ZUR FUNKTIONENTHEORIE.

VON

C. WEIERSTRASS.

(MATHEMATISCHES SEMINAR, 28. MAI 1884.)

An meine Abhandlung vom Oktober 1876 hat sich eine Anzahl von Arbeiten geknüpft, die zum Teil die Theorie der eindeutigen Funktionen in wesentlichen Punkten weitergeführt haben. Hervorzuheben sind die Arbeiten von MITTAG-LEFFLER, leider grösstenteils in schwedischer Sprache geschrieben, sowie von APPELL, PICARD und POINCARÉ. Diese Autoren sind zum Teil in anderer Weise vorgegangen, in der That lässt sich vieles einfacher mit dem Cauchy'schen Satze machen. Es erscheint daher zweckmässig hervorzuheben, was mich gerade zu dem von mir eingeschlagenen Wege geführt hat. Es hängt das zusammen mit der Grundtendenz, die ich bei der Entwickelung der Funktionentheorie verfolge. Ich gehe nicht aus von einer mehr oder weniger willkürlichen Definition einer analytischen Funktion, sondern ich knüpfe den Begriff der Funktion, überhaupt den der Abhängigkeit von Grössen an die arithmetischen Grundoperationen. Sobald diese definiert sind, ergiebt sich der Begriff von Funktionen, die mittelst der Grundoperationen aus den betrachteten veränderlichen Grössen abgeleitet werden. Wenn man die Grundoperationen in endlicher Zahl anwendet, so kommt man zu den rationalen Funktionen. Es wird aber in der Arithmetik nachgewiesen, dass Summen und Produkte auch definiert werden können unter der Voraussetzung unendlich vieler Glieder, und so gelangt man sofort zu Funktionen, die in Form von unendlichen Summen und Produkten rationaler Funktionen dargestellt werden können. Indem man dann die bleibenden Eigenschaften solcher durch arithmetische Operationen wirklich dargestellten Funktionen auffasst und dieser festhält, kommt man zu dem allgemeinen Begriff einer eindeutigen analytischen Funktion.

Wenn man sagen wollte, eine eindeutige Funktion sei eine solche, die für jeden Wert des Argumentes einen bestimmten Wert hat, so wäre dies eine durchaus nichtssagende Definition, namentlich dann, wenn man dem Argument komplexe Werte beilegt. Denn ist $x = u + iv$, so würde jede Grösse z, deren reeller und imaginärer Bestandteil reelle Funktionen von u und v sind, nach der gegebenen Erklärung eine Eunktion von $u+iv$ sein. Das wäre aber etwas ganz willkürliches; es läge gar kein Grund vor z als Funktion von $u+iv$ anzusehen, z ist vielmehr eine Funktion von u und v.

In der That wird ein Zusatz gemacht um die Art, wie z von u und v abhängt, genauer zu bestimmen. Hiergegen ist jedoch einzuwenden, dass eine solche Definition durchaus nichts lehrt über den Umfang, den man der unabhängigen Veränderlichen geben kann. Man hat das in früherer Zeit nicht in seiner Bedeutung erkannt. Man hatte zwar bald erkannt, dass man eine veränderliche Grösse y nur dann als Funktion einer andern Veränderlichen x ansehen dürfe, wenn allgemein eine »regelmässige» Abhängigkeit der einen von der andern stattfindet, und hat diese mehr oder weniger exakt definiert. Zuerst hatte man geglaubt es reiche aus anzunehmen, dass y nicht nur für jedes x einen bestimmten Wert habe, sondern auch, dass dieser sich ständig mit x ändere, man glaubte nämlich dann die Existenz der Ableitung von y nach x beweisen zu können und hatte daraus eine Darstellung der Funktion in Form einer Potenzreihe mittelst des Taylor'schen Satzes, wenigstens für einen beschränkten Bereich, abgeleitet. Allein man weiss jetzt, dass in der Stetigkeit einer solchen Funktion nichts liegt, wodurch die Existenz einer Ableitung begründet wird.[1] Das Resultat aber, zu dem man kam, hatte seine gute Bedeutung, es wurde dadurch die ursprünglich aufgestellte Definition stillschweigend durch eine andere ersetzt, die man so aussprechen kann: Im allgemeinen, d. h. gewisse singuläre Stellen ausgenommen, lässt sich die Funktion in Form einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$ darstellen, die konvergiert, wenn x nahe genug an a liegt.

