

# ZUR UNTERSUCHUNG DER GRÖSSENORDNUNG GANZER FUNKTIONEN, DIE EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG GENÜGEN.

Von

GEORG PÓLYA

in ZÜRICH.

Diese Arbeit zerfällt in zwei Teile. Der erste behandelt eine spezielle Frage, der zweite stellt ein allgemeineres Problem.

Im ersten Teil betrachte ich algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung, d. h. Gleichungen von der Form

$$(1) \quad R\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

wo  $R$  eine rationale ganze Funktion ihrer drei Argumente ist. Ich beweise, dass jede ganze transzendente Funktion, die einer Gleichung (1) genügt, von *positiver* Ordnung sein muss.<sup>1</sup>

Am Ende meiner Arbeit will ich eine Frage über algebraische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung aufwerfen. Ich werde dabei die Gelegenheit wahrnehmen, ein schon früher von mir gefundenes Resultat in mehr geeigneter Form auszusprechen.

1. Ich will zuerst auf eine einfache Eigenschaft hinweisen, die die Differentialgleichungen erster Ordnung von den algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung unterscheidet.

Offenbar kann eine homogene lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung höchstens  $n$  Integrale besitzen, die alle Polynome und zu je zweien von verschiedenem

---

<sup>1</sup> Nach Einsendung meiner Arbeit an die Redaktion teilte mir Herr J. MALMQUIST, deren Mitglied, ein viel genaueres und weitergehendes Resultat mit, zu dem er durch eine völlig verschiedene, viel schwierigere und tiefere Analyse gelangte. Vgl. seine zugleich erscheinende Arbeit: Sur les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre, Dieser Band. S. 317.

Grade sind. Ähnlicherweise kann eine inhomogene lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung nicht  $n+2$  rationale ganze Integrale besitzen, die alle von verschiedenem Grade wären. Beliebige algebraische Differentialgleichungen zeigen aber ein ganz verschiedenes Verhalten. So hat z. B. schon die Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$y^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{xy'}{y} \right) = xy y'' + y y' - xy'^2 = 0$$

Polynome von beliebig hohem Grade zu Integralen, da ihr allgemeines Integral  $ax^m$  heisst. — Nach diesen Bemerkungen wird vollständig klar der Sinn von folgendem Satze sein:

*Unter den Polynomen, die eine Differentialgleichung erster Ordnung befriedigen, gibt es nur endlich viele von verschiedenem Grade.*

Die in Rede stehende Gleichung soll

$$(2) \quad \Sigma A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta y'^\gamma = 0$$

heissen. Jedes Glied unter dem Summenzeichen ist eindeutig bestimmt durch die Angabe des Wertsystems  $\alpha, \beta, \gamma$ , oder auch, was zu bemerken für den Beweis nützlich ist, durch die Angabe der drei Zahlen  $\beta + \gamma, \alpha - \gamma, \gamma$ . Ich betrachte zuerst die Gesamtheit derjenigen Glieder, für welche  $\beta + \gamma$  am grössten ist. In dieser Gesamtheit betrachte ich wieder die Teilgesamtheit derjenigen Glieder, für welche  $\alpha - \gamma$  am grössten ist, und endlich in der so erhaltenen Teilgesamtheit dasjenige Glied, für welches  $\gamma$  am grössten ist. Dieses durch dreifache Auswahl zuletzt erhaltene wohlbestimmte »höchste Glied« soll  $A_{abc} x^a y^b y'^c$  heissen.

Setzt man für  $y$  ein Polynom  $m$ -ten Grades

$$(3) \quad y = C x^m + \dots$$

ein, so wird aus dem Gliede

$$A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta y'^\gamma$$

ein Polynom, worin das mit der höchsten Potenz behaftete Glied

$$A_{\alpha\beta\gamma} C^{\beta+\gamma} m^\gamma x^{m(\beta+\gamma)+\alpha-\gamma}$$

heisst. Übersteigt  $m$  eine bestimmte leicht angebbare Schranke, so wird die höchste Potenz von  $x$ , die beim Einsetzen von (3) in (2) entsteht, die Potenz  $x^{(b+c)m+a-c}$  und der dazu gehörige Koeffizient

$$(4) \quad C^{b+c} \Sigma' A_{\alpha\beta\gamma} m^\gamma$$

sein, wo  $\Sigma'$  nur über diejenigen Wertsysteme  $\alpha, \beta, \gamma$  erstreckt ist, bei welchen

$$\beta + \gamma = b + c, \quad \alpha - \gamma = a - c$$

ist. Der Ausdruck (4) ist ein Polynom  $c$ -ten Grades in  $m$ , das für genügend grosses  $m$  nicht verschwindet: also kann durch Einsetzung eines Polynoms genügend hohen Grades die linke Seite von (2) nicht mehr identisch verschwinden, w. z. b. w.

