

# REMARQUES DIVERSES SUR L'ÉQUATION DE FREDHOLM.

PAR

H. POINCARÉ.

à PARIS.

## § 1. Formules fondamentales.

Nous écrirons l'équation de FREDHOLM sous la forme suivante:

$$(1) \quad \varphi(x) = \lambda \int f(x, y) \varphi(y) dy + \psi(x);$$

$\varphi(x)$  est la fonction inconnue,  $\psi(x)$  une fonction donnée,  $f(x, y)$  le noyau. La solution du problème nous est donnée par la formule de FREDHOLM:

$$(2) \quad \varphi(x) = \psi(x) + \lambda \int \psi(y) \frac{N(\lambda; x, y)}{D(\lambda)} dy$$

où  $D(\lambda)$  est le  $D_{-if}$  de FREDHOLM, tandis que  $N(\lambda; x, y)$  s'écrit d'après les notations de FREDHOLM:

$$-\frac{1}{\lambda} D_{-if} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nous aurons donc:

$$D(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int f \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1 - \lambda \int f(x_1, x_1) dx_1 + \dots$$

Je n'écris qu'un signe  $\int$  pour une intégration multiple.

Nous aurons de même:

$$N(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int f \begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \dots, x_n \\ y, x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \dots dx_n = f(x, y) - \lambda \int f \begin{pmatrix} x, x_1 \\ y, x_1 \end{pmatrix} dx_1 + \dots$$

Nous sommes ainsi conduits à examiner la formation du déterminant:

$$f \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}.$$

Un des termes de son développement sera de la forme:

$$\pm \Pi f(x_i, x_k)$$

$\Pi f(x_i, x_k)$  représentant le produit d'un certain nombre de facteurs de la forme  $f(x_i, x_k)$ . Ces facteurs doivent satisfaire à la condition suivante: chacune des lettres  $x_1, x_2, \dots, x_n$  devra figurer une fois et une seule *comme*  $x_i$ , c'est à dire comme premier argument de la fonction  $f(x, y)$  dans l'un des facteurs du produit. Elle devra figurer une fois et une seule *comme*  $x_k$ , c'est à dire comme second argument de la fonction  $f(x, y)$  dans l'un des facteurs du produit. A chacun des termes du déterminant correspondra ainsi une permutation des lettres  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; à savoir celle qui change chacune des lettres  $x_i$  en la lettre  $x_k$  correspondante. Il y aura autant de termes dans le déterminant qu'il y a de semblables permutations, c'est à dire  $n!$ ; et le produit  $\Pi$  devra être affecté du signe + si la permutation appartient au groupe alterné et du signe — dans le cas contraire.

On peut répartir les lettres  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en un certain nombre de *cycles* de telle façon que la permutation  $S$  envisagée permute circulairement entre elles les lettres d'un même cycle. Si nous désignons par  $T(S)$  celui des termes  $\pm \Pi f(x_i, x_k)$  de notre déterminant qui correspond à la permutation  $S$ , et si nous posons, pour abrégé,

$$f(x_a, x_\beta, \dots, x_\lambda, x_\mu) = f(x_a, x_\beta) f(x_\beta, x_\gamma) \dots f(x_\lambda, x_\mu) f(x_\mu, x_a)$$

nous pourrons écrire:

$$T(S) = \pm \Pi f(x_i, x_k) = \pm \Pi f(x_a, x_\beta, \dots, x_\lambda, x_\mu).$$

Le dernier membre représente un produit de facteurs de la forme  $f(x_a, x_\beta, \dots, x_\lambda, x_\mu)$ . Chacun de ces facteurs correspond à un des *cycles* de la permutation  $S$  et les lettres

$$x_a, x_\beta, \dots, x_\lambda, x_\mu$$

sont les lettres de ce cycle, qui sont permutées circulairement par  $S$ .

Quant au signe, on l'obtient en faisant le produit de différents facteurs  $\pm 1$  correspondant aux différents facteurs  $f(x_a, x_\beta, \dots, x_\mu)$ , ces facteurs étant

égaux à  $+1$  pour les cycles d'un nombre impair de lettres et à  $-1$  pour les cycles d'un nombre pair de lettres.

Nous poserons:

$$(3) \quad a_n = \int f \left( \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{matrix} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad a(S) = \int T(S) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$b_k = \int f(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda, x_\mu) dx_\alpha dx_\beta \dots dx_\lambda dx_\mu.$$

Dans cette dernière égalité, l'indice  $k$  de  $b_k$  représente le nombre des lettres du cycle  $x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda, x_\mu$ ; l'intégrale ne dépend évidemment que de ce nombre, puisque quelles que soient les lettres  $x_\alpha, \dots, x_\mu$  envisagées, on les fera toujours varier entre les mêmes limites.

Cela posé l'intégrale  $a(S)$  va se décomposer en un produit d'intégrales  $b_k$ , puisque chacun des facteurs de  $T(S)$  ne contient qu'un certain nombre de lettres  $x_\alpha, \dots, x_\mu$  qui ne figurent pas dans les autres facteurs; nous pourrions écrire:

$$a(S) = \pm \Pi b_k$$

ou pour préciser le signe:

$$(4) \quad a(S) = \Pi [(-1)^{k+1} b_k].$$

Si par exemple  $n=17$  et que  $S$  comprenne 1 cycle de 4 lettres, 2 de 3 lettres, 3 de 2 lettres et 2 d'1 lettre, nous aurons:

$$a(S) = (-b_4)(b_3)^2(-b_2)^3(b_1)^2 = b_4 b_3^2 b_2^3 b_1^2.$$

Il faut maintenant calculer

$$a_n = \sum a(S)$$

la sommation étant étendue aux différentes permutations  $S$  de  $n$  lettres. Nous devons donc rechercher combien il y a de permutations comprenant  $a$  cycles de  $\alpha$  lettres,  $b$  cycles de  $\beta$  lettres,  $c$  cycles de  $\gamma$  lettres,  $d$  cycles de  $\delta$  lettres. En d'autres termes de combien de manières peut-on répartir  $n$  lettres en  $a$  groupes de  $\alpha$  lettres,  $b$  de  $\beta$ ,  $c$  de  $\gamma$  et  $d$  de  $\delta$  lettres? On rangera les lettres dans les différents ordres possibles qui sont au nombre de  $n!$ ; on prendra ensuite les  $\alpha$  premières lettres qui nous donneront le 1<sup>er</sup> groupe, puis les  $\alpha$  suivantes qui nous donneront le 2<sup>d</sup>, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait les  $a$  groupes de  $\alpha$  lettres; on prendra ensuite les  $\beta$  lettres suivantes pour former le 1<sup>er</sup> groupe de  $\beta$  lettres et ainsi de suite. On obtiendrait ainsi  $n!$  solutions, mais elles ne sont pas distinctes; on obtient la même répartition en permutant *circulairement* les lettres d'un

même groupe, ce qui nous oblige à diviser par  $\alpha^a \beta^b \gamma^c \delta^d$ ; on obtient la même répartition en permutant d'une manière quelconque les divers groupes qui sont formés d'un même nombre de lettres ce qui nous oblige à diviser par  $a! b! c! d!$ ; le nombre cherché est donc

$$\frac{n!}{\alpha^a \beta^b \gamma^c \delta^d \cdot a! b! c! d!}.$$

On aura donc:

$$a_n = \sum \frac{n!}{\alpha^a \beta^b \gamma^c \delta^d a! b! c! d!} [(-1)^{a+1} b_a]^a [(-1)^{b+1} b_b]^b [(-1)^{c+1} b_c]^c [(-1)^{d+1} b_d]^d.$$

Les entiers  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b, c, d$ , (dont le nombre peut d'ailleurs être quelconque et n'a été pris égal à 4 que pour fixer les idées) sont assujettis à la condition:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = n.$$

On a donc

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{(-1)^n}{a! b! c! d!} \left(\frac{-b_a}{\alpha}\right)^a \left(\frac{-b_b}{\beta}\right)^b \left(\frac{-b_c}{\gamma}\right)^c \left(\frac{-b_d}{\delta}\right)^d.$$

Il vient ensuite:

$$(5) \quad D(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n a_n}{n!} = \sum \frac{1}{a! b! c! d!} \left(\frac{-\lambda^a b_a}{\alpha}\right)^a \left(\frac{-\lambda^b b_b}{\beta}\right)^b \left(\frac{-\lambda^c b_c}{\gamma}\right)^c \left(\frac{-\lambda^d b_d}{\delta}\right)^d$$

de sorte que  $D(\lambda)$  se présente sous la forme d'un produit:

$$D(\lambda) = \prod \varphi_a; \quad \varphi_a = \sum \left(\frac{-\lambda^a b_a}{\alpha}\right)^a \frac{1}{a!}.$$

Mais la sommation est immédiate et l'on trouve:

$$\varphi_a = e^{-\frac{\lambda^a b_a}{\alpha}}; \quad \log \varphi_a = -\frac{\lambda^a b_a}{\alpha}$$

d'où

$$(6) \quad \log D(\lambda) = -\sum \frac{\lambda^a b_a}{\alpha}$$

et en prenant la dérivée logarithmique de  $D(\lambda)$ :

$$(7) \quad \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum \lambda^{a-1} b_a.$$

Ces formules ne sont pas nouvelles, elles ont été énoncées par FREDHOLM qui les a découvertes par une voie différente (Acta Mathematica, tome 27, page 384).

