DARBOUX'S ANTEIL AN DER GEOMETRIE[1]

VON

L. P. EISENHART

in PRINCETON.

GASTON DARBOUX wurde 1842 in Nîmes geboren, einer den Mathematikern interessanten Stadt, weil hier von 1819 bis 1831 GERGONNE seine »Annales« herausgab und überdies einen grossen Einfluss auf die Entwicklung der Geometrie ausübte. Mit achtzehn Jahren ging DARBOUX nach Paris, an dessen geistigem Leben er 57 Jahre lang einen hervorragenden Anteil nehmen sollte. Als Student an der Ecole polytechnique und später an der Ecole normale fiel er durch seine ungewöhnliche mathematische Befähigung auf. Sein seltenes Geschick in der Darstellung sichterten ihm bald einen Ruf als Lehrer, und so bekam er frühzeitig erstrebenswerte Ämter. Im Jahre 1880 wurde er CHASLE's Nachfolger auf dem Lehrstuhl für höhere Geometrie an der Sorbonne, vier Jahre später wurde er Membre de l'Institut, und 1889 übernahm er die Pflichten eines Doyen de la Faculté des sciences. Nach BERTRAND's Tode im Jahre 1900 wählte man ihn zum ständigen Sekretär der Académie des Sciences, ein Amt, das er mit grosser Gewissenhaftigkeit bis zu seinem Tode verwaltete. Wir können auf die zahllosen Ehrungen, die man ihm erwies, und auf die Ämter, die er im Laufe der Jahre übernahm, nicht näher eingehen, wir wollen uns vielmehr seiner Lebensarbeit auf dem Gebiete der Geometrie zuwenden.

Bereits während seiner Studienzeit an der Ecole normale, im Jahre 1864, veröffentliche er in den »Nouvelles Annales«[2] seine ersten Abhandlungen. Es ist interessant, dass wir bei genauerer Betrachtung dieser beiden Abhandlungen in ihnen bereits Keime seines späteren Lebenswerkes finden. Die erste behandelt die ebenen Schnitte des Wulstes. Es wird gezeigt, dass die Kurve von der vier-

---

[1] Übersetzung der am 6. September 1917 vor der vereinigten Sitzung der »American Mathematical Society« und der »Mathematical Association of America« in Cleveland gehaltenen Vorlesung (Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 24, 1918, p. 227).

[2] Sér. 2, t. 3, 1864, p. 156, 199.

ten Ordnung ist mit den unendlich fernen, imaginären Kreispunkten als Doppelpunkten, dass 16 Brennpunkte im Sinne PLÜCKER's vorhanden sind, von denen vier reell sind und auf einem Kreise liegen, dass eine homogene, lineare Relation besteht zwischen den Abständen jedes Kurvenpunktes von dreien dieser Brennpunkte, und dass eine Inversion in bezug auf jeden dieser Brennpunkte als Pol die Kurve in ein Cartesisches Oval transformiert.

In der zweiten Abhandlung betrachtet DARBOUX den Schnitt einer Kugel mit einer Fläche zweiter Ordnung. Durch die Schnittkurve gehen vier Kegel zweiter Ordnung. Die Tangentialebenen des Kegels schneiden die Kugel in Kreisen, die die Kurve doppelt berühren. Diejenigen vier dieser Ebenen, die auch die Kugel berühren, bestimmen vier Kreise vom Radius Null, die die Kurve doppelt berühren und auf einem Kreise liegen. Die Entfernungen je dreier von ihnen von jedem Kurvenpunkte stehen in homogener linearer Relation zueinander. Die Kurve hat daher 16 Brennpunkte, die zu je vieren auf vier Kreisen liegen, von denen sich je zwei orthogonal schneiden. DARBOUX hat diesen Kurven und ihren durch Transformation entstehenden Kurven den Namen zirkulare Kurven gegeben. Sie sind sphärisch oder eben und von der vierten Ordnung. Speziell sind die ebenen Schnitte des Wulstes und das Cartesische Oval zirkulare Kurven, ebenso die Cissoide, die Lemniskate, die Kreiskubik und andere bekannte Kurven.

Im Jahre 1872 veröffentliche DARBOUX seine erste grössere Arbeit »Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires». Sie besteht aus fünf Teilen, deren einer sich mit der Diskussion der zirkularen Kurven beschäftigt.

