ est pair ou impair on a

$$\varphi(\cos\omega,\sin\omega)=\frac{a_0}{2}+\sum a_p\cos p\omega+b_p\sin p\omega \qquad (p=2,4,6,\ldots,n)$$

$$\varphi(\cos\omega,\sin\omega)=\sum a_p\cos p\omega+b_p\sin p\omega \qquad (p=1,3,5,\ldots,n).$$

Ce qui dans le cas de $n$ impair, par exemple, peut s'écrire

$$(4) \qquad \varphi(\cos\omega, \sin\omega) = \sum (a_p \cos p\omega + b_p \sin p\omega)(\cos^2\omega + \sin^2\omega)^{\frac{n-p}{2}}.$$

On montre comme dans le lemme que l'on a

$$|a_p| < 2M \qquad |b_p| < 2M.$$

Comme on a

$$\cos p\omega + i \sin p\omega = (u + iv)^p$$

la somme des modules des coefficients de $\cos p\omega$ ou de $\sin p\omega$ considérés comme polynome en $u$ et $v$ sera inférieur à $2^{p-1}$. Donc d'après (4) la somme des modules de $\varphi(u, v)$ sera dans le cas de $n$ impair inférieure à

$$2M\left(2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2^{\frac{n+1}{2}}\right) = M\left(2^{n+2} - 2^{\frac{n+3}{2}}\right) < 4M\, 2^n.$$

On aura la même limite supérieure de la somme des modules dans le cas de $n$ pair. Chacun des coefficients de $f_n(x, y)$ sera donc inférieur à $4M(2R)^n$. Il en résulte que cette série définira une fonction holomorphe pour

$$|x| \leq \frac{R}{2} \qquad |y| \leq \frac{R}{2}.$$

8. Dans un mémoire sur les équations différentielles du premier ordre[1] M. Poincaré examine le cas où l'origine étant point singulier d'une équation différentielle cette équation est de la forme

$$[y + \varphi_2(x, y)]dy + [x + \psi_2(x, y)]dx = 0,$$

$\varphi_2$ et $\psi_2$ étant des développements suivants les puissances de $x$ et $y$, commençant par des termes du second degré au moins.

Dans le cas où l'équation aux dérivées partielles correspondante

$$[y + \varphi_2(x, y)]\frac{\partial F}{\partial x} - [x + \psi_2(x, y)]\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

est satisfaite formellement par un developpement

$$F = x^2 + y^2 + f_3(x, y) + f_4(x, y) + \cdots + f_n(x, y) + \cdots,$$

où les $f$ sont des polynomes homogènes de degré égal à l'indice, M. Poincaré démontre que la série dont les termes successifs sont $x^2 + y^2$, $f_3$, $f_4 \ldots f_n \ldots$ est

[1] Journal de Mathématiques 1885. Théorie des centres.

uniformément convergente pour $x$ et $y$ *réels* et suffisamment petits. Ce résultat suffit pour établir sans objection possible, les propriétés bien connues des caractéristiques de l'équation (5) dans le voisinage du point considéré. Mais on pourrait élever des objections si, sans démonstration complémentaire, on voulait appliquer le développement $F$ à l'étude des intégrales *dans le domaine complexe* et si, séparant chaque terme $f_n(x, y)$ en ses élements, on voulait considérer la série double en $x$ et en $y$.

La démonstration de M. POINCARÉ permet, à vrai dire, de donner pour la série $F$ des conditions de convergence moins restrictives que celles énoncées: $F$ étant toujours considérée comme série *simple* est convergente, si, en posant $x = \varrho \cos \omega$, $y = \varrho \sin \omega$, on a

$$|\varrho\omega| < \alpha \qquad |\varrho| < \beta,$$

$\alpha$ et $\beta$ étant deux limites faciles à calculer pour une équation différentielle donnée. Mais cela ne suffit pas pour permettre d'employer le développement $F$ à l'étude des intégrales *dans le domaine complexe.* On voit en effet aisément que, si petits qu'on prenne $x$ et $y$, la démonstration ne permet pas de dire que $F$ converge lorsque $\frac{y}{x}$ est voisin de $+i$ ou de $-i$. Le développement $F$ ne nous permet donc pas de considérer les intégrales pour lesquelles $\frac{y}{x}$ tend vers $+i$ ou $-i$ et en particulier de dire qu'il y a ou non une infinité de pareilles intégrales. En supposant même levée cette restriction relative aux valeurs de $\frac{y}{x}$ voisines de $+i$ et $-i$, et en supposant démontré que $F$ converge pour $x$ et $y$ suffisamment petits, nous ne pouvions pas encore affirmer, sans démonstration, que $F$ définit une fonction analytique, holomorphe pour $x = 0$, $y = 0$. Toutes ces objections sont immédiatement levées par le théorème que nous avons énoncé. La série $F$, étant uniformément convergente pour toutes les valeurs réelles de $x$ et $y$ voisines de zéro, définit une fonction holomorphe pour $x = y = 0$.

Les remarques formulées au sujet de la démonstration de M. POINCARÉ peuvent être répétées au sujet de la généralisation remarquable qu'en a donné M. I. BENDIXSON[1] dans le cas d'une équation

$$(6) \qquad [ax + \varphi_2(x, y)]\frac{\partial F}{\partial x} = [by + \psi_2(x, y)]\frac{\partial F}{\partial y}$$

[1] Stockholm, Öfversigt, 1893.

où $a$ et $b$ sont des entiers positifs. C'est pour me débarasser des restrictions relatifs à la convergence d'un développement

$$F = x^b y^a + f_{a+b+1}(x, y) + \cdots + f_{a+b+n}(x, y) \cdots$$

satisfaisant à (6), lorsque ce développement existe, que j'ai indiqué[1] une nouvelle démonstration de la convergence de ce développement.

Ayant rencontré de nouveau les mêmes restrictions dans une démonstration généralisant la théorie des centres[2] pour une équation

$$[Y_n(x, y) + Y_{n+1}(x, y) + \cdots]dy + [X_n(x, y) + X_{n+1}(x, y) + \cdots]dx = 0$$

où les $X$ et les $Y$ sont des polynomes homogènes de degré égal à l'indice, j'ai été amené à établir, pour lever ces restrictions, la théorie développée dans ce mémoire.

---

[1] Journal de l'École Polytechnique, 1904 page 36.

[2] ib. p. 116.