Appliquons la même analyse au calcul de  $N(\lambda)$  et du déterminant

$$f \begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \dots, x_n \\ y, x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}.$$

Chaque terme se présentera encore sous la forme:

$$\pm \Pi f(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\mu)$$

sauf que l'un des facteurs sera remplacé par

$$(8) \quad f(x, y; x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda) = f(x, x_\alpha) f(x_\alpha, x_\beta) \dots f(x_\lambda, y).$$

Si nous posons

$$\int f(x, y; x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda) dx_\alpha dx_\beta \dots dx_\lambda = f_{k+1}(x, y)$$

cette intégrale ne dépendra que du nombre  $k$  des variables  $x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda$  par rapport auxquelles on intègre; c'est ce nombre qui figure dans l'indice  $k + 1$ . Cette fonction  $f_{k+1}(x, y)$  n'est autre chose que ce qu'on appelle le *noyau réitéré* d'ordre  $k + 1$ . On aura d'ailleurs:

$$b_k = \int f_k(x, x) dx.$$

Si alors par analogie avec les notations adoptées plus haut nous désignons par  $T'(S)$  un quelconque des termes de notre nouveau déterminant et par  $a'(S)$  l'intégrale de  $T'(S)$ , nous trouverons comme plus haut:

$$a'(S) = \pm f_{h+1}(x, y) \Pi b_k$$

avec la condition:

$$h + \Sigma k = n.$$

Le facteur  $f_{h+1}(x, y)$  provient de l'intégration du facteur (8) et les divers facteurs  $b_k$  de l'intégration des autres facteurs de la forme  $f(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda)$ . Je puis encore écrire:

$$a'(S) = (-1)^h f_{h+1} a(S')$$

où  $S'$  est la substitution que permute entre elles les lettres qui figurent dans les facteurs autres que le facteur (8) et de la façon indiquée par l'ordre de ces lettres dans ces divers facteurs. Si alors nous désignons par  $a'_n$  l'intégrale de notre déterminant lui-même, il viendra en remarquant qu'on obtient autant de fois le même terme qu'il y a de manières de choisir les  $h$  lettres  $x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda$  qui fi-

gurent dans le facteur (8); c'est à dire autant de fois qu'il y a d'arrangements de  $n$  lettres  $h$  à  $h$ ; c'est à dire  $\frac{n!}{n-h!}$

$$a'_n = \sum (-1)^h f_{h+1} a_{n-h} \frac{n!}{n-h!}$$

ou

$$N(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} a'_n = \sum \lambda^h f_{h+1} (-\lambda)^{n-h} \frac{n!}{n-h!} = D(\lambda) \sum \lambda^h f_{h+1}$$

d'où enfin

$$(9) \quad \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum \lambda^h f_{h+1}.$$

Cette formule s'obtiendrait immédiatement en cherchant à développer suivant les puissances de  $\lambda$  la solution de l'équation (1).

Bien que les séries (6), (7) et (9) ne convergent que pour les petites valeurs de  $\lambda$ , leur considération peut abrégier le calcul des termes des séries  $D(\lambda)$  et  $N(\lambda)$ , qui, elles, convergent toujours. Mais ce n'est pas là l'usage que je veux en faire.

## § 2. Cas où le noyau devient infini.

La fonction

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}$$

se présente sous la forme d'une fonction méromorphe de  $\lambda$ ; mais elle peut être mise d'une infinité de manières sous la forme du quotient de deux fonctions entières. En effet on pourrait écrire:

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{N(\lambda)G(\lambda)}{D(\lambda)G(\lambda)}$$

$G(\lambda)$  étant une fonction entière quelconque de  $\lambda$ ; et si l'on veut que la fraction du second membre soit irréductible, il suffit de prendre

$$G(\lambda) = e^{H(\lambda)}$$

$H(\lambda)$  étant une fonction entière. En particulier nous pouvons prendre:

$$H(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{a-n} \frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}.$$

Alors le dénominateur  $D(\lambda)G(\lambda)$  reste une fonction entière, et le développement de son logarithme est le même que celui de  $\log D(\lambda)$  en supprimant les  $n$  premiers termes.

Ces considérations prennent surtout de l'intérêt dans les cas où la méthode de FREDHOLM ne s'applique pas immédiatement, et où il faut recourir à la généralisation exposée par FREDHOLM pages 384 sqq., par le moyen des noyaux réitérés.

La méthode de FREDHOLM s'applique immédiatement quand le noyau  $f$  reste partout fini; supposons maintenant que les premiers noyaux réitérés

$$f, f_2, \dots, f_{n-1}$$

deviennent infinis, mais que  $f_n$  et les noyaux suivants  $f_{n+1}, \dots$  restent partout finis. Nous supposons de plus que les intégrales

$$\int f_i(x, y) \psi(y) dy \quad (i = 1, 2, \dots \text{ ad inf.})$$

restent finies. Toutes ces conditions sont remplies dans l'hypothèse faite par FREDHOLM dans son § 6, c'est à dire si le noyau  $f(x, y)$  ne devient infini que pour  $x = y$  et comme  $(x - y)^\alpha$  où  $\alpha < \frac{n-1}{n}$ .

L'équation (1) du § 1 peut alors être remplacée par la suivante:

$$(1 \text{ bis}) \quad \varphi(x) = \lambda^n \int f_n(x, y) \varphi(y) dy + \Theta(x)$$

où

$$\Theta(x) = \psi(x) + \int \psi(y) [\lambda f + \lambda^2 f_2 + \dots + \lambda^{n-1} f_{n-1}] dy$$

est une fonction connue. La méthode de FREDHOLM est alors immédiatement applicable à l'équation (1 bis), et on peut la résoudre par une formule analogue à la formule (2) du § 1, où l'on remplace seulement  $\lambda$  par  $\lambda^n$ ,  $f$  par  $f_n$ , et  $\psi$  par  $\Theta$ . Si nous convenons d'écrire  $N(\lambda, f)$  et  $D(\lambda, f)$  au lieu de  $N(\lambda)$  et  $D(\lambda)$  pour mettre en évidence la fonction  $f$ , la nouvelle formule pourra s'écrire:

$$(2 \text{ bis}) \quad \varphi(x) = \Theta(x) + \lambda^n \int \Theta(y) \frac{N(\lambda^n, f_n)}{D(\lambda^n, f_n)} dy$$

ou bien encore

$$(2 \text{ ter}) \quad \varphi(x) = \psi(x) + \lambda \int \psi(y) \frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda^n, f_n)} dy.$$

Pour définir  $N_1(\lambda)$ , nous poserons

$$f + \lambda f_2 + \dots + \lambda^{n-2} f_{n-1} = F(x, y)$$

et nous aurons alors

$$N_1(\lambda) = F(x, y)D(\lambda^n, f_n) + \lambda^n N(\lambda^n, f_n) + \lambda^{n+1} \int N(\lambda^n, f_n; x, z) F(z, y) dz.$$

La fonction

$$\frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda^n, f_n)}$$

se présente sous la forme d'une fonction méromorphe; et nous sommes certains que le numérateur et le dénominateur sont des séries entières toujours convergentes. Mais il n'est pas certain que cette fraction soit irréductible; il est même aisé de se rendre compte qu'elle ne l'est pas en général. En effet la formule subsiste quand le noyau  $f$  est toujours fini; mais dans ce cas la formule (2) est vraie également de sorte qu'on a:

$$\frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda^n, f_n)} = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda, f)}$$

le dénominateur de la 1<sup>ère</sup> fraction admet tous les zéros

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots$$

du dénominateur de la 2<sup>de</sup>; mais il admet en outre tous les zéros

$$\alpha \lambda_1, \alpha \lambda_2, \dots$$

où  $\alpha$  est une racine  $n^e$  de l'unité. Cela montre que la 1<sup>ère</sup> fraction n'est pas irréductible.