Als DARBOUX auf der Ecole Normale war, wurde er mit den Schriften LAMÉ's, DUPIN's und BONNET's über dreifach orthogonale Systeme von Flächen bekannt, einem Gebiete, mit dem sein Name für immer verknüpft bleiben wird. Das beste Beispiel eines orthogonalen Flächensystems waren damals die konfokalen Flächen zweiter Ordnung. Schon viele Jahre früher hatte KUMMER sich mit Scharen von ebenen Kurven beschäftigt, die durch eine Gleichung $f(x, y, a) = 0$ definiert sind, wobei a der Parameter der Schar ist, und durch jeden Punkt der Ebene zwei Kurven der Schar gehen, die sich orthogonal schneiden. Er fand, dass die Kurven dieser Scharen die Eigenschaft haben, konfokal zu sein. Um dieses Ergebnis zu verallgemeinern, suchte DARBOUX die dreifach orthogonalen Flächensysteme, bei denen jede Fläche durch eine einzige Gleichung definiert wird, die den Parameter λ enthält. Er fand, dass die Schar durch die Gleichung

$$(1) \qquad (x^2 + y^2 + z^2)^2 + \frac{\alpha\lambda - 4h}{\alpha - \lambda} x^2 + \frac{\beta\lambda - 4h}{\beta - \lambda} y^2 + \frac{\gamma\lambda - 4h}{\gamma - \lambda} z^2 - h = 0$$

definiert ist, worin α, β, γ und h Konstante und λ der Parameter des Systems sind. Jede Fläche eines so definierten Systems, die von DARBOUX später Zykliden genannt wurden, hat die folgenden Eigenschaften: sie ist von der vierten Ordnung und hat den unendlich fernen Kreis als Doppelkurve; sie wird von jeder Kugel in einer zirkularen Kurve geschnitten; auf fünf verschiedene Arten ist sie die Einhüllende einer zweifachen Schar von Kugeln, deren Mittelpunkte eine fixe Fläche zweiter Ordnung beschreiben, und die eine fixe Kugel orthogonal schneiden; endlich schneidet jede der doppelt berührenden Kugeln die Fläche in zwei Kreisen. Diese Ergebnisse wurden der französischen Akademie der Wissenschaften am 1. August 1864[1] vorgelegt. Am gleichen Tage verkündete MOUTARD der Akademie die Entdeckung desselben Systems. Er war mit dem Studium von Flächen beschäftigt, die durch Inversion in sich selbst transformiert werden, und fand, dass die Flächen vierter Ordnung mit dem unendlich fernen Kreise als Doppelkurve auf fünf verschiedene Arten in sich selbst transformierbar sind. Während er die Krümmungslinien dieser Flächen suchte, fand er das dreifache System der Zykliden.

Nach der Entdeckung dieses orthogonalen Systems stellte DARBOUX das lineare Element des Raumes durch die Parameter eines solchen Flächensystems dar und fand, wie im Falle der konfokalen Flächen zweiter Ordnung, dass die Schnittkurven auf jeder Fläche ein isometrisches System von Kurven bilden. Das berühmte Theorem von DUPIN, dass drei Systeme orthogonaler Flächen einander in Krümmungslinien schneiden, hat DARBOUX durch die folgende Ergänzung erweitert:

Wenn zwei orthogonale Flächenscharen sich in Krümmungslinien schneiden, existiert eine dritte Schar, die zu den beiden ersten orthogonal ist.

Mit Hilfe dieses Theorems konnte DARBOUX die Bedingung dafür aufstellen, dass eine Flächenschar, die durch die Gleichung $\varphi(x, y, z) = \alpha$ definiert ist, einem dreifachen System angehört. Es muss φ eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln sein, doch wurde diese Gleichung wegen ihrer komplizierten Form nicht ausgerechnet. DARBOUX veröffentlichte diese Ergebnisse 1866 in seiner klassischen Abhandlung »Sur les surfaces orthogonales»,[2] die er später als Dissertation vorlegte. Diese Abhandlung enthält auch die Bestimmung eines orthogonalen Systems, dessen Krümmungslinien eben sind, und den unrichtigen Satz, dass die dreifache Zyklidenschar (1), die das System konfokaler Flächen zweiter Ordnung als speziellen Fall enthält,

---

[1] Comptes Rendus, t. 59, 1864, p. 240. Die Einzelheiten wurden in den Annales de l'Ecole Normale, t. 2, 1865, p. 55—69 veröffentlicht.