Auf diese Weise ist man zu dem Begriffe gekommen, dass eine eindeutige Funktion sich in der Nähe einer bestimmten Stelle a regulär verhalte. Nun hat man die Voraussetzung gemacht, die bei den bekannteren Funktionen bestätigt wurde, dass ein solches reguläres Verhalten überall stattfinde mit Ausnahme einzelner Stellen. Zuerst hat man darunter verstanden eine endliche Anzahl einzelner Stellen, dann konnten auch unendlich viele vorhanden sein, aber isolierte, die in

[1] Aber selbst, wenn Ableitungen jeder Ordnung existierten, brauchte man, wie jetzt bekannt ist, aus dem Taylor'schen Satze durchaus keine konvergente Reihe zu erhalten.

der Ebene ein System von diskreten Punkten bildeten. Später ist man auch auf Funktionen gekommen, wo die singulären Stellen Linien bildeten. Schon, wenn man auf dieser Stufe der Erkenntnis stehen bleibt, ist es schwierig sich eine klare Vorstellung über den Bereich zu machen, den man der Veränderlichen geben darf, es war noch in den sechziger Jahren allgemein die Meinung verbreitet, dass eine analytische Funktion, wenn sie überhaupt existiere, in der ganzen Ebene existiere mit Ausnahme von einzelnen Punkten und Linien. Aber auch diese Ansicht hat sich nicht als haltbar erwiesen, denn es giebt analytische Funktionen, die nur für einen Teil der Ebene existieren und für den übrigen Teil der Ebene gar keine Bedeutung haben.

Man kann also mit jenen älteren Definitionen gar nichts anfangen. — Alle Schwierigkeiten verschwinden, wenn man — wie ich es gethan habe — von dem Begriffe des Funktionenelementes ausgeht, also als Grundlage der Definition einer analytischen Funktion eine beliebige Potenzreihe annimmt, die in der Nähe einer bestimmten Stelle a gilt:

$$y = \mathfrak{P}(x-a) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots$$

Um den wahren Konvergenzbereich einer solchen Potenzreihe zu bestimmen, hat man zuerst den Begriff einer abgeleiteten Potenzreihe festzustellen. Innerhalb des Konvergenzbereiches von $\mathfrak{P}(x-a)$, der geometrisch durch einen um den Punkt a beschriebenen Kreis dargestellt wird, nehme man eine Stelle a_1 an und wandle $\mathfrak{P}(x-a)$ um in eine nach Potenzen von $x-a_1$ fortschreitende Reihe $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$. Diese Reihe konvergiert sicher innerhalb eines Kreises um den Punkt a_1, der den Kreis um a von innen berührt, im allgemeinen aber wird der Konvergenzbereich von $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ grösser sein, er kann jedoch höchstens gleich dem Kreise um a_1 sein, der den Kreis um a von aussen berührt. Wenn es jetzt gelingt aus der ursprünglichen Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ eine andere $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ abzuleiten deren Konvergenzbezirk einen Punkt x' der Grenze des Konvergenzbezirkes von $\mathfrak{P}(x-a)$ umfasst, so sagen wir, dass die Funktion, die innerhalb des Kreises um a durch $\mathfrak{P}(x-a)$ definiert ist, an der Stelle x' den Charakter einer ganzen Funktion besitzt. Wenn nun der Kreis um a den wirklichen Konvergenzbereich von $\mathfrak{P}(x-a)$ darstellen soll, so gilt der Satz, dass es an der Grenze mindestens eine Stelle x' giebt, an der die Funktion aufhört den Charakter einer ganzen Funktion zu besitzen, das heisst eine Stelle, für die es unmöglich ist eine aus $\mathfrak{P}(x-a)$ abgeleitete Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ zu finden, deren Konvergenzbezirk x' umfasst.