Le problème que je me propose maintenant, c'est dans le cas où les premiers noyaux réitérés ne sont pas partout finis, *de trouver une formule analogue à la formule (2 ter) mais où figure une fraction irréductible.*

Et je me propose d'établir que le résultat est le suivant. Il suffira de remplacer dans la formule (2)  $N(\lambda)$  et  $D(\lambda)$  par

$$N(\lambda)e^{-H(\lambda)}, \quad D(\lambda)e^{-H(\lambda)}$$

où  $H(\lambda)$  est l'ensemble des  $n-1$  premiers termes de  $\log D(\lambda)$ . Reprenons le développement de ce logarithme

$$\log D(\lambda) = - \sum \frac{\lambda^a b_a}{\alpha};$$



$b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  peuvent être infinis, mais  $b_n, b_{n+1}, \dots$  sont finis. Formons alors la série

$$K(\lambda) = -\frac{\lambda^n b_n}{n} - \frac{\lambda^{n+1} b_{n+1}}{n+1} - \frac{\lambda^{n+2} b_{n+2}}{n+2} - \dots$$

Nous montrerons que la série  $K(\lambda)$  est convergente pour les petites valeurs de  $\lambda$ ; que  $e^{K(\lambda)}$  est une fonction entière; que

$$e^{K(\lambda)} \sum \lambda^h f_{h+1}$$

est également une fonction entière; sauf pour  $x = y$  auquel cas quelques-uns de ses coefficients deviennent infinis.

Revenons un instant au cas où  $f$  reste fini; et reprenons la formule (9) du § 1

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda^h f_{h+1}.$$

Si nous revenons au cas où  $f_n$  est le premier noyau réitéré qui reste fini, et si nous changeons  $\lambda$  en  $\lambda^n$  et  $f$  en  $f_n$ , cette formule deviendra:

$$(3) \quad \frac{N(\lambda^n, f_n)}{D(\lambda^n, f_n)} = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda^{nh} f_{nh+n}$$

ou en mettant en évidence les variables  $x$  et  $y$

$$\frac{N(\lambda^n, f_n; x, y)}{D(\lambda^n, f_n)} = \sum \lambda^{nh} f_{nh+n}(x, y)$$

d'où en supprimant pour abrégier les indications  $\lambda^n$  et  $f_n$  devenues inutiles:

$$(4) \quad \int \frac{N(x, x)}{D} dx = \sum \lambda^{nh} b_{nh+n}$$

et

$$(5) \quad \int \frac{N(x, y)}{D} f_k(y, x) dx dy = \sum \lambda^{nh} \int f_{nh+n}(x, y) f_k(y, x) dx dy = \sum \lambda^{nh} b_{nh+n+k}.$$

Reprenons notre fonction  $K(\lambda)$ , nous aurons:

$$-\frac{dK}{d\lambda} = \lambda^{n-1} b_n + \lambda^n b_{n+1} + \lambda^{n+1} b_{n+2} + \dots$$

le second membre peut s'écrire:

$$\lambda^{n-1} \sum \lambda^{nh} b_{nh+n} + \lambda^n \sum \lambda^{nh} b_{nh+n+1} + \dots + \lambda^{n+k-1} \sum \lambda^{nh} b_{nh+n+k} + \dots + \lambda^{2n-2} \sum \lambda^{nh} b_{nh+2n-1}$$

ou bien :

$$(6) \quad \lambda^{n-1} \int \frac{N(x, x)}{D} dx + \sum_{k=1}^{k=n-1} \lambda^{n+k-1} \int \frac{N(x, y)}{D} f_k(y, x) dx dy.$$

Comme  $D = D(\lambda^n, f_n)$  et  $N(x, y) = N(\lambda^n, f_n; x, y)$  sont des fonctions entières de  $\lambda$  on voit que l'expression (6) et par conséquent  $\frac{dK}{d\lambda}$  est une fonction méromorphe de  $\lambda$  et que les infinis de cette fonction méromorphe ne sont autre chose que les zéros de  $D(\lambda^n, f_n)$ .

Or d'après FREDHOLM, si l'on a :

$$D(\lambda_K^n, f_n) = 0$$

et si  $\lambda_K^n$  est un zéro simple, ce que je supposerai, il existera une fonction  $\varphi_K(x)$  et une seule telle que :

$$(7) \quad \varphi_K(x) = \lambda_K^n \int \varphi_K(y) f_n(x, y) dy.$$

En convenant de poser :

$$\int \varphi(y) f_p(x, y) dy = S^p \varphi(x)$$

d'où

$$S^p [S^q \varphi(x)] = S^{p+q} \varphi(x)$$

cette relation peut s'écrire

$$(7 \text{ bis}) \quad \varphi_K(x) = \lambda_K^n S^n \varphi_K(x)$$

on en déduit :

$$S \varphi_K(x) = \lambda_K^n S^{n+1} \varphi_K(x) = \lambda_K^n S^n [S \varphi_K(x)]$$

de sorte que  $S \varphi_K(x)$  sera aussi une solution de l'équation (7) ou (7 bis); comme cette équation ne comporte qu'une solution, on devra avoir :

$$S \varphi_K(x) = \alpha \varphi_K(x)$$

$\alpha$  étant un coefficient constant.

On en tire

$$S^n \varphi_K(x) = \alpha^n \varphi_K(x)$$

d'où en comparant avec (7 bis)

$$\alpha^n = \frac{1}{\lambda_K^n}$$

ce qui revient à dire que  $\alpha$  est égal à  $\frac{1}{\lambda_K}$  à une racine  $n^e$  près de l'unité. Nous

pourrons toujours choisir  $\lambda_K$  de telle façon que cette racine  $n^e$  soit égale à 1 et que l'on ait :

$$(8) \quad \varphi_K(x) = \lambda_K S \varphi_K(x).$$

On obtiendrait un résultat analogue dans le cas d'une racine multiple; je ne reproduis pas ici l'analyse complète qui a déjà été faite bien des fois. Cela posé reprenons notre fonction méromorphe  $\frac{dK}{d\lambda}$  et proposons-nous de déterminer le résidu de cette fonction méromorphe pour le pôle  $\lambda = \lambda_K$  et pour les pôles correspondants  $\lambda = \alpha \lambda_K$ ,  $\alpha$  étant une racine  $n^e$  de l'unité.

Cherchons d'abord ce résidu pour

$$\int \frac{N(x, x)}{D} dx = \sum \lambda^{nh} b_{nh+n}.$$

Cette expression n'est autre chose que

$$-\frac{d \log D(\lambda^n, f_n)}{d \lambda^n}.$$

Son résidu est donc  $-1$ , si l'on considère  $\lambda^n$  comme la variable indépendante, c'est-à-dire que le terme infini sera de la forme

$$-\frac{1}{\lambda^n - \lambda_K^n}$$

et le résidu correspondant, si l'on reprend  $\lambda$  comme variable est

$$-\frac{1}{n \lambda^{n-1}}$$

c'est-à-dire:  $-\frac{1}{n} \lambda_K^{1-n}$  pour le pôle  $\lambda_K$  et  $-\frac{1}{n} (\alpha \lambda_K)^{1-n}$  pour le pôle  $\alpha \lambda_K$ . Pour

le premier terme de l'expression (6), le résidu est donc  $\frac{1}{n}$  tant pour le pôle  $\lambda_K$  que pour le pôle  $\alpha \lambda_K$ . Considérons maintenant le terme général de l'expression (6), c'est-à-dire:

$$\lambda^{n+p-1} \int \frac{N(x, y)}{D} f_p(y, x) dx dy.$$

Le résidu de  $\frac{N(x, y)}{D}$  pour  $\lambda^n = \lambda_K^n$  en considérant de nouveau  $\lambda^n$  comme la variable indépendante sera une fonction de  $x$  et  $y$  de la forme  $\varphi_K(x) \psi_K(y)$ , en vertu d'un théorème connu d'après ce qui précède: le résidu par rapport à  $\lambda^n$  de

devra être

$$\int \frac{N(x, x)}{D} dx$$

et celui de

$$-1 = \int \varphi_K(x) \psi_K(x) dx$$

sera

$$\int \frac{N(x, y)}{D} f_p(y, x) dx dy$$

$$\int \varphi_K(x) \psi_K(y) f_p(y, x) dx dy.$$

Mais on a d'après l'équation (8)

$$\int \varphi_K(x) f(y, x) dx = S \varphi_K(y) = \frac{1}{\lambda_K} \varphi_K(y)$$

et plus généralement:

$$\int \varphi_K(x) f_p(y, x) dx = S^p \varphi_K(y) = \frac{1}{\lambda_K^p} \varphi_K(y).$$

