SUR L'INTÉGRALE $\int \log(z-\lambda)\, d \log(z-\mu)$.

PAR

PAUL APPELL

à PARIS.

I. L'intégrale

$$I = \int \log(1-x)\, d \log x$$

a fait l'objet de nombreuses études.[1] Plaçons nous dans le domaine complexe, en supposant que λ et μ désignent des constantes *différentes*, et posons

$$(1) \qquad \varphi(z, \lambda, \mu) = \int \log(z-\lambda)\, d \log(z-\mu).$$

En faisant le changement de variable

$$z = \mu + (\lambda - \mu) x$$

on ramène l'intégrale à la forme I. Mais, conservons la forme générale et faisons le changement de variable

$$z = R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)},$$

$R(t)$ étant une fonction rationnelle quelconque, $P(t)$ et $Q(t)$ des polynômes en t.

Appelons $\alpha_h\,(h = 1, 2, \ldots, n)$ les racines de $P(t) - \lambda Q(t)$, $\beta_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ celles de $P(t) - \mu Q(t)$, et $\gamma_k\,(k = 1, 2, \ldots, p)$ celles de $Q(t)$. Nous avons, en désignant par A une constante

$$(2) \quad \varphi(z, \lambda, \mu) = \int \log A \frac{(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_n)}{(t-\gamma_1)(t-\gamma_2)\cdots(t-\gamma_p)}\, d \log \frac{(t-\beta_1)(t-\beta_2)\cdots(t-\beta_n)}{(t-\gamma_1)(t-\gamma_2)\cdots(t-\gamma_p)}$$

$$= \text{partie intégrée} + \sum_{h,i} \varphi(t, \alpha_h, \beta_i) - \sum_{h,k} \varphi(t, \alpha_h, \gamma_k) - \sum_{k,i} \varphi(t, \gamma_k, \beta_i).$$

[1] Voyez J. BERTRAND, Calcul intégral, p. 216.

L'intégrale $\varphi[R(t), \lambda, \mu]$ se réduit donc, quelle que soit la fonction rationnelle $R(t)$, à une somme d'intégrales analogues.

Telle est la propriété fondamentale que j'avais en vue, qui donne la clef des recherches antérieures et qui permet de les étendre.

II. La propriété précédente peut se généraliser comme il suit, relativement à des intégrales de la forme

$$\varphi_1(z) = \int \log(z - \lambda_1) \log(z - \lambda_2) \cdots \log(z - \lambda_\nu)\, d \log(z - \mu) \tag{3}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu, \mu$ sont des constantes non toutes égales. L'intégrale (3) possède cette propriété que le changement de variable

$$z = R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

où $R(t)$ est une fonction rationnelle *quelconque* de la nouvelle variable t et où $P(t)$ et $Q(t)$ désignent des polynômes en t, la transforme en une somme d'intégrales de même nature, où ν peut varier d'une intégrale à l'autre et où figurent les racines des polynômes

$$Q(t),\ P(t) - \lambda_j\, Q(t),\ P(t) - \mu\, Q(t).$$

III. Enfin une propriété analogue a lieu pour les intégrales $\varphi_p(z)$ obtenues par voie récurrente en posant

$$\varphi_p(z) = \int \log(z - a_{1p}) \log(z - a_{2p}) \cdots \log(z - a_{\nu p})\, \varphi_{p-1}(z)\, d \log(z - \alpha_p)$$

ν pouvant varier avec p. Des intégrales de cette sorte ont été considérées par Poincaré à la page 215 du Tome 4 des Acta Mathematica.