2. Bei dieser Überlegung sind diejenigen einfachen Eigenschaften der Differentialgleichungen erster Ordnung zum Vorschein gekommen, die den Beweis von folgendem Satze ermöglichen:

*Eine ganze transzendente Funktion von der Ordnung Null kann nie eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung befriedigen.*

Diejenigen tiefliegenden Eigenschaften der ganzen Funktionen, auf welche ich den Beweis stützen werde, wurden erst kürzlich von Herrn WIMAN<sup>1</sup> aufgedeckt. Auch die Methode, die ich befolge, ist seinen sich auf verwandte Probleme beziehenden Andeutungen entnommen.

Der zitierten Stelle der WIMAN'schen Arbeit ist folgender Satz als Spezialfall zu entnehmen:

*Zu jeder ganzen transzendenten Funktion*

$$(5) \quad F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

*nullter Ordnung lässt sich eine Folge komplexer Zahlen*

$$(6) \quad x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots$$

*mit unendlich wachsenden absoluten Beträgen (d. h.*

$$(7) \quad 0 < |x_1| < |x_2| < \dots < |x_\nu| < \dots; \lim_{\nu \rightarrow \infty} |x_\nu| = \infty)$$

*bestimmen, die folgende Eigenschaften hat:*

*Bezeichnet man mit  $n_\nu$  den Index des grössten Gliedes (bezw. eines geeigneten der grössten Glieder) der Taylorreihe (5) für  $x = x_\nu$ , so ist*

$$(8) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{x_\nu F'(x_\nu)}{n_\nu F(x_\nu)} = 1.$$

*Bezeichnet man mit  $M(r)$  das Maximum von  $|F(x)|$  an dem Kreisrande  $|x| = r$ , so ist*

$$(9) \quad |F(x_\nu)| = M(|x_\nu|).$$

---

<sup>1</sup> WIMAN, Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Betrage bei gegebenem Argumente der Funktion. Acta Mathematica, Bd. 41 (1916), S. 1—28. Vgl. S. 16.

Endlich ist<sup>1</sup> für beliebiges reelles  $k$

$$(10) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{n_\nu^k}{x_\nu} = 0.$$

Der Bequemlichkeit halber können wir anstatt (8), (10)

$$(8') \quad \frac{x F'(x)}{n F(x)} \rightarrow 1, \quad (10') \quad \frac{n^k}{x} \rightarrow 0$$

schreiben, indem wir folgendes vereinbaren: das Zeichen  $\rightarrow$  bedeute im jetzigen Zusammenhange, dass bei der Grenzwertbildung  $x$  nur die Werte (6) durchläuft, und dass in einer Formel, wo  $\rightarrow$  vorkommt,  $n$  den Index des dem  $x$  zugeordneten grössten Gliedes bedeutet. In diesem Sinne ist

$$(11) \quad n \rightarrow \infty$$

und für beliebiges reelles  $k$

$$(12) \quad \frac{x^k}{F(x)} \rightarrow 0.$$

(11) folgt aus (7), (12) folgt aus (9). —

Ich habe einen Widerspruch aus der Annahme abzuleiten, dass durch Einsetzen der Funktion (5) die Gleichung (2) befriedigt wird. Ich werde zeigen, dass

$$(13) \quad \frac{\sum A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha F(x)^\beta F'(x)^\gamma}{A_{abc} x^a F(x)^b F'(x)^c} \rightarrow 1$$

ist, wodurch mein Satz voll erhärtet sein wird. M. a. W., ich habe zu zeigen, dass nach Einsetzen von  $y = F(x)$  und bei Durchlaufen der ausgezeichneten Stellen (6) das unter 1 definierte höchste Glied alle anderen Glieder der linken Seite von (2) überwiegt.

Die von dem höchsten Gliede verschiedenen Glieder an der linken Seite von (2) teile ich in drei Klassen.

I.  $\beta + \gamma = b + c$ ,  $\alpha - \gamma = a - c$ ,  $\gamma < c$ . In diesem Falle ist

$$\begin{aligned} \frac{x^\alpha F(x)^\beta F'(x)^\gamma}{x^a F(x)^b F'(x)^c} &= n^{\gamma-c} x^{a-\gamma-(a-c)} F(x)^{\beta+\gamma-(b+c)} \left( \frac{x F'(x)}{n F(x)} \right)^{\gamma-c} \\ &= \frac{1}{n^{c-\gamma}} \left( \frac{x F'(x)}{n F(x)} \right)^{\gamma-c} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

nach (8') und (11).