Wenn es aber eine solche Potenzreihe giebt, so kann man aus $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ eine Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x-x')$ herleiten, die in der Nähe von x' gilt und die für die Werte von x, die zugleich dem Konvergenzbezirke der ursprünglichen Reihe angehören, mit ihr übereinstimmt. An der Grenze des Konvergenzbezirkes von $\mathfrak{P}(x-a)$ muss es also mindestens eine Stelle x' geben, für die es nicht möglich ist eine Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x-x')$ herzuleiten. Dieses kann seinen Grund z. B. darin haben, dass die Funktion an der Stelle x' unendlich gross wird. Es kann aber seinen Grund auch darin haben, dass eine der Ableitungen der Funktion an dieser Stelle unendlich gross wird. Es kann aber auch die Funktion an der Stelle x' unbestimmt werden, womit aber keineswegs alle Möglichkeiten erschöpft sind.

Im allgemeinen wird eine abgeleitete Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ einen Konvergenzbezirk haben, der teilweise mit dem von $\mathfrak{P}(x-a)$ zusammenfällt, teilweise über ihn hinausragt; wir sagen dann, dass in dem gemeinschaftlichen Bereich $\mathfrak{P}(x-a)$ und $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ coinzidieren. In dem hinausragenden Teile stellt die Reihe eine Funktion dar, die wir eine Fortsetzung der ursprünglich definierten Funktion nennen. Die ursprüngliche Potenzreihe stellt also die Funktion nicht vollständig dar, sondern nur einen Zweig davon, und wir nennen deshalb $\mathfrak{P}(x-a)$ ein Element der Funktion.

Ausgehend von einem Funktionenelement $\mathfrak{P}(x-a)$ nehme man innerhalb des Konvergenzbereiches eine Stelle a_1 an, und leite eine Reihe $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ ab. Mit dieser verfahre man ebenso und leite aus ihr $\mathfrak{P}_2(x-a_2)$ ab, u. s. w. Alle Funktionenelemente, zu denen man auf diese Weise gelangt, heissen aus dem ursprünglichen Funktionenelement abgeleitet. $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ heisst unmittelbar aus $\mathfrak{P}(x-a)$ abgeleitet, indem diese Reihe eine unmittelbare Umformung von $\mathfrak{P}(x-a)$ ist, $\mathfrak{P}_2(x-a_2)$, u. s. w. heisst mittelbar aus $\mathfrak{P}(x-a)$ abgeleitet, und zwar $\mathfrak{P}_n(x-a_n)$ durch Vermittelung von $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$; die Annahme der Stellen $a_1, a_2, \dots$ ist willkürlich, nur muss a_1 innerhalb des Konvergenzbezirkes der ersten Reihe, a_2 innerhalb des Konvergenzbezirkes der zweiten Reihe liegen, u. s. w.

Wenn man aus $\mathfrak{P}(x-a)$ unmittelbar oder mittelbar $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}(x-a')$ abgeleitet hat, so lässt sich zeigen, dass man auch stets, entweder unmittelbar oder mittelbar $\mathfrak{P}(x-a)$ aus $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}(x-a')$ ableiten kann. Wenn man also aus irgend einem gegebenen Funktionenelemente auf die angegebene Weise andere herleitet, deren Zahl unbegrenzt ist, so können aus jedem Elemente die übrigen wieder abgeleitet werden. Hieraus erhellt, dass alle diese Funktionenelemente ein in sich geschlossenes Ganzes bilden, zu dem man nichts hinzufügen und von dem man nichts wegnehmen kann. In der That, leitet man auf zwei verschiedenen Wegen aus $\mathfrak{P}(x-a)$ die Reihen $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ und $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}(x-a'')$ her, so kann man rückwärts aus $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ und $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}(x-a'')$ die Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ herleiten, also auch $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ aus $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}(x-a'')$ und umgekehrt.