[2] Annales de l'Ecole Normale, t. 3, 1866, p. 97—141.

das einzige Beispiel eines dreifachen Systems isometrischer Flächen ist. DARBOUX hat in einer späteren Abhandlung diesen Irrtum richtig gestellt.

Im Jahre 1872 nahm CAYLEY das Problem der orthognalen Systeme in Angriff und gab der Differentialgleichung des dreifachen Systems die Form, die jetzt mit seinem Namen verknüpft ist, und die deshalb besonders wertvoll ist, weil sie in einfacher Weise die Bestimmung spezieller orthogonaler Systeme gestattet. DARBOUX gewahrte schnell den Wert der CAYLEY'schen Arbeit. Einerseits untersuchte er die CAYLEY'sche Gleichung analytisch und dehnte sie auf n Variable aus, andererseits wandte er diese Gleichung auf die Bestimmung orthogonaler Systeme an, bei denen die Flächen einer Schar zweiter Ordnung sind, oder bei denen die Flächen einer Schar eine Symmetrieebene haben, sowie auf orthogonale Systeme, die eine gegebene Fläche enthalten, und in ihrer Gleichung vier willkürliche Funktionen einer einzigen Variabeln führen. Diese Systeme wurden im ersten und zweiten Teile seiner zweiten grossen Abhandlung über orthogonale Systeme veröffentlicht.[1] Im dritten Teile verallgemeinerte er die LAMÉ'schen Gleichungen auf den n-dimensionalen Raum und untersuchte gewisse hierauf bezügliche spezielle Aufgaben. Die letzten fünfzig Seiten dieser Abhandlung beschäftigen sich mit der Bestimmung orthogonaler Systeme isometrischer Flächen, einer Aufgabe, die er gelöst zu haben glaubte. Er fand andere Systeme als die Zykliden, doch können wir uns auf weitere Einzelheiten nicht einlassen. Wir haben uns mit diesen beiden Abhandlungen eingehender beschäftigt, weil sie für die Entwicklung der Theorie der orthogonalen Systeme so wichtig sind und unter den Arbeiten DARBOUX's einen hervorragenden Platz einnehmen. Zwanzig Jahre später veröffentlichte er seine »Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes»,[2] die vieles aus der oben erwähnten Theorie enthalten. In der zweiten Abhandlung finden sich auch Bemerkungen über dreifach konjugierte Flächensysteme, die später von GUICHARD und TZITZEICA untersucht und ausführlich von DARBOUX in der zweiten, 1910[3] herausgegebenen Auflage des oben erwähnten Werkes diskutiert worden sind. Hier und in späteren Abhandlungen lieferte DARBOUX weitere Beiträge zur Theorie der orthogonalen Systeme.

Seit der Zeit, da GAUSS die krummlinigen Koordinaten einer Fläche einführte, und die absolute Invariante des linearen Elements entdeckte, das die Krümmung der Fläche misst, haben sich die Geometer mit der jetzt noch unge-

---

[1] Annales de l'Ecole Normale, sér. 2, t. 7, 1878, p. 97—151, 227—261, 275—349.

[2] Eine ausfürliche Inhaltsangabe dieses Werkes wurde von E. O. LOVETT im Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 5, 1899, p. 185—202 veröffentlicht.

[3] Eine Übersicht dieser Ausgabe von WILZCYNSKI ist im Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 20, 1914, p. 247—253 veröffentlicht.

lösten Aufgabe beschäftigt, alle Flächen mit einem gegebenen Linienelement zu finden, d. h. mit dem Problem der abwickelbaren Flächen. DARBOUX zeigte 1872,[1] dass die rechtwinkligen Punktkoordinaten einer Fläche mit gegebenem Linienelement die Lösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung AMPÈRE'schen Typs sind, sowie dass, wenn eine Lösung dieser Gleichung bekannt ist, zwei andere durch Quadratur gefunden werden können, und dass diese drei Lösungen die Koordinaten einer Fläche mit dem gegebenen Linienelement sind. MOUTARD und RIBAUCOUR, die die abwickelbaren Flächen Ende der sechsziger Jahre untersuchten, zeigten, dass, wenn zwei abwickelbare Flächen gegeben sind, sofort zwei andere Flächen S und S_1 gefunden werden können, deren rechtwinklige Koordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Bedingung