<sup>1</sup> Nach Herrn WIMAN bestehen (8), (9) für beliebige ganze Funktionen, und nur das leicht zu gewinnende (10) ist für die Funktionen nullter Ordnung charakteristisch

II.  $\beta + \gamma = b + c$ ,  $\alpha - \gamma < a - c$ . In diesem Falle ist

$$\frac{x^\alpha F(x)^\beta F'(x)^\gamma}{x^a F(x)^b F'(x)^c} = \frac{n^{\gamma-c}}{x^{a-c-(a-\gamma)}} \left( \frac{x F'(x)}{n F(x)} \right)^{\gamma-c} \rightarrow 0$$

nach (8') und (10').

III.  $\beta + \gamma < b + c$ . In diesem Falle ist

$$\frac{x^\alpha F(x)^\beta F'(x)^\gamma}{x^a F(x)^b F'(x)^c} = \frac{n^{\gamma-c} x^{\alpha-\gamma-(a-c)}}{F(x)^{b+c-(\beta+\gamma)}} \left( \frac{x F'(x)}{n F(x)} \right)^{\gamma-c} \rightarrow 0$$

nach (8') und (10'), (12).

Nach dem Begriffe des höchsten Gliedes sind mit I, II, III alle von ihm verschiedenen Glieder an der linken Seite von (2) erschöpft, und somit (13) und der in Aussicht genommene Satz bewiesen. — Man sieht übrigens, dass die von Herrn WIMAN a. a. O. angedeutete Methode bei jeder Differentialgleichung erster Ordnung eine positive untere Schranke für die Ordnung ihrer ganzen transzendenten Integrale zu bestimmen erlaubt, ähnlich, wie sich die Überlegung unter 1 zur numerischen Abschätzung der Grade von ganzen rationalen Integralen eignet.

3. Der unter 2 bewiesene Satz steht nicht vereinzelt da. In einer bemerkenswerten Untersuchung über lineare Differentialgleichungen bewies Herr PERRON<sup>1</sup> u. a., dass eine ganze transzendente Funktion, die einer solchen Gleichung  $m$ -ter Ordnung genügt, mindestens von der (Grössen-) Ordnung  $\frac{1}{m}$  sein muss.<sup>2</sup>

Die Ordnung, d. h. das Anwachsen des Maximalbetrages einer ganzen Funktion ist umgekehrt proportional der Geschwindigkeit, mit welcher die Koeffizienten ihrer Taylorreihe gegen Null konvergieren, m. a. W. der Geschwindigkeit, mit welcher die Taylorreihe gegen die Funktion konvergiert. Der zitierte PERRON'sche sowie der Satz unter 2 beschränken also die Schnelligkeit, mit der die Potenzreihe einer ganzen, nicht rationalen Funktion, die einer Gleichung der genannten Art genügt, gegen die Funktion konvergiert. Sie zeigen eine unverkennbare Analogie zu dem LIOUVILLE'schen Approximationssatze<sup>3</sup>, der seinerseits die Schnelligkeit beschränkt, mit der der Dezimalbruch einer reellen, nicht ratio-

<sup>1</sup> O. PERRON, Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten, Acta Mathematica, Bd. 34 (1910), S. 139—163.

<sup>2</sup> Einen auf dieses Einzelresultat abzielenden Beweisgang nebst einer Anwendung gab ich in meiner Arbeit: Über das Anwachsen von ganzen Funktionen, die einer Differentialgleichung genügen, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang (61) 1916, S. 531—545, vgl. S. 538—545. Herr WIMAN deutete a. a. O. einen neuen Weg zur Gewinnung der PERRON'schen Resultate an, der zugleich weiter und tiefer führen soll. Diesem Wege folgte ich unter 2, und an demselben lässt sich auch der eben ausgesprochene Satz in wenigen Zeilen folgern.

<sup>3</sup> Vgl. etwa BOREL, Théorie des fonctions (Paris, 1898), S. 26 ff.

nalen Zahl, die einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten genügt, gegen die Zahl konvergiert.

Es ist zu erwarten, dass die Untersuchung beliebiger algebraischer Differentialgleichungen, auch zu einem Gegenstück des LIOUVILLE'schen Approximationssatzes führt. Man könnte daran denken, dass etwa folgender Satz besteht: »Eine ganze transzendente Funktion nullter Ordnung kann keiner algebraischen Differentialgleichung genügen«. Allerdings könnte der Beweis oder die Widerlegung einer solchen Vermutung die Frage wesentlich klären.

Die Differentialgleichungen erster Ordnung einerseits und die linearen andererseits sind die einfachsten algebraischen Differentialgleichungen. Daher gelang auch bisher eben diese Spezialfälle mit Erfolg in Angriff zu nehmen. Aber auch eine ganz anders geartete Spezialisierung der Frage führt zu einigermaßen befriedigendem Resultate, wenn man sich nämlich auf Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten beschränkt und dafür beliebige algebraische Differentialgleichungen zulässt. Ich will meine diesbezügliche Untersuchung in Erinnerung rufen und zugleich deren Ergebnis in etwas verbesserter Fassung aussprechen.