Wenn aus $\mathfrak{P}(x-a)$ die Reihe $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ hergeleitet wird, so kann diese Herleitung auf die mannigfaltigsten Weisen geschehen, indem die vermittelnden Stellen auf unendlich viele Arten gewählt werden können. Nun kann zweierlei eintreten. Entweder erhält man, wie man auch verfahren möge, stets dasselbe Funktionenelement $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ oder man erhält, auf verschiedene Arten verfahrend, verschiedene Funktionenelemente. Wenn man beweisen kann, dass in der Umgebung jeder beliebigen Stelle x', für welche es überhaupt ein aus $\mathfrak{P}(x-a)$ hergeleitetes Funktionenelement giebt, nur ein einziges Funktionenelement erhalten werden kann — wie man auch bei der Ableitung verfahren möge — so sagt man, dass durch das Funktionenelement $\mathfrak{P}(x-a)$ eine eindeutige analytische Funktion definiert werde.

Dass es solche eindeutigen Funktionen giebt, muss erst bewiesen werden. Für den ersten Augenblick könnte es scheinen, dass man wegen der Willkürlichkeit der vermittelnden Grössen $a_1, a_2, \dots$ in der Regel für eine Stelle a' verschiedene Funktionenelemente erhalten wird. Die Ausdrücke, die man erhält, sind in der That verschieden, allein man braucht nur folgende Überlegung anzustellen. Wenn man eine beständig konvergente Potenzreihe zum Ausgangspunkte nimmt und aus ihr eine andere auf irgend eine Weise ableitet, so ist die neue Reihe auch beständig konvergent und stellt immer noch dieselbe Funktion dar. Durch eine beständig konvergente Potenzreihe wird daher eine eindeutige Funktion dargestellt.

Die Gesamtheit der Stellen x', zu denen man von a aus auf die angegebene Weise gelangen kann, bildet ein Kontinuum, da jede Stelle in einer gewissen Umgebung einer der Stellen x', ebenfalls zu den Stellen x' gehört. Dieses Kontinuum ist notwendig begrenzt, auch in dem Fall einer beständig konvergenten Potenzreihe, da man durch Fortsetzung niemals zu dem unendlich fernen Punkte gelangen kann. Die Begrenzung des Kontinuums kann aber auch aus einer endlichen Anzahl von Punkten, aus unendlich vielen diskreten Punkten, ja sogar aus Linien bestehen. Ich sage, dass ein Punkt a' an der Grenze des Kontinuums liegt, wenn es in jeder Nähe von a' Punkte giebt, die zu dem Kontinuum gehören und auch Punkte, die nicht dazu gehören; gehören alle Punkte der Umgebung von a' zu den definierten, so liegt a' innerhalb des Kontinuums, gehört keiner dazu, ausserhalb. Für jede eindeutige Funktion nenne ich eine solche Grenzstelle eine singuläre Stelle und unterscheide wesentlich und ausserwesentlich singuläre Stellen. Eine Stelle a' heisst ausserwesentlich singulär, wenn es zwar nicht möglich ist für sie ein Funktionenelement $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ herzustellen, wohl aber die Funktion multipliziert mit $(x-a')^m$, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet, sich in der Form einer solchen Potenzreihe darstellen lässt. Wenn dieses aber nicht eintritt, heisst die Stelle wesentlich singulär.

Um zu entscheiden, ob die unendlich ferne Stelle eine reguläre, oder eine ausserwesentlich oder wesentlich singuläre ist, verfahre ich in folgender Art. Für Werte von x in der Nähe von a haben wir $f(x)$ nach Potenzen von $x-a$ entwickelt, d. h. nach Potenzen einer linearen Funktion von x, welche die Eigenschaft hat für $x=a$ zu verschwinden. Ich hätte dafür auch eine andere lineare Funktion nehmen können, z. B.