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0 \tag{2}$$

erfüllen. 1873 teilte DARBOUX der Société mathématique de France mit,[2] dass die Aufgabe der infinitesimalen Deformation einer Fläche S gleichbedeutend ist mit der Bestimmung der Flächen S_1, deren Koordinaten die Gleichung (2) erfüllen. In seinem bekannten Werk »Leçons sur la théorie générale des surfaces»[3] zeigte er, dass, wenn die Gleichung (2) für eine Fläche S integriert worden ist, die infinitesimale Deformation von S für Glieder jeder Ordnung ein Problem der Quadratur allein ist. WEINGARTEN[4] führte die Lösung der Gleichung (2) auf die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurück, deren Gleichung der Charakteristiken die asymptotischen Linien der gegebenen Fläche bestimmt. Sind die letzteren parametrisch, so hat die Gleichung die Form

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} = \mu(u, v)\,\Theta. \tag{3}$$

Stehen zwei Flächen S und S_0 in einer solchen Beziehung zueinander, dass ihre Tangentialebenen in entsprechenden Punkten parallel sind, und die asymptotischen Linien einer jeden Fläche einem konjugierten System auf der andern entsprechen, so nennt man die Flächen assoziiert. Dieser Gedanke rührt von BIANCHI her,[5] der nachwies, dass die Bestimmung einer zu einer gegebenen assoziierten Fläche gleichbedeutend mit der Integration der Gleichung (2) ist. Nach Feststellung

[1] Sur une classe remarquable etc., p. 14, 181.
[2] Diese Mitteilung wurde nicht veröffentlicht.
[3] T. 4, p. 5. Wir werden diese Schrift künftig immer als »Leçons» zitieren.
[4] Crelle, Bd. 100, 1886, p. 296—310.
[5] Lezioni di geometria differenziale, Pisa, 1894, p. 279.

des reziproken Charakters der Beziehungen zwischen S und S_1 und zwischen S und S_0 fand DARBOUX neun andere Flächen, die sich aus jeder Lösung der Gleichung (2) ergaben; alle zwölf Flächen bilden ein geschlossenes System.

Wir würden uns eine grosse Nachlässigkeit zu schulden kommen lassen, wenn wir nicht auf die reizvollen Kapitel im vierten Bande der »Leçons» hinwiesen, in denen DARBOUX das Abrollen einer abwickelbaren Fläche auf einer andern behandelt und dabei auf die geometrischen Gebilde eingeht, die von Punkten, Linien usw. erzeugt werden, die mit der rollenden Fläche fest verbunden sind. Auch RIBAUCOUR hat an der Entwicklung dieses Gebietes Anteil und ebenso in der letzten Zeit BIANCHI. Als besonders schönes Beispiel aus dieser Theorie zitieren wir den folgenden Satz: S und S_1 seien zwei abwickelbare Flächen; rollt S auf S_1, so schneidet eine Kugel mit dem Radius Null, deren Mittelpunkt fest mit S verbunden ist, die gemeinsame Tangentialebene der beiden Flächen in einem Kreise; diese Kreise bilden ein zirkulares System.

Die Idee der sphärischen Darstellung einer Fläche stammt von GAUSS. Die Krümmungslinien einer Fläche werden auf der Kugel durch ein orthogonales Kurvensystem dargestellt. DARBOUX beschäftigte sich gelegentlich mit der Aufgabe, die Flächen zu bestimmen, deren Krümmungslinien auf der Kugel durch ein gegebenes orthogonales System dargestellt werden. Er nannte dieses Problem die Aufgabe der sphärischen Darstellung. Durch die Benutzung der einfachen Ausdrücke für die rechtwinkligen Koordinaten eines Kugelpunktes in Parametern in bezug auf die imaginären Erzeugenden zeigte er, dass die Aufgabe auf die Lösung einer Differentialgleichung von der Form (3) zurückführbar ist. Er schrieb mehrere Abhandlungen über spezielle Formen dieser Gleichung, über die geometrische Bedeutung dieser Untersuchungen und über MOUTARD's Untersuchungen der Gleichung (3).

