SUR L'INTÉGRALE $\int_{x_0}^{x} f(y)\,d\,f(x)$ OÙ x ET y SONT LIÉS PAR UNE RELATION SYMÉTRIQUE.

PAR

PAUL APPELL

à Paris.

(Extrait d'une lettre à M. MITTAG-LEFFLER).

Quoique les mathématiciens ne s'occupent plus guère des intégrales définies ou indéfinies, si fort à la mode il y a une cinquantaine d'années, j'espère que vous lirez avec quelqu'intérêt les considérations suivantes.

I. Posons

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} f(v)\,d\,f(u); \tag{1}$$

la fonction f étant quelconque, et v étant lié à u par une relation

$$F(u, v) \equiv F(v, u) = 0 \tag{2}$$

symétrique en u et v. Si on construit la courbe (2) par rapport à deux axes rectangulaires Ou et Ov, cette courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice et l'intégrale (1) est supposée prise le long d'un arc continu de cette courbe, du point M_0 de coordonnées x_0, y_0 au point M de coordonnées x et y. Le long de cet arc on a

$$v = \lambda(u) \tag{3}$$

et nous supposerons, à cause de la symétrie,

$$u = \lambda(v). \tag{4}$$

L'intégration par parties donne immédiatement

$$\varphi(x) = f(y) f(x) - f(y_0) f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f(u)\, d f[\lambda(u)].$$

Prenons comme variable indépendante v, en faisant

$$v = \lambda(u),$$

alors v varie de y_0 à y le long du même arc $M_0 M$. En écrivant

$$\varphi(x) = f(y) f(x) - f(y_0) f(x_0) + \int_{x_0}^{y_0} f(u)\, d f(v) - \int_{x_0}^{y} f(u)\, d f(v)$$

on voit que la dernière intégrale est $\varphi(y)$; d'où enfin

$$\varphi(x) + \varphi(y) = f(y) f(x) - f(y_0) f(x_0) + \int_{x_0}^{y_0} f(u)\, d f(v), \tag{5}$$

équation dans laquelle y est lié à x par la relation

$$F(x, y) = 0,$$

le dernier terme étant $\varphi(y_0)$.

On a ainsi une équation générale, digne d'attention entre $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$, équation qui montre que

$$\varphi(x) + \varphi(y) - f(x) f(y)$$

est constant.

II. Supposons $y = x = \alpha$, α étant une racine de l'équation

$$F(x, x) = 0,$$

ce qui suppose le point M sur la bissectrice.

On a alors

$$2\varphi(\alpha) = f^2(\alpha) - f(x_0) f(y_0) + \int_{x_0}^{y_0} f(u)\, d f(v).$$

Dans le cas où l'on aurait en même temps,

$$y_0 = x = \alpha',$$

la dernière intégrale serait nulle et on aurait

$$2\varphi(\alpha) = f^2(\alpha) - f^2(\alpha').$$

III. Je n'insiste pas sur les cas particuliers dont quelques uns sont bien connus, par exemple le cas où $f(x) = \log(1 - x)$, la relation (2) étant

$$u + v = 1$$ [1]

Je laisse également de côté le cas où u et v seraient liés par une relation involutive

$$auv + b(u + v) + c = 0$$

pour m'arrêter un instant sur le cas le plus simple de tous où

$$u + v = 1, \qquad f(u) = u^p,$$

p étant un nombre positif quelconque.

Dans ce cas nous prendrons $x_0 = 0$, et nous aurons $y_0 = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\varphi(x) = p\int\limits_0^x (1 - u)^p u^{p-1}\,du.$$

La relation (5) devient alors

$$\varphi(1 - x) + \varphi(x) = (1 - x)^p x^p + \frac{p}{2}\frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)}$$

d'où pour $x = \frac{1}{2}$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1 - u)^p u^{p-1}\,du = \frac{1}{p\,2^{2p+1}} + \frac{1}{4}\frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)}.$$

[1] Voir Bertrand, Calcul intégral, p. 216—220.