$$\frac{x-a}{c+dx},$$

wo c und d willkürlich sind, aber $c+ad$ von Null verschieden ist. Man überzeugt sich leicht, dass man aus $\mathfrak{P}(x-a)$ eine Reihe herleiten kann, die nach Potenzen dieser linearen Funktion von x fortschreitet. Wenn ich also $f(x)$ in der Nähe der Stelle $x=\infty$ darstellen will, so muss ich eine lineare Funktion von x wählen, die an dieser Stelle verschwindet. Eine solche ist $\frac{1}{x}\cdot$ Ich sage daher, $f(x)$ verhält sich an der Stelle $x=\infty$ regulär, wenn $f(x)=\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ ist, wo $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ zum Teil mit einem Funktionenelemente $\overline{\mathfrak{P}}(x-a')$ coinzidiert, das aus dem ursprünglichen Elemente $\mathfrak{P}(x-a)$ abgeleitet ist. Erhält man aber

$$\left(\frac{1}{x}\right)^m\cdot f(x)=\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{x}\right),$$

so ist die unendlich ferne Stelle ausserwesentlich singulär und wenn keine solche Darstellung vorhanden ist, wesentlich singulär, vorausgesetzt immer, dass diese Stelle eine Grenzstelle sei.

Es kann Stellen im Gebiete von x geben, die weder Grenzstellen sind noch solche, für welche die Funktion existiert. In diesem Falle muss man sagen, dass der Bereich der Veränderlichen x, innerhalb dessen die Funktion definiert ist, nicht die ganze Ebene umfasse, man hat dann eine Funktion mit Lücken. Hieraus geht hervor, dass man, wenn eine Funktion irgendwie definiert wird, den Bereich der unabhängigen Veränderlichen nicht willkürlich festsetzen darf. Man darf also zum Beispiel nicht sagen: ich will eine Funktion dadurch definieren, dass sie einer bestimmten Differentialgleichung genügt und ihr Bereich ein bestimmter Teil der Ebene ist.

Die Einsicht, dass für jede Funktion der Bereich der Veränderlichen vollkommen bestimmt ist, lässt meiner Ansicht nach keine andere Definition der eindeutigen analytischen Funktion zu als die, welche im Vorhergehenden gegeben worden ist. Es soll zum Beispiel die Definition durchgegangen werden, auf die CAUCHY zuerst aufmerksam gemacht hat und die später von RIEMANN zu Grunde gelegt worden ist. Cauchy sagt er wolle unter einer Funktion $f(x)$ eine solche von der Veränderlichen x abhängige Grösse verstehen, die erstens: für jeden Wert von x innerhalb eines gewissen Bereiches einen bestimmten Wert habe, zweitens: so beschaffen sei, dass eine Ableitung existiere, womit die Stetigkeit vorausgesetzt wird, und dass die Ableitung in dem Bereiche einen bestimmten Wert habe und stetig sei. Die Ableitung wird dabei definiert als die Grenze, der sich der Quotient

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

nähert, wenn die komplexe Veränderliche h unendlich klein wird. Die Frage, ob diese Grenze existiere oder nicht, wird von Cauchy gar nicht berührt; zu seiner Zeit nahm man allgemein an, dass eine solche Ableitung immer existiere, allerdings nur für reelle Grössen. Man sieht sofort, dass es bei komplexem h einen Unterschied machen wird wie sich der Null nähert. Cauchy nahm als Definition an, was ihm freistand, die Abhängigkeit der Grösse $f(x)$ von x solle derart sein, dass dieser Quotient, wie auch h sich der Null nähert, sich einer bestimmten Grenze $f'(x)$ nähert. Es ist klar, dass eine solche Definition gestattet ist. Ob sie zweckmässig ist, das ist eine andere Frage.

Zuerst ist ein Mangel, dass man nicht weiss, was man unter dem Bereich, für den die Funktion definiert ist, zu verstehen hat. Ihn willkürlich festsetzen können wir nicht; wenn die Definition in concreten Fällen exakt sein sollte, müsste nicht gesagt werden: ein gewisser Bereich, sondern der Bereich müsste bestimmt angegeben werden.

Ferner wird nichts darüber gesagt, ob die Funktion über den festgesetzten Bereich hinaus fortgesetzt werden kann.