MOUTARD hatte bekanntlich gezeigt, dass eine Zyklide vierter Ordnung auf fünf verschiedene Arten die Enveloppe einer zweifachen Schar von Kugeln ist, die zu einer fixen Kugel S orthogonal sind, und deren Mittelpunkte eine Fläche zweiter Ordnung beschreiben. Er hat ferner gezeigt, dass die fünf Flächen zweiter Ordnung, die auf diese Weise mit der Zyklide assoziiert sind, konfokal sind, und dass je zwei der fünf Kugeln S einander rechtwinklig schneiden. Bei der Mitteilung seiner Entdeckung des orthogonalen Systems von Zykliden wies MOUTARD darauf hin, dass für alle Zykliden dieses Systems diese fünf Kugeln und diese fünf Flächen zweiter Ordnung dieselben sind. Unter Benutzung dieser Ergebnisse zeigte DARBOUX,[1] dass die Gleichung des Systems in der Form

[1] Sur une classe remarquable etc., p. 134. Der vierte und fünfte Teil geben eine Darstellung der Geometrie der Zykliden.

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{5} \frac{\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}{\lambda - a_i} = 0$$

geschrieben werden kann, worin S_i die Potenz des Punktes in bezug auf die Kugel S_i ist, R_i ihr Radius, a_i eine Konstante und λ der Parameter des Systems. Da diese Gleichung notwendig dritten Grades ist, ist der Koeffizient von λ^4 identisch Null. Wir haben daher die Identität

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0$$

für jeden Punkt des Raumes. DARBOUX sah in dem Ausdruck $\frac{S_i}{R_i}$, der den obigen Bedingungen unterworfen ist, einen neuen Koordinatentyp, der für gewisse Aufgaben recht praktisch ist. So wurden die pentasphärischen Koordinaten entdeckt. Ein sie enthaltender wichtiger Satz ist der folgende: Wenn fünf partielle Lösungen $x_1, \ldots x_5$ einer Gleichung von der Form $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial \Theta}{\partial u} + B \frac{\partial \Theta}{\partial v} + C\Theta$ die Bedingung $\Sigma x_i^2 = 0$ erfüllen, so sind die x_i die pentasphärischen Koordinaten einer Fläche, auf der die parametrischen Kurven die Krümmungslinien sind. Wenn speziell die obige Gleichung auf die Form (3) reduzierbar ist, ist die Fläche isometrisch. Hieraus haben DARBOUX und GUICHARD wichtige Folgerungen gezogen.

Aus den GAUSS'schen Gleichungen folgt, dass die nichthomogenen Koordinaten einer Fläche x, y, z in bezug auf ein konjugiertes System $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ eine Gleichung der LAPLACE'schen Form erfüllen,

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = a \frac{\partial \Theta}{\partial u} + b \frac{\partial \Theta}{\partial v}$$

die man die Punktgleichung des Systems nennt. DARBOUX lenkte die Aufmerksamkeit auf die Tatsache, dass jede Funktion $\varphi(x, y, z)$ im allgemeinen ein konjugiertes System bestimmt, das man durch die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades findet. Die entsprechende Gleichung (6) lässt dann sowohl die Lösung φ als auch die Lösungen x, y und z zu. Besonders sind die Krümmungslinien jeder Fläche durch die Eigenschaft charakterisiert, dass sie das konjugierte System bilden, für das $\varphi = x^2 + y^2 + z^2$ ist. GUICHARD hat diese Betrachtung verallgemeinert und die bemerkenswerte Klasse von konjugierten Systemen n, O betrachtet, die durch die Eigenschaft definiert sind, dass die Punktgleichung eines solchen Systems $n-1$ Lösungen $t_1, \dots t_{n-1}$ zulässt, und dass $x^2+y^2+z^2-t_1^2-\cdots-t_{n-1}^2$ auch eine Lösung ist.

Darboux ist ein so erfolgreicher Forscher in der Differentialgeometrie gewesen, dass man vielleicht auf den Gedanken kommen kann, seine geometrische Arbeit beschränke sich auf dieses Gebiet. Diese Vermutung wird sofort durch den Hinweis widerlegt, dass der grösste Teil seiner Behandlung der zirkularen Kurven und der Zykliden sich nicht der differentialen Methode bedient. Wir erwähnen auch seine Untersuchungen der Poncelet'schen Polygone und ihre Verallgemeinerung auf Polygone, die Ellipsoiden ein- und umbeschrieben sind, sowie einige Untersuchungen über die Wellenfläche. Es ist eine interessante Tatsache, dass seine bereits erwähnte erste Abhandlung und seine letzte, »Principes de géométrie analytiques», die gerade erschienen ist,[1] sich nur mit finiter Geometrie befassen.