4. Den ersten wichtigen Schritt in der Untersuchung der arithmetischen Eigenschaften von Potenzreihen, die einer algebraischen Differentialgleichung genügen, hat Herr HURWITZ<sup>1</sup> getan. Sowohl sein Resultat, wie das, was ich hinzuzufügen habe, wird am besten durch Vergleich mit einem bekannten EISENSTEIN'schen Satze aufgeklärt.

Es handelt sich um Potenzreihen von der Form

$$(14) \quad \frac{s_0}{t_0} + \frac{s_1}{t_1}x + \frac{s_2}{t_2}x^2 + \cdots + \frac{s_n}{t_n}x^n + \cdots$$

wo  $s_n$  und  $t_n$  relativ prime rationale ganze Zahlen sind,  $t_n \geq 1$ . Ist  $s_n = 0$ , so ist  $t_n = 1$ . Der in Rede stehende EISENSTEIN'sche Satz besagt: ist die durch (14) dargestellte Funktion algebraisch, so gibt es eine ganze Zahl  $T$  von der Eigenschaft, dass  $T^n$  durch  $t_n$  teilbar ist. — Bezeichnet man mit  $p_n$  den grössten Primfaktor von  $t_n$ , so lässt, wie leicht zu sehen, derselbe Satz sich noch auf die folgende, der ursprünglichen äquivalente Fassung bringen:

*Genügt die Reihe (14) einer algebraischen Gleichung so ist*

$$p_n = O(1), \quad \log t_n = O(n).$$

Das grosse » $O$ « bedeutet dabei das bekannte LANDAU'sche Zeichen für Grössenordnung. Diese neue Fassung ist recht gekünstelt, aber lässt sich am besten zum Vergleiche mit folgendem Satze heranziehen.

<sup>1</sup> A. HURWITZ, Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle algébrique, Annales de l'Ecole Normale, 3<sup>e</sup> série, t. VI (1889), S. 327—332.

Genügt die Reihe (14) einer algebraischen Differentialgleichung, so ist

$$(I) \log p_n = O(\log n), \quad (II) \log t_n = O(n(\log n)^2).$$

Die Tatsache (I), d. h. dass die grösste Primzahl  $p_n$  im Nenner nicht schneller wächst, als eine gewisse Potenz von  $n$ , ist von Herrn HURWITZ gefunden worden. Die Beschränkung (II) für die Grössenordnung des Nenners wird hier das erste Mal ausgesprochen (meines Wissens), aber sein Beweis ist schon vollständig enthalten in meiner vorher zitierten Arbeit.<sup>1</sup> — Aus (II) folgt, dass etwa die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n^2}} x^n,$$

wo die  $u_n$  irgendwelche ungerade Zahlen sind, keiner algebraischen Differentialgleichung genügen kann, und dasselbe folgt für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} x^n,$$

wo  $q$  einen rationalen echten Bruch bezeichnet (letztere ist die rechte Hälfte einer gewissen Thetareihe). Die Bedingung (I) gestattet hingegen für diese Reihen keine ähnliche Folgerung zu ziehen.

Dieselbe Bedingung (II) bildet auch die Brücke zu der Frage, die ich in dieser Arbeit aufwerfen wollte. Aus ihr folgt nämlich offenbar, dass *wenn eine ganze transzendente Funktion*

$$(15) \quad a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

mit rationalen Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  einer algebraischen Differentialgleichung genügt, so ist

$$(16) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |a_n|}{n(\log n)^2} > -\infty.$$

Dieser Satz steht zu der unter 3 versuchsweise ausgesprochenen Vermutung offenbar in Beziehung: nach dieser Vermutung sollte nämlich

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |a_n|}{n \log n} > -\infty$$

sein, was nicht viel mehr besagen würde, als das schon bewiesene (16).

---

<sup>1</sup> A. a. O., vgl. S. 531—538. Nur an S. 537 sind einige selbstverständliche Änderungen anzubringen.

Es sei noch folgende, mehr kuriose als wichtige Folgerung hervorgehoben: Wenn die Koeffizienten einer Potenzreihe rationale positive Zahlen sind und ihre Partialsummen  $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) nur reelle Nullstellen haben, so genügt die Reihe keiner algebraischen Differentialgleichung. — Man kann nämlich zeigen, dass unter den besagten Bedingungen (16) nicht erfüllt ist.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Vgl. meine Arbeit: Über Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Bd. 36 (1913, 2) S. 279—295 und die dort zitierten Arbeiten des Herrn PETROVITCH.