Le résidu cherché sera donc

$$\frac{1}{\lambda_K^p} \int \varphi_K(y) \psi_K(y) dy = -\frac{1}{\lambda_K^p}$$

et par rapport à  $\lambda$ :

$$-\frac{1}{n \lambda_K^p \lambda^{n-1}} = -\frac{1}{n} \lambda_K^{1-n-p} \alpha^{1-n}$$

pour le pôle  $\lambda = \alpha \lambda_K$ ; pour le terme correspondant de l'expression (6), qui est affecté du facteur  $\lambda^{n+p-1}$ ; il faudra multiplier par

$$\lambda^{n+p-1} = (\alpha \lambda_K)^{n+p-1}$$

de sorte qu'on trouvera:

$$-\frac{1}{n} \alpha^p.$$

Nous avons trouvé pour le premier terme de l'expression (6)

$$-\frac{1}{n} = -\frac{1}{n} \alpha^0$$

de sorte que le résidu total de l'expression (6) est

$$-\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} \alpha^p.$$

Cela fait  $-1$  pour le pôle  $\lambda = \lambda_K$ , c'est-à-dire pour  $\alpha = 1$ , et 0 pour le pôle  $\lambda = \alpha \lambda_K$  quand  $\alpha$  est une racine  $n^{\text{e}}$  de l'unité différente de 1.

Ainsi, l'expression

$$\frac{dK}{d\lambda} = -\lambda^{n-1} b_n - \lambda^n b_{n+1} - \dots$$

est une fonction méromorphe de  $\lambda$  dont tous les résidus sont égaux à 0 ou à 1. Donc l'expression

$$e^{K(\lambda)}$$

sera une fonction entière de  $\lambda$ .

C. Q. F. D.

Il resterait à établir que

$$(9) \quad \sum \lambda^h f_{h+1} e^{K(\lambda)}$$

est également une fonction entière de  $\lambda$ .

En effet nous avons d'après la formule (2 ter)

$$\sum \lambda^h f_{h+1} = \frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda^n, f_n)}$$

ce qui nous prouve que l'expression (9) est une fonction méromorphe de  $\lambda$ , qui ne pourrait devenir infinie que pour  $D(\lambda^n, f_n) = 0$ , c'est-à-dire pour  $\lambda = \lambda_K$  et pour  $\lambda = \alpha \lambda_K$ . Comme  $e^{K(\lambda)}$  s'annule pour  $\lambda = \lambda_K$ , nous voyons que l'expression (9) c'est-à-dire

$$\frac{N_1(\lambda)}{D} e^{K(\lambda)}$$

où j'ai écrit  $D$  au lieu de  $D(\lambda^n, f_n)$  reste finie pour  $\lambda = \lambda_K$ ; il me reste à montrer que  $N_1(\lambda)$  s'annule pour  $\lambda = \alpha \lambda_K$ ; ou que le résidu correspondant de  $\frac{N_1}{D}$  est nul.

Nous avons donc à évaluer le résidu de

$$(10) \quad \frac{N_1}{D} = F + \lambda^n \frac{N(x, y)}{D} + \lambda^{n+1} \int \frac{N(x, z)}{D} F(z, y) dz.$$

Le 1<sup>er</sup> terme du 2<sup>d</sup> membre de (10) ne devient pas infini; le second a pour résidu:

$$[\lambda_K^n \varphi_K(x) \psi_K(y)] \frac{1}{n \lambda_K^{n-1}}$$

et le troisième

$$\frac{1}{n \lambda_K^{n-1}} \alpha \lambda_K^{n+1} \int \varphi_K(x) \psi_K(z) F(z, y) dz = \frac{1}{n \lambda_K^{n-1}} \sum \alpha^p \lambda_K^{n+p} \int \varphi_K(x) \psi_K(z) f_p(z, y) dz.$$

Nous sommes donc amenés à calculer

$$\int \psi_K(z) f_p(z, y) dz.$$

Nous démontrerons bientôt que l'on a :

$$(11) \quad \int \psi_K(z) f_p(z, y) dz = \lambda_K^{-p} \psi_K(y)$$

de sorte qu'il viendra pour notre résidu :

$$\frac{1}{n \lambda_K^{n-1}} \sum_{p=1}^{n-1} \alpha^p \lambda_K^n \varphi_K(x) \psi_K(y)$$

et pour le résidu total de l'expression (10)

$$\frac{1}{n \lambda_K^{n-1}} \lambda_K^n \varphi_K(x) \psi_K(y) \sum_{p=0}^{n-1} \alpha^p = 0.$$

Donc l'expression (9) ne devenant infinie ni pour  $\lambda = \lambda_K$ , ni pour  $\lambda = \alpha \lambda_K$  est une fonction entière

C. Q. F. D.

Il nous reste à démontrer l'égalité (11). A cet effet, remarquons que  $N(y, x)$  et  $f_p(y, x)$  sont à  $f(y, x)$ , ce que  $N(x, y)$  et  $f_p(x, y)$  sont à  $f(x, y)$ . Le résidu de  $\frac{1}{D} N(x, y)$  étant  $\varphi_K(x) \psi_K(y)$  et par conséquent celui de  $\frac{1}{D} N(y, x)$  étant  $\varphi_K(y) \psi_K(x)$ , nous voyons que  $\psi_K(x)$  est à  $f(y, x)$  ce que  $\varphi_K(x)$  est à  $f(x, y)$ . Alors de même que l'on a

$$(12) \quad \varphi_K(x) = \lambda_K^n \int \varphi_K(y) f_n(x, y) dy$$

et que  $\varphi_K(x)$  est la seule solution de cette équation; de même on aura :

$$(12 \text{ bis}) \quad \psi_K(x) = \lambda_K^n \int \psi_K(y) f_n(y, x) dy$$

et  $\psi_K(x)$  sera la seule solution de cette équation. De l'équation (12) nous avons déduit

$$(13) \quad \varphi_K(x) = \beta \lambda_K \int \varphi_K(y) f(x, y) dy$$

$\beta$  étant une racine  $n^e$  de l'unité, de même de (12 bis) nous déduisons

$$(13 \text{ bis}) \quad \psi_K(x) = \beta' \lambda_K \int \psi_K(y) f(y, x) dy$$

$\beta'$  étant une racine  $n^e$  de l'unité; et il reste à faire voir que  $\beta = \beta' = 1$ . Pour cela remarquons que  $f_{n+1}$  étant toujours fini comme  $f_n$ , nous pouvons raisonner sur l'un de ces noyaux comme sur l'autre. Il existera donc des fonctions  $\varphi'_K(x)$  et  $\psi'_K(x)$  satisfaisant aux équations:

$$(14) \quad \varphi'_K(x) = \gamma \lambda_K \int \varphi'_K(y) f(x, y) dy$$

$$(14 \text{ bis}) \quad \psi'_K(x) = \gamma' \lambda_K \int \psi'_K(y) f(y, x) dy$$

$\gamma$  et  $\gamma'$  étant deux racines  $n + 1^es$  de l'unité. Il est aisé de voir que  $\varphi'_K$  est égal à  $\varphi_K$ , et  $\psi'_K$  à  $\psi_K$ ; sans quoi on aurait:

$$\varphi'_K(x) = \gamma^n \lambda_K^n \int \varphi'_K(y) f_n(x, y) dy$$

$$\psi'_K(x) = \gamma'^n \lambda_K^n \int \psi'_K(y) f_n(y, x) dy$$

et nous devrions conclure que  $D(\lambda^n, f_n)$  admet outre la racine  $\lambda_K^n$  les racines  $\gamma^n \lambda_K^n$  et  $\gamma'^n \lambda_K^n$ , c'est-à-dire plusieurs racines (deux au moins, ou une racine double) de même module que  $\lambda_K^n$ . Cela n'arrivera pas en général (et il est aisé de voir comment on devrait raisonner dans les cas d'exception).