Im Jahre 1868 veröffentlichte Beltrami[2] seine fundamentalen Untersuchungen über die Geometrie Lobatschewsky's, Bolyai's und Gauss' in geodätischen Kurven auf einer pseudosphärischen Fläche. Was Cayley in seinem »6. Memoir on Quantics» für die unendlich fernen Gebilde in der euklidischen Geometrie getan hatte, zeigte Klein drei Jahre später[3] für die nichteuklidische Geometrie. Diese neuen Gedanken machten auf Darboux einen entscheidenden Eindruck. Er benutzte Cayley's Messungen in der Theorie der Zykliden, wie sie in seiner ersten Abhandlung dargeboten werden, und in einer angehängten Note behandelt er die geodätischen Kurven und Krümmungslinien in Cayley'scher Geometrie. Diese Gedanken sind vollständiger im letzten Kapitel des dritten Bandes seiner Leçons entwickelt und werden dort auf die Bestimmung von Flächen angewendet, auf denen ein konjugiertes System von Kurven existiert, deren Tangenten zugleich Tangenten einer Fläche zweiter Ordnung sind. Einer der fünf Teile der Principes de géométrie analytique bietet eine sehr klare Darstellung der Cayley'schen Geometrie, in der auch die Verschiebungen und die Trigonometrie behandelt werden. Aber aus unbekannten Gründen beschränkte Darboux seine Untersuchungen auf den euklidischen Raum, und er hat daher keinen Anteil an der Entwicklung der nichteuklidischen Differentialgeometrie.

Darboux war ein lebhafter Verfechter des Gebrauchs imaginärer Elemente in der Geometrie. Er glaubte, dass ihr Gebrauch in der Geometrie ebenso notwendig sei wie in der Analysis. Er dachte dabei an den Erfolg, mit dem sie

---

[1] Diese Abhandlung ist in der Tat eine erweiterte Ausgabe der ersten. Der Verfasser dieser Zeilen will demnächst eine ausfürliche Inhaltsangabe veröffentlichen.

[2] Giornale di Mathematiche, t. 6, 1868, p. 284—312.

[3] Über die sog. nichteuklidische Geometrie, Math. Annalen, Bd. 4, 1871, p. 573—625.

in der Lösung des Problems der Minimalflächen verwendet worden sind. Von Anfang an benutzte er in seinen Abhandlungen die isotropische Linie, die Kugel mit dem Radius Null (den isotropischen Kegel) und die allgemeine isotropische abwickelbare Fläche. In seiner ersten Abhandlung über orthogonale Flächensysteme zeigte er, dass die Einhüllende der Flächen eines solchen Systems, wenn sie durch eine einzige Gleichung definiert ist, eine isotropische Abwickelbare ist. Wir haben Beispiele des Gebrauches dieser Elemente in der Theorie der abrollenden Flächen und in der Lösung des Problems der sphärischen Darstellung gegeben. Ein anderes treffendes Beispiel liefert das folgende Theorem, das eine allgemeine Methode zur Gewinnung von Flächen mit ebenen Krümmungslinien in dem einen System darstellt: Wenn eine abwickelbare Fläche D über eine abwickelbare Fläche D_1 so rollt, dass alle Punkte einer Erzeugenden gleichzeitig zur Berührung kommen, so wird eine isotropische abwickelbare Fläche, die fest mit D verbunden ist, durch sukzessive Berührungsebenen längs Krümmungslinien der Fläche geschnitten, die sie enthält.