Die Hauptsache aber ist, dass erst ein Lehrsatz aufgestellt werden muss, nachdem diese Definition gegeben ist, denn, wie man sich drehen und wenden mag, man kommt darüber nicht hinweg bestimmte analytische Formen, z. B. Potenzreihen zu Hilfe zu nehmen. In der That zeigt Cauchy, dass eine Funktion $f(x)$, die seiner Definition genügt, wenn a ein bestimmter Punkt innerhalb des Bereiches ist, sich in Form einer Potenzreihe von $x-a$ ausdrücken lässt. Er kommt durch diesen Lehrsatz eben zu dem Punkte, von dem wir ausgegangen sind, denn alles, was von jetzt ab von einer Funktion gesagt wird, ist aus der Natur der Potenzreihen abgeleitet.

Den Beweis für die Entwickelbarkeit von $f(x)$ nach Potenzen von $x-a$ führt Cauchy durch Einführung des bestimmten Integrals genommen zwischen komplexen Grenzen. Er reicht also keineswegs aus mit den ersten Elementen der Analysis, sondern muss den Integralbegriff zu Hilfe nehmen. So grosse Wichtigkeit nun auch der Integralbegriff für die ganze Analysis hat, möchte ich doch die Funktionentheorie begründen blos mit Hilfe der elementaren Sätze über die Grundoperationen. Wenn ich die Gleichheit zweier Ausdrücke beweisen will, suche ich den Beweis möglichst zu gründen auf Umformungen der beiden Ausdrücke, die vermittelst der Grundoperationen möglich sind, sodass man, wenn auch die Umformungen nicht vollständig durchgeführt werden können, doch zu der Einsicht gelangt, dass die eine Form durch eine geringere oder grössere Anzahl von Transformationen in die andere übergeführt werden könne; was dann einen direkten Beweis giebt. Wenn man aber die Gleichheit dadurch beweist, dass man z. B. beide Ausdrücke in Form von bestimmten Integralen darstellt, so hat man beide Grössen in unendlich kleine Elemente aufgelöst, die, in verschiedener Weise angeordnet, die gleiche Summe geben. Das ist kein so direkter Beweis, als wenn man den einen Ausdruck wirklich in den andern überführt. Ich sage nicht, dass man in jedem Fall einen solchen direkten Beweis führen soll oder führen kann; diese Frage lasse ich unentschieden. Aber ich suche die direkten Beweise soweit durchzuführen, als es eben geht und möchte mich bei der Begründung der Funktionentheorie dieser Methode vorzugsweise bedienen.

Die Definition von Cauchy lässt sich noch in anderer Weise durchführen. Setze ich

$$x=u+iv,\quad y=\varphi+i\psi,$$

und vermehre x um die reelle Grösse h, so ist:

$$f(x+h)-f(x)=h\,.\,f'(x)+\cdots,$$

vermehre ich aber x um die rein imaginäre Grösse ik, so ist:

$$f(x+ik)-f(x)=ik\,.\,f'(x)+\cdots.$$

Gehe ich also zur Grenze über, für $h=0$ und $k=0$, so erhalte ich

$$\frac{\partial y}{\partial u}=f'(x),\ \frac{\partial y}{\partial v}=if'(x),$$

und bekomme also

$$\frac{\partial y}{\partial v}=i\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Diese Gleichung hat RIEMANN als Definition für die analytische Abhängigkeit des y von $x=u+iv$ aufgestellt. Seine Definition lässt sich auch so aussprechen: Indem man die Grössen φ und ψ einführt, hat man

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial\psi}{\partial u},\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial v}.$$

Dann sagt Riemann: Sind φ und ψ zwei reelle Funktionen der reellen Veränderlichen u und v und genügen φ und ψ diesen beiden Differentialgleichungen, so nenne ich $\varphi+i\psi$ eine analytische Funktion von $u+iv$.