Il faut donc que

$$\varphi'_K = \varphi_K, \quad \psi'_K = \psi_K, \quad \gamma = \beta, \quad \gamma' = \beta'$$

d'où enfin  $\gamma^n = \beta^n = 1, \quad \gamma'^n = \beta'^n = 1; \quad \gamma^n = \gamma^{n+1} = 1, \quad \gamma'^n = \gamma'^{n+1} = 1$

$$\gamma = \gamma' = 1.$$

L'équation (13 bis) s'écrit alors

$$\psi_K(x) = \lambda_K \int \psi_K(y) f(y, x) dy$$

et il est aisé d'en déduire

$$\psi_K(x) = \lambda_K^p \int \psi_K(y) f_p(y, x) dy$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (11) qu'il fallait démontrer.

### § 3. Formation de la fonction méromorphe.

On peut tirer de là une façon de calculer les divers termes du développement du numérateur et du dénominateur de notre fonction méromorphe. Nous avons trouvé plus haut :

$$(1) \quad \log D(\lambda) = - \sum \frac{\lambda^a b_a}{\alpha}$$

formule que nous avons déduite de la suivante :

$$(2) \quad D(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n a_n}{n!} = \sum \frac{1}{a! b! c! d!} \left( \frac{-\lambda^a b_a}{\alpha} \right)^a \left( \frac{-\lambda^b b_b}{\beta} \right)^b \left( \frac{-\lambda^c b_c}{\gamma} \right)^c \left( \frac{-\lambda^d b_d}{\delta} \right)^d.$$

Comment pourrions-nous passer de ces développements à ceux de notre nouveau dénominateur  $e^{K(\lambda)}$  et de son logarithme  $K(\lambda)$ . Pour passer du développement (1) à celui de  $K(\lambda)$ , il suffit de supprimer les  $n-1$  premiers termes, c'est-à-dire de remplacer  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  par 0; on obtiendra de même le développement de  $e^K$  en partant du développement (2) et en y remplaçant  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  par 0. Soit donc :

$$(2 \text{ bis}) \quad e^{K(\lambda)} = \sum \frac{(-\lambda)^n a'_n}{n!}.$$

Nous avons trouvé plus haut

$$a_n = \Sigma a(S) = \Sigma \pm b_a^a b_b^b b_c^c b_d^d.$$

Pour obtenir  $a'_n$ , il suffira dans le 3<sup>e</sup> membre de cette double égalité de remplacer  $b_1, \dots, b_{n-1}$  par zéro. Mais  $a(S)$  provient de l'intégration d'un des termes  $T(S)$  du déterminant

$$f \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}$$

et  $b_a$  de celle de la fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_a)$ . D'où la règle suivante :

Quand le noyau deviendra infini pour  $x = y$  de la même façon que  $(x-y)^\alpha$  où  $\alpha < \frac{n-1}{n}$ , on pourra former le dénominateur de notre fonction méromorphe en appliquant la règle générale de FREDHOLM; et par conséquent en partant des déterminants



$$f \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}$$

seulement il faudra supprimer tous ceux des termes de ces déterminants qui contiennent un facteur de la forme:

$$f(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \dots, x_\lambda, x_\mu) = f(x_\alpha, x_\beta) f(x_\beta, x_\gamma) \dots f(x_\lambda, x_\mu) f(x_\mu, x_\alpha)$$

les lettres  $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \dots, x_\lambda, x_\mu$  formant un cycle de moins de  $n$  lettres.

La même règle s'applique à la formation du numérateur.

Dans le cas de  $n = 2$ , il suffira donc de supprimer les facteurs de la forme  $f(x_i, x_i)$ , c'est-à-dire de remplacer dans nos déterminants tous les termes de la diagonale principale par zéro. Cette règle, dans ce cas particulier, avait déjà été trouvée par une autre voie par HILBERT dans le dernier paragraphe de son premier mémoire (Göttinger Nachrichten, 1904).

#### § 4. La question du genre.

FREDHOLM a démontré que les coefficients de la fonction entière  $D(\lambda)$  décroissent comme  $(n^n)^{-\frac{1}{2}}$ ; et que la décroissance est plus rapide encore quand le noyau  $f(x, y)$  satisfait à certaines conditions de continuité. Si par exemple on a:

$$(1) \quad \begin{aligned} |f(x, y) - f(x, y')| &< A |y - y'|^\alpha \\ |f(x, y) - f(x', y)| &< A |x - x'|^\alpha \end{aligned}$$

$A$  et  $\alpha$  étant des constantes, les coefficients  $a_n$  décroîtront comme  $(n^n)^{-\alpha - \frac{1}{2}}$ .

D'un autre côté HADAMARD a démontré que si le  $n^{\text{e}}$  coefficient d'une fonction entière est de l'ordre de  $(n^n)^{-\frac{1}{\lambda}}$ , le genre de cette fonction entière sera  $E$ , en désignant par  $E + 1$  l'entier immédiatement supérieur à  $\lambda$ . Si  $\lambda$  est entier, il peut y avoir doute et le genre peut être égal à  $\lambda$  ou à  $\lambda - 1$ .

Donc le genre de la fonction  $D(\lambda)$  dépendra de l'exposant  $\alpha$  qui figure dans les inégalités (1); il sera zéro pour  $\alpha > \frac{1}{2}$ , il sera au plus égal à 1 pour  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ ; et enfin au plus égal à 2 pour  $\alpha = 0$ . Si donc le noyau a des dérivées premières finies de sorte que  $\alpha = 1$ , le genre de  $D(\lambda)$  sera certainement nul.

Nous pouvons nous demander ce que devient l'exposant  $\alpha$  quand on passe du noyau  $f(x, y)$  aux noyaux réitérés successifs. Supposons que  $f(x, y)$  soit de la forme:

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{|x - y|^\alpha} \quad \left( \alpha < \frac{1}{2} \right)$$

$\psi(x, y)$  étant holomorphe. On peut alors établir l'inégalité:

$$|f_2(x', y) - f_2(x, y)| < A |x - x'|^{1-2\alpha}$$

$A$  étant une constante. La fonction

$$D(\lambda^2, f_2)$$

sera donc une fonction entière de genre 0 par rapport à  $\lambda^2$  pourvu que l'exposant  $1 - 2\alpha$  soit plus grand que  $\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire pourvu que

$$\alpha < \frac{1}{4}.$$

Si alors le noyau  $f(x, y)$  n'est pas partout fini, la fonction  $D(\lambda, f)$  n'existe pas en général, mais nous pouvons comme dans le § 2, former les deux fonctions entières

$$e^{K(\lambda)}, \quad \sum \lambda^h f_{h+1} e^{K(\lambda)};$$

on a d'ailleurs

$$D(\lambda^2, f_2) = e^{K(\lambda)} e^{K(-\lambda)}.$$

La fonction  $e^{K(\lambda)}$  sera en général dans ce cas de genre 1, de sorte que  $e^{K(\lambda)}$  sera le produit d'un certain nombre de facteurs primaires de la forme:

$$e^{\beta \lambda (1 - \gamma \lambda)}.$$

Le facteur primaire correspondant de  $e^{K(-\lambda)}$  sera alors:

$$e^{-\beta \lambda (1 + \gamma \lambda)}$$

et celui de  $D(\lambda^2, f_2)$  sera

$$1 - \gamma^2 \lambda^2$$

ce qui explique que la fonction  $D(\lambda^2, f_2)$  soit de genre zéro.

Les résultats des trois premiers §§ s'appliquent sans changement lorsque les intégrales et les fonctions connues ou inconnues qui figurent dans l'équations de FREDHOLM sont des intégrales doubles ou triples, et des fonctions de deux et de trois variables, au lieu d'être des intégrales simples, et des fonctions d'une seule variable. Mais il n'en est pas de même des résultats relatifs au genre que nous venons d'exposer. Le genre ne s'abaisse plus quand les inégalités (1) sont satisfaites, ou plutôt il s'abaisse moins rapidement. Un résultat

subsiste toutefois, et c'est le seul qui nous importe, *le genre de  $D(\lambda)$  reste toujours au plus égal à 2.*

Comme d'ailleurs nous avons:

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum \lambda^{n-1} b_n$$

et que l'on peut écrire en décomposant  $D(\lambda)$  en facteurs primaires

$$D(\lambda) = \Pi \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) e^{P_i}$$

$\lambda_i$  étant les «valeurs propres» de l'équation de FREDHOLM, c'est-à-dire les racines de  $D(\lambda) = 0$  et  $P_i$  étant un polynôme du 2<sup>d</sup> degré au plus; on en déduit:

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum \frac{1}{\lambda - \lambda_i} + \sum P'_i = -\sum \sum \frac{\lambda^n}{\lambda_i^{n+1}} + \sum P'_i$$

d'où en identifiant les deux développements de  $\frac{D'}{D}$  et remarquant que  $\sum P'_i$  ne peut donner que des termes de degré 0 et 1.