In der Darstellung der Lebensarbeit eins so fruchtbaren Mathematikers, wie es Darboux war, kann man nur die *Ergebnisse* seiner Untersuchungen, nicht aber ihre *Einzelheiten* darstellen. Es wäre jedoch nicht zu verantworten, wenn wir nicht auch noch auf seine *Methoden* eingehen wollten. Darboux rühmt an Combescures, dass er der erste gewesen ist, der die Betrachtungen der Kinematik auf die Untersuchungen in der Flächentheorie angewendet hat, woraus dann die Verwendung beweglicher Koordinatensysteme von selbst folgt. Darboux hat uns jedoch die Tragweite dieser Methoden erst eindringlich vor Augen geführt, hat sie systematisch dargestellt und entwickelt. Diese Darstellung findet sich in den ersten beiden Bänden seiner Leçons mit Anwendungen auf die Erörterung spezieller Flächentypen und orthogonaler Systeme. Die Methode ist ausgibig von seinen Schülern benutzt worden, und sie wird sicher von jedem Bearbeiter der Differentialgeometrie herangezogen werden, der mit den Methoden dieser Disziplin vertraut ist.

Darboux's Genie beruhte auf einer seltenen Vereinigung von geometrischer Vorstellungskraft und analytischem Geschick. Ihm waren alle, die nur geometrisches Raisonnement bei der Behandlung geometrischer Probleme verwendeten, ebenso unsympatisch, wie alle, die glaubten, dass diese Fragen rein analytisch gelöst werden müssten. Seine geometrischen Beweise für die Sätze über die rollenden Flächen sind ebenso rein, wie sie einfach und schön sind. Nicht weniger glänzend sind seine verschiedenen Zurückführungen geometrischer Probleme auf eine gemeinsame analytische Basis und ihre Entwicklung und Lösung von einem gemeinsamen Gesichtspunkt aus. Manchmal finden wir in seinen Untersuchungen eine Vereinigung beider Methoden. Diese Erscheinung tritt in verschiedenen Teilen seiner Abhandlungen zu Tage, besonders in einer von ihnen, in der er das Problem löst, die zweifache Schar von Sphären zu finden, für die die Korrespondenz zwischen den beiden Teilen der einhüllenden Fläche konform ist.[1] Er zeigt durch geometrische Betrachtungen, dass die Krümmungslinien auf den beiden Teilen korrespondieren, und dann mit Hilfe der Analysis, dass sie isometrische Flächen sind. Hier wird die Transformation isometrischer Flächen gezeigt, die BIANCHI die Transformation D_m genannt hat, sowie die assoziierte Deformation der Flächen zweiter Ordnung. Wir glauben jedoch trotzdem, dass DARBOUX's Interesse mehr in der infinitesimalen Geometrie lag. Für jemanden, der ein so ausgesprochenes analytisches Geschick hat, ist das nur natürlich. Die Entdekkungen, mit denen DARBOUX die Analysis bereicherte, während er geometrische Probleme zu lösen versuchte, können wir hier weder erörtern, noch auch nur aufzählen. Zweifellos findet sich in seinem Lebenswerk sein Glaube verwirklicht, »dass die Verbindung zwischen Geometrie und Analysis nützlich und fruchtbar ist, und dass diese Vereinigung vielleicht eine Bedingung für das Gedeihen beider ist».

Wir haben versucht, einen Überblick über die Lebensarbeit DARBOUX's auf dem Gebiete der Geometrie zu geben. Seine Arbeiten sind nicht nur inhaltlich, sondern auch in der Darstellung abgerundet und vortrefflich. Diese Eigenschaften DARBOUX's im Verein mit seiner ganzen Persönlichkeit machten ihn zu einem hervorragenden Lehrer, so dass stets eine grosse Anzahl von fähigen Schülern um ihn versammelt war. Wie MONGE war er nicht mit Entdeckungen zufrieden, es war auch ihm ein Bedürfnis, *Schule* zu machen. Wie sein berühmter Vorgänger, bildete er eine ganze Reihe von Geometern aus, wie GUICHARD, KOENIGS, COSSERAT, DEMOULIN, TZITZEICA und DEMARTRES. Ihre glänzenden Untersuchungen sind der beste Beweis seiner Unterrichtstätigkeit. Sein Geist wird in diesen Männern weiterleben sowie in allen denen, die zu seinen Werken greifen werden, um sich dort Anregung und Leitgedanken zu holen. An DARBOUX wird sich wahrscheinlich auch die Prophezeihung bewahrheiten, die LAGRANGE von MONGE aussprach: »Mit seiner Geometrie wird sich dieser Teufelskerl noch unsterblich machen».

[1] Sur les surfaces isothermiques, Annales de l'Ecole Normale, ser. 3, t. 16, 1899, p. 491—508.