Diese Definition erscheint auf den ersten Blick willkürlich. Riemann rechtfertigt sie aber in folgender Weise. Er sagt, dass bei allen Abhängigkeitsverhältnissen, die zwischen zwei Grössen y und x stattfinden und durch arithmetische Formen dargestellt werden können, diese beiden Gleichungen bestehen, also eine gemeinsame Eigenschaft aller bekannten Funktionen ausdrücken, die er eben als Definition der analytischen Funktionen hinstelle. Schon Cauchy hat diese Gleichungen gehabt, er hat auch ihre geometrische Bedeutung erkannt, legt sie aber nicht als Definitionsgleichungen zu Grunde.

So ist Riemann's Definition vollkommen gerechtfertigt, es machen sich aber gegen sie dieselben Bedenken geltend, wie gegen die ursprüngliche Definition Cauchy's. Auch hier weiss man nicht wie man sich eine Vorstellung machen soll von dem Bereiche der Variabeln $u+iv$. Dagegen hat diese Definition den Vorzug, dass sich an sie sehr leicht der Begriff der Fortsetzbarkeit knüpfen lässt. Hat man nämlich zwei Funktionen φ und ψ, die innerhalb eines Bereiches beiden Differentialgleichungen genügen, und gelingt es für einen zweiten Bereich, der mit dem ersten einen Teil gemeinschaftlich hat, zwei Funktionen φ_1 und ψ_1 aufzustellen, die ebenfalls den Differentialgleichungen genügen, und innerhalb des gemeinschaftlichen Teils, bezw. mit φ und ψ übereinstimmen, so nennt Riemann

$\varphi_1 + i\psi_1$ eine Fortsetzung von $\varphi + i\psi$. Er sagt, dass die beiden Funktionen φ und ψ den Differentialgleichungen gemäss fortgesetzt werden.

Um die Möglichkeit der Fortsetzung zu beweisen, ist Riemann gezwungen gewesen, was sich in seinen gesammelten Werken nicht ausgeführt findet, was er aber in seinen Vorlesungen gethan hat, zu den Potenzreihen seine Zuflucht zu nehmen. Er musste also aus den Differentialgleichungen denselben Lehrsatz ableiten, der sich auch bei Cauchy findet, er musste zeigen, dass $u + iv = x$, $\varphi + i\psi = y$ gesetz, y sich als Potenzreihe von $x - x_0$ darstellen lässt. Vermittelst dieser Potenzreihen wird dann gezeigt, dass die Funktion über den ursprünglichen Bereich möglicherweise fortgesetzt werden kann und es werden Bedingungen dafür aufgestellt. Um aber jenen Lehrsatz aus den Differentialgleichungen abzuleiten, muss man eine ganze Reihe von Sätzen aus der Integralrechnung zu Hilfe nehmen, es können also die Elemente der Funktionentheorie nicht an die Theorie der rationalen Funktionen angeschlossen werden.

Es kommt hinzu, dass bei der Definition durch die Differentialgleichungen die Existenz der Ableitungen von Funktionen reeller Veränderlichen vorausgesetzt wird, sodass hier eine Hypothese gemacht werden muss. Wenn man ferner Funktionen von zwei Veränderlichen betrachtet und genau analysiert, was vorausgesetzt wird, wenn man die Existenz von Ableitungen solcher Funktionen annimmt, so überzeugt man sich, dass eine grosse Zahl von Voraussetzungen gemacht wird, die sich noch vermehrt, wenn man aus den ursprünglichen Differentialgleichungen die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = 0$$

ableitet und dadurch φ und ψ definiert. Geht man dagegen von den Potenzreihen aus, so braucht man nur die ersten Elemente der Arithmetik vorauszusetzen.

In der Ansicht, dass man von den Potenzreihen ausgehen muss, werde ich dadurch bestärkt, dass man mit grosser Leichtigkeit denselben Weg einschlagen kann für Funktionen mit mehreren Veränderlichen. Auch die Definitionen von Cauchy und Riemann lassen sich auf Funktionen von mehreren Veränderlichen ausdehnen, wenn man aber z. B. nur für Funktionen von zwei Veränderlichen die Sache durchführt, so erhält man eine Reihe von partiellen Differentialgleichungen, denen die reellen und imaginären Bestandteile genügen müssen, und übersieht nicht, ob man allen zugleich wirklich genügen kann.