(2)  $b_n = \sum \lambda_i^{-n}$   
égalité qui est exacte pour  $n > 2$ .

#### § 4. Tentative de généralisation.

Au § 2, nous avons donné une règle pour former notre fonction méromorphe de  $\lambda$  quand le noyau  $f(x, y)$  peut devenir infini, tandis que l'un des noyaux réitérés successifs  $f_n(x, y)$  reste partout fini.

On est naturellement amené à penser que la même règle restera applicable dans des cas beaucoup plus généraux à savoir:

1°. Si les intégrales

$$\int f_n(x, y) \psi(y) dy$$

sont finies, sauf pour des valeurs exceptionnelles de  $x$ .

2°. Si en même temps à partir d'un certain rang, les nombres que nous avons appelés  $b_n$  sont finis.

Il est clair que cela peut arriver dans des cas où tous les noyaux  $f_n(x, y)$  présentent encore des infinis, et l'on peut se demander si les règles des §§ 2 et 3 peuvent néanmoins être appliquées.

Je me bornerai au cas où toutes les *valeurs propres*  $\lambda_i$  sont réelles et positives. Les théorèmes de HILBERT nous permettent de reconnaître dans quel cas cela a certainement lieu. Ainsi si le noyau est *symétrique*, les  $\lambda_i$  sont certainement réels; ils seront positifs quand la forme quadratique qui correspond à ce noyau sera définie; et par exemple, si  $f(x, y)$  est un noyau symétrique, les valeurs propres relatives au noyau redoublé  $f_2(x, y)$  seront réelles positives.

Cela posé, nous supposons que notre noyau  $f(x, y)$  symétrique, devient infini pour certaines valeurs de  $x$  et de  $y$ ; par exemple en certains points singuliers ou sur certaines lignes singulières du plan des  $xy$ . Nous emploierons le même artifice que M. HILBERT à la fin de son premier mémoire. Nous subdiviserons la partie du plan des  $xy$  à laquelle s'étend l'intégration (c'est-à-dire par exemple le carré  $0 < x < 1, 0 < y < 1$ , si les limites d'intégration de l'intégrale de FREDHOLM sont 0 et 1). Ce carré sera ainsi divisé en deux aires  $A$  et  $A'$  que nous assujettirons aux conditions suivantes: 1° Tous les points et lignes singulières devront se trouver dans  $A'$ . 2° Chacune des deux aires  $A$  et  $A'$  devrait être symétrique par rapport à la droite  $x = y$ . Nous définirons ensuite un noyau symétrique  $f'(x, y)$  de la façon suivante:

$$f'(x, y) = f(x, y) \quad (\text{dans } A) \quad f'(x, y) = 0 \quad (\text{dans } A').$$

Nous désignerons par  $\lambda_i$  et  $b_n$  les valeurs de ces quantités qui correspondent à  $f(x, y)$  et par  $\lambda'_i$  et  $b'_n$  les valeurs des quantités correspondantes pour  $f'(x, y)$ .

Nous ferons ensuite tendre l'aire  $A'$  vers zéro, de telle sorte que  $\lambda'_i$  tende vers  $\lambda_i$  et  $b'_n$  vers  $b_n$ . Le noyau  $f'(x, y)$  étant symétrique, les  $\lambda'_i$  seront tous réels, et nous pouvons nous arranger de façon qu'ils soient tous positifs. Comme le noyau  $f'(x, y)$  est partout fini, les résultats du § 4 seront applicables et nous aurons:

$$(1) \quad b'_n = \sum \lambda_i'^{-n}.$$

Nous supposerons les  $\lambda'_i$  rangés par ordre de grandeur croissante. Nous aurons ensuite

$$b_n = \lim b'_n.$$

Je dis d'abord que  $\sqrt[n]{b_n}$  tend vers une limite pour  $n = \infty$ . En effet, les  $\lambda'_i$  étant réels positifs, les quantités  $\sqrt[n]{b'_n}$  sont positives; de plus on a:

$$b'_{n+1} < b'_n \lambda_1'^{-1}, \quad b'_n > \lambda_1'^{-n}$$

d'où

$$\frac{1}{b'_{n+1}} < \frac{1}{b'^{n+1}_n} \lambda'^{-1}_{n+1}, \quad \lambda'^{-1}_1 < \frac{1}{b'_n}$$

et enfin

$$\lambda'^{-1}_{n+1} < \frac{1}{b'^{n(n+1)}_n}, \quad \frac{1}{b'_{n+1}} < \frac{1}{b'_n}.$$

Les quantités  $\sqrt[n]{b'_n}$  vont donc en décroissant quand  $n$  croît; il en résulte qu'à la limite les quantités  $\sqrt[n]{b'_n}$  iront en décroissant quand  $n$  croît (ou du moins ne pourront croître) et comme ces quantités sont positives, elles tendront vers une limite pour  $n = \infty$ ; cette limite, je l'appelle  $\lambda_1^{-1}$ .

Je dis maintenant que l'on a:

$$\lambda_1 = \lim \lambda'_1.$$

Observons d'abord que, *au moins si  $n$  est pair*,  $b'_n$  va en croissant quand  $n$  étant constant, l'aire  $A'$  diminue, on a en effet:

$$b'_{2n} = \int f'_n(x, y) f'_n(y, x) dx dy.$$

Mais le noyau étant symétrique, cela peut s'écrire

$$b'_{2n} = \int f'^2_n(x, y) dx dy$$

et d'après sa définition  $f'^2_n(x, y)$  ne peut que croître quand l'aire  $A'$  diminue; on aura donc si  $n$  est pair:

$$b'_n < b_n.$$

De plus pour  $n > p$ , d'après notre hypothèse, les quantités  $b_n$  sont finies; nous aurons donc si  $p$  est un nombre pair suffisamment grand:

$$b'_p = \sum \lambda'_i{}^{-p} < b_p.$$

Les quantités

$$\frac{b'_{n+1}}{b'_n}$$

vont en croissant quand  $n$  croît; il en est donc de même des limites vers lesquelles tendent ces quantités quand l'aire  $A'$  tend vers zéro, c'est-à-dire de

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Les quantités  $\frac{b'_{n+1}}{b'_n}$  et  $\frac{b_{n+1}}{b_n}$  tendent pour  $n = \infty$ , vers les mêmes limites que les quantités  $\sqrt[n]{b'_n}$ ,  $\sqrt[n]{b_n}$  c'est-à-dire vers  $\lambda_1^{-1}$  et  $\lambda_1^{-1}$ ; mais elles tendent vers ces limites en croissant, tandis que  $\sqrt[n]{b'_n}$ ,  $\sqrt[n]{b_n}$  tendent vers ces limites en décroissant. On aura donc :

$$\sqrt[n]{b'_n} > \lambda_1^{-1} > \frac{b'_{n+1}}{b'_n}, \quad \sqrt[n]{b_n} > \lambda_1^{-1} > \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

d'où :

$$\frac{b'_{n+p}}{b'_n} < \lambda_1^{-p}, \quad \frac{b_{n+p}}{b_n} < \lambda_1^{-p}.$$

On tire de là :

$$\lambda_1^{-n} < b'_n < b'_p \lambda_1^{p-n} < b_p \lambda_1^{p-n}$$

$$\lambda_1^{-n} < b_n < b_p \lambda_1^{p-n}$$

$$(2) \quad \frac{\lambda_1'}{\lambda_1} \left( \frac{b'_n}{b_n} \right)^{\frac{1}{n-p}} < \frac{1}{b_p^{n-p} \lambda_1^{n-p}}; \quad \frac{\lambda_1'}{\lambda_1} \left( \frac{b'_n}{b_n} \right)^{\frac{1}{n}} > b_p^{-\frac{1}{n}} \lambda_1^{-\frac{p}{n}}.$$

Nous ne savons pas encore si  $\lambda_1'$  tend vers une limite quand l'aire  $A'$  tend vers zéro; mais nous pouvons parler de la limite supérieure et de la limite inférieure de  $\lambda_1'$ ; je veux dire que  $\lambda_1'$  oscillera entre deux limites, dont l'une tendra vers  $\lim \sup \lambda_1'$  et l'autre vers  $\lim \inf \lambda_1'$  quand  $A'$  tendra vers zéro; à la limite les inégalités (2) deviendront donc (puisque  $\lim b'_n = b_n$ ):

$$(3) \quad \frac{\lim \sup \lambda_1'}{\lambda_1} \leq \frac{1}{b_p^{n-p} \lambda_1^{n-p}}; \quad \frac{\lim \inf \lambda_1'}{\lambda_1} > b_p^{-\frac{1}{n}} \lambda_1^{-\frac{p}{n}}.$$

Mais comme nous pouvons prendre  $n$  assez grand pour que les seconds membres de l'inégalité (3) soient aussi voisins de 1 que nous voudrions, nous pouvons écrire :

$$\lim \sup \frac{\lambda_1'}{\lambda_1} \leq 1; \quad \lim \inf \frac{\lambda_1'}{\lambda_1} \geq 1$$

c'est-à-dire

$$\lim \lambda_1' = \lambda_1.$$

C. Q. F. D.

On verrait comme plus haut que les quantités

$$(b'_n - \lambda_1'^{-n})^{\frac{1}{n}} = (\lambda_1'^{-2n} + \lambda_1'^{-3n} + \dots)^{\frac{1}{n}}$$

vont en décroissant quand  $n$  croît indéfiniment, et que l'aire  $A'$  demeure constante. D'autre part on a

$$\lim (b'_n - \lambda_1'^{-n}) = b_n - \lambda_1^{-n}$$

quand  $n$  restant constant,  $A'$  tend vers zéro. On voit qu'à la limite

$$(b_n - \lambda_1^{-n})^{\frac{1}{n}}$$

décroit quand  $n$  croît. Cette expression pour  $n = \infty$ , tend donc vers une limite que j'appelle  $\lambda_2^{-1}$ .

On verrait ensuite que les expressions

$$\frac{b'_{n+1} - \lambda_1'^{-n-1}}{b'_n - \lambda_1'^{-n}}$$

et par conséquent

$$\frac{b_{n+1} - \lambda_1^{-n-1}}{b_n - \lambda_1^{-n}}$$

vont en croissant avec  $n$  et on en déduirait les inégalités

$$\begin{aligned} \lambda_2'^{-n} &< b'_n - \lambda_1'^{-n} < (b'_p - \lambda_1'^{-p}) \lambda_2'^{p-n} < b'_p \lambda_2'^{p-n} < b_p \lambda_2'^{p-n} \\ \lambda_2^{-n} &< b_n - \lambda_1^{-n} < (b_p - \lambda_1^{-p}) \lambda_2^{p-n} < b_p \lambda_2^{p-n} \end{aligned}$$

et en raisonnant ensuite sur  $b_n - \lambda_1^{-n}$ ,  $b'_n - \lambda_1'^{-n}$ ,  $\lambda_2'$  et  $\lambda_2$  comme nous l'avons fait sur  $b_n$ ,  $b'_n$ ,  $\lambda_1'$  et  $\lambda_1$ , nous verrions que

$$\lim \lambda_2' = \lambda_2.$$

Et ainsi de suite.

Je dis maintenant que si nous considérons la fonction:

$$K(\lambda) = -\frac{\lambda^p b_p}{p} - \frac{\lambda^{p+1} b_{p+1}}{p+1} - \dots$$

c'est le logarithme d'une fonction entière de  $\lambda$ . Soit en effet

$$K_1(\lambda) = K(\lambda) - \sum_{i=1}^{i=h} \log \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \right) = - \sum \frac{c_q \lambda^q}{q}.$$

Nous aurons pour  $q > p$

$$c_q = b_q - \lambda_1^{-q} - \lambda_2^{-q} - \dots - \lambda_h^{-q}$$

et par conséquent

$$\lim \sqrt[q]{c_q} = \lambda_{h+1}^{-q}.$$

La fonction  $K_1(\lambda)$  est donc holomorphe pour  $|\lambda| < |\lambda_{h+1}^{-1}|$  et il en est de même de  $e^{K_1}$  ou de

$$e^{K\lambda} \prod_{i=1}^{i=h} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) = e^{K(\lambda)}.$$

Mais nous pouvons prendre  $h$  assez grand pour que  $\lambda_{h+1}$  soit aussi grand que l'on veut. On a en effet

$$b_p > \lambda_1^{-p} + \lambda_2^{-p} + \dots + \lambda_h^{-p} > h \lambda_{h+1}^{-p}$$

d'où

$$\lambda_{h+1} > \left(\frac{b_p}{h}\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Donc  $e^K$  reste holomorphe pour un module de  $\lambda$  aussi grand que l'on veut. C'est donc une fonction entière.

C. Q. F. D.

Il faudrait pour compléter le résultat, démontrer le même théorème en ce qui concerne le numérateur de la fonction méromorphe; je me propose de revenir ultérieurement sur cette question.

### § 5. Équations intégrales de la 1<sup>ère</sup> sorte.

Il y a des cas où la méthode de FREDHOLM permet presque immédiatement l'intégration des équations intégrales de la 1<sup>ère</sup> sorte, c'est-à-dire de la forme:

$$\int f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x)$$

où  $\psi(x)$  est donnée et  $\varphi(y)$  inconnue. Soit par exemple:

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) [e^{ixy} + \lambda f(x, y)] dy = \psi(x).$$

Dans le cas de  $\lambda = 0$ , elle se réduit tout simplement à l'équation de FOURIER.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{ixy} dy = \psi(x)$$

d'où l'on tirerait:

$$2\pi \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) e^{-ixy} dy.$$



Posons alors:

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) e^{-izy} dz$$

d'où:

$$2\pi\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{ixy} dy$$

l'équation (1) deviendra:

$$(2) \quad 2\pi\Phi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) f(x, y) e^{-izy} dz dy = \psi(x)$$

et prend ainsi la forme d'une équation de FREDHOLM, où  $\Phi(x)$  est la fonction inconnue et où le noyau est

$$K(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-izy} dy.$$

Quelle est la condition pour que la méthode de FREDHOLM soit applicable à l'équation (2) qui peut s'écrire:

$$2\pi\Phi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) K(x, z) dz = \psi(x).$$

L'intégrale étant prise entre des limites infinies, il faut chercher d'abord à la ramener à des limites finies; c'est ce qui est possible si  $K(x, z)$  s'annule pour  $z = \pm \infty$ , et est pour  $|z|$  très grand de l'ordre de  $|z|^{-h}$ , où  $h > 1$ . Si nous posons en effet

$$x = \operatorname{tg} \xi, \quad z = \operatorname{tg} \zeta$$

l'équation prend la forme:

$$2\pi\Phi(\operatorname{tg} \xi) + \lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \Phi(\operatorname{tg} \zeta) K(\operatorname{tg} \xi, \operatorname{tg} \zeta) \frac{d\zeta}{\cos^2 \zeta} = \psi(\operatorname{tg} \xi);$$

ou mieux encore posons:

$$x = \operatorname{tg}^k \xi, \quad z = \operatorname{tg}^k \zeta$$

$k$  étant un nombre suffisamment grand pour que

$$\frac{k}{k+1} > \frac{1}{h}$$

ce qui est toujours possible si  $h > 1$ ; notre équation deviendra:

$$2\pi \mathcal{O}(\operatorname{tg}^k \xi) + \lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} k \mathcal{O}(\operatorname{tg}^k \zeta) K(\operatorname{tg}^k \xi, \operatorname{tg}^k \zeta) \operatorname{tg}^{k-1} \zeta \frac{d\zeta}{\cos^2 \zeta} = \psi(\operatorname{tg}^k \xi).$$

Nous voyons que le nouveau noyau

$$k K(\operatorname{tg}^k \xi, \operatorname{tg}^k \zeta) \operatorname{tg}^{k-1} \zeta \frac{1}{\cos^2 \zeta}$$

se comporte pour  $\zeta = \pm \frac{\pi}{2}$  comme:

$$\operatorname{tg}^{-kh} \zeta \operatorname{tg}^{k-1} \zeta \frac{1}{\cos^2 \zeta}$$

c'est à dire comme:

$$(\cos \zeta)^{kh-k-1}$$

et par conséquent reste fini puisque

$$kh - k - 1 > 0.$$

Pour préciser davantage nous supposons que:

$$|K(x, z)| < A z^{-h}$$

$A$  étant une constante indépendante de  $x$  et de  $z$ , et l'inégalité subsistant pour toutes les valeurs de  $x$  et de  $z$  depuis  $-\infty$  jusqu'à  $+\infty$ .

A quelles conditions cela correspond-il pour  $f(x, y)$ . Il faut d'abord que la méthode de FOURIER puisse être appliquée à  $f(x, y)$ , c'est à dire:

1°. Que  $f(x, y)$  considérée comme fonction de  $y$  n'admette qu'un nombre fini de maxima et de minima (quelle que soit la valeur constante attribuée à  $x$ ).

2°. Que  $f(x, y)$  tende uniformément vers zéro, quand  $y$  tend vers l'infini, et cela quel que soit  $x$ .

Si nous supposons de plus que  $f(x, y)$  admet des dérivées des deux premiers ordres; que  $\frac{df}{dy}$  tend uniformément vers zéro, quand  $y$  tend vers l'infini et que

$$\left| \frac{d^2 f}{dy^2} \right| < M \frac{1}{1+y^2},$$

et qu'enfin  $\frac{d^2 f}{dy^2}$  n'ait comme  $f$  qu'un nombre fini de maxima et de minima, on aura en intégrant par parties:

$$\int f e^{-izy} dy = \frac{i}{z} f e^{-izy} + \frac{df}{dy} \frac{1}{z^2} e^{-izy} - \frac{1}{z^2} \int \frac{d^2 f}{dy^2} e^{-izy} dy$$

ou en prenant pour limites  $y = \pm \infty$

$$K(x, z) = \int f e^{izy} dy = -\frac{1}{z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 f}{dy^2} e^{-izy} dy$$

d'où:

$$|K(x, z)| < \left| \frac{1}{z^2} \right| M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{M\pi}{|z|^2}.$$

Et comme d'ailleurs  $|K(x, z)|$  reste fini même pour  $z = 0$ , on voit que les conditions sont remplies pour que la méthode de FREDHOLM soit applicable.

Il est à peine nécessaire d'ajouter qu'elle le serait dans des cas beaucoup plus généraux et qu'il serait aisé de déterminer.

Cherchons à appliquer le même principe à des séries analogues à celles de FOURIER et écrivons:

$$(3) \quad \psi(x) = \Sigma A_m [e^{imx} + \lambda \theta_m(x)].$$

Partons de la formule de FOURIER, en posant:

$$2\pi A_m = \int_0^{2\pi} \varphi(z) e^{-imz} dz; \quad \varphi(z) = \Sigma A_m e^{imz}$$

notre équation deviendra:

$$(4) \quad \psi(x) = \varphi(x) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z) \Sigma e^{-imz} \theta_m(x) dz.$$

Dans l'équation (3), il s'agissait de déterminer les coefficients  $A_m$ , connaissant les fonctions  $\psi(x)$  et  $\theta_m(x)$ , c'est à dire de développer la fonction donnée  $\psi(x)$  en série procédant suivant les fonctions  $e^{imx} + \lambda \theta_m(x)$ . Dans l'équation transformée (4), il s'agit de déterminer la fonction inconnue  $\varphi(x)$  connaissant la fonction  $\psi(x)$ . Les deux problèmes sont manifestement équivalents, mais le

second se ramène à une équation intégrale, et la méthode de FREDHOLM y sera applicable pourvu que le noyau

$$\sum e^{-imz} \theta_m(x)$$

soit toujours fini.

C'est ce qui arrivera évidemment si la série

$$\sum |\theta_m(x)|$$

est absolument et uniformément convergente.

Soit par exemple à développer  $\psi(x)$ , pour les valeurs de  $x$  comprises entre 0 et  $2\pi$ , suivant les exponentielles

$$e^{i\mu_m x}.$$

Nous pourrions ramener ces exponentielles à la forme

$$e^{imx} + \lambda \theta_m$$

en posant:

$$\lambda = 1, \quad \theta_m = e^{i\mu_m x} - e^{imx}.$$

Or on a

$$|\theta_m| < |\mu_m - m| x$$

puisque:

$$\theta_m = i \int_{mx}^{\mu_m x} e^{it} dt;$$

et que  $|e^{it}| = 1$ . Comme  $x$  varie de 0 à  $2\pi$ ; on aura:

$$|\theta_m| < 2\pi |\mu_m - m|.$$

Il suffit donc que la série

$$\sum |\mu_m - m|$$

soit absolument et uniformément convergente. C'est ce qui arrivera par exemple, si l'on a

$$\mu_m = m + \frac{1}{m^2}.$$

Ici encore, il serait aisé d'étendre le résultat à des cas beaucoup plus étendus.

Soit maintenant l'équation

$$(5) \quad \int_0^{2\pi} \varphi(y) [e^{ixy} + \lambda f(x, y)] dy = \psi(x)$$

qui diffère de (1) parce que les limites ne sont plus infinies. Nous ne pouvons

pas nous proposer de déterminer la fonction inconnue  $\varphi$ , connaissant la fonction  $\psi$ ; et cette fonction étant quelconque; le problème serait en général impossible. Il suffit pour s'en convaincre de faire  $\lambda = 0$ ; on voit alors que quelle que soit la fonction  $\varphi(y)$ , la fonction  $\psi$  sera une fonction entière, qui tend vers zéro quand  $x$  tend vers l' $\infty$ , avec un argument compris entre 0 et  $\pi$ ; et telle que  $\psi e^{-2i\pi x}$  tende vers zéro quand  $x$  tend vers l' $\infty$  avec un argument compris entre  $\pi$  et  $2\pi$ . La fonction  $\psi$  ne peut donc pas être choisie arbitrairement.

Ce que nous nous donnerons, ce sont les valeurs  $\psi(m)$  que prend la fonction  $\psi$  quand  $x$  prend une valeur entière positive ou négative. Il est aisé d'ailleurs de se rendre compte que ces valeurs  $\psi(m)$  suffisent pour déterminer une fonction entière satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer.

Posons encore:

$$\varphi(z) = \sum A_m e^{-imz}, \quad 2\pi A_m = \int_0^{2\pi} \varphi(z) e^{imz} dz.$$

L'équation (5) devient alors:

$$(6) \quad 2\pi A_m + \lambda \int_0^{2\pi} \sum A_p e^{-ipy} f(m, y) dy = \psi(m).$$

Cette équation doit permettre de déterminer les coefficients  $A$  et par conséquent la fonction inconnue  $\varphi$ , quand on connaît les quantités  $\psi(m)$ .

Cette équation n'a plus la forme d'une équation intégrale, mais celle d'un système d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues, tel que ceux qui ont fait l'objet des études de M. VON KOCH. L'analogie des deux théories est d'ailleurs évidente.

Pour que la méthode soit applicable, il faut et il suffit que le déterminant infini converge; il suffit donc qu'il soit normal au sens de M. VON KOCH, c'est à dire que la série double en  $m$  et  $p$

$$(7) \quad \sum \int_0^{2\pi} e^{-ipy} f(m, y) dy$$

converge absolument. Si  $f(m, y)$  est une fonction périodique de  $y$  avec une dérivée seconde, nos intégrales peuvent se transformer par une intégration par parties et la série (7) devient

$$- \sum \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ipy}}{p^2} f''(m, y) dy.$$

Les termes en sont plus petits que ceux de la série :

$$\sum \frac{|f''|}{p^2} = \sum \frac{1}{p^2} \geq |f''|.$$

Il suffit donc que la série

$$\sum f''(m, z)$$

converge absolument et uniformément, ou encore que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f''(x, z) dz$$

converge absolument et uniformément.

On voit par cet exemple quelles différences il y a en ce qui concerne les équations intégrales de 1<sup>ère</sup> espèce, entre les cas où les limites sont finies, et celui où elles sont infinies, cas auquel se rattacherait d'ailleurs celui où le noyau présenterait des singularités entre les limites d'intégration. Je me réserve de revenir sur cette question par des méthodes fondées sur l'itération des noyaux et qui mettront en évidence d'une autre manière les mêmes particularités.

---