BEISPIELE LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT PARTIKULÄREN INTEGRALEN, DIE SICH AN EINER UNBESTIMMTHEITSSTELLE BESTIMMT VERHALTEN.

VON

OSKAR PERRON

in MÜNCHEN.

Wiederholt habe ich mich damit befasst, diejenigen Partikulärintegrale einer linearen Differentialgleichung aufzusuchen, die an einer Unbestimmtheitsstelle sich bestimmt verhalten oder gar analytisch sind, und z. B. den Satz gefunden (Math. Annal. 70, S. 21):

Wenn die Koeffizienten $P_\nu(x)$ *der linearen Differentialgleichung*

$$x^s \frac{d^n y}{d x^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots + P_n(x) y = 0$$

am Nullpunkt analytisch sind, so sind mindestens $n-s$ *linear unabhängige Integrale am Nullpunkt analytisch.*

Bei diesen Untersuchungen handelt es sich in der Hauptsache immer um folgendes: Macht man versuchsweise den Ansatz

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu \tag{1}$$

oder allgemeiner

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^{r+\nu}, \tag{1 a}$$

so erhält man (nachdem eventuell r durch eine algebraische Gleichung bestimmt ist) eine lineare Rekursionsformel zur Berechnung der Koeffizienten D_ν, wobei aber einige D_ν ganz willkürlich bleiben. Während nun im Fall der Bestimmtheit die Reihe (1) bezw. (1 a) bei *beliebiger* Wahl der willkürlichen D_ν stets in einem gewissen Kreis konvergiert und also ein Integral der Differentialgleichung darstellt, hat sie im Fall der Unbestimmtheit im allgemeinen den Konvergenzradius 0, und es ist zu untersuchen, ob vielleicht bei *spezieller* Wahl der willkürlichen D_ν der Konvergenzradius grösser als 0 sein kann.

Es dürfte von Interesse sein, hierzu ein paar einfache Beispiele zu haben, bei denen nicht nur die konvergenzerzeugende Wahl der willkürlichen Koeffizienten sich als möglich nachweisen lässt, sondern diese Koeffizienten auch explizit mittels einfacher Ausdrücke dargestellt werden können. Daher mögen hier zwei solche Beispiele mitgeteilt werden. Mein Buch »Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig und Berlin 1913», aus dem dabei einige Sätze gebraucht werden, wird unter »Lehrbuch» zitiert.

Erstes Beispiel.

$$4x^2y'''-(1-14x-x^2)y''+(4+4x)y'+2y=0. \tag{2}$$

Für diese Differentialgleichung ist der Nullpunkt eine Unbestimmtheitsstelle; nach dem oben erwähnten Satz muss aber wenigstens ein Integral am Nullpunkt analytisch sein. Macht man daher den Ansatz (1), so ergibt sich für die Koeffizienten D_ν die Rekursionsformel

$$(\nu+1)(\nu+2)D_{\nu+2}=(\nu+1)(\nu+2)D_\nu+(\nu+1)(\nu+2)(4\nu+2)D_{\nu+1} \qquad (\nu=0,1,2,\ldots),$$

oder nach Wegheben des Faktors $(\nu+1)(\nu+2)$:

$$D_{\nu+2}=D_\nu+(4\nu+2)D_{\nu+1} \qquad (\nu=0,1,2,\ldots). \tag{3}$$

Hier bleiben D_0 und D_1 ganz willkürlich, und es kommt darauf an, ihr Verhältnis $D_0:D_1$ so zu wählen, dass die Reihe (1) einen von 0 verschiedenen Konvergenzradius hat. Dass das nicht bei *jeder* Wahl zutrifft, ist klar; denn wenn man beispielsweise D_0 und D_1 beide positiv wählt, sind offenbar alle D_ν positiv, und aus (3) folgt:

$$D_{\nu+2}>(4\nu+2)D_{\nu+1},$$

so dass die Reihe (1) den Konvergenzradius 0 hat.

Schreibt man die Gleichung (3) in der Gestalt:

$$(4)\qquad -D_\nu : D_{\nu+1} = 4\nu + 2 + \frac{1}{-D_{\nu+1} : D_{\nu+2}},$$

so erkennt man sogleich die Beziehung

$$(5)\qquad -D_0 : D_1 = 2 + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|10} + \cdots + \frac{1|}{|4\nu+2} + \frac{1|}{|-D_{\nu+1} : D_{\nu+2}}.$$

Wählt man also D_0 und D_1 so dass $-D_0 : D_1$ gleich dem unendlichen regelmässigen Kettenbruch

$$(6)\qquad -D_0 : D_1 = 2 + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + \cdots$$

ist, so folgt aus (5):

$$(7)\qquad -D_{\nu+1} : D_{\nu+2} = 4\nu + 6 + \frac{1|}{|4\nu+10} + \frac{1|}{|4\nu+14} + \cdots,$$

und also

$$\left|\frac{D_{\nu+1}}{D_{\nu+2}}\right| > 4\nu + 6.$$

Demnach ist der Konvergenzradius diesmal unendlich gross. Der Kettenbruch (6) ist gleich (Lehrbuch, S. 353, Fl. (26)):

$$\frac{e+1}{e-1},$$

und somit wird der Konvergenzradius gewiss von 0 verschieden, wenn man

$$(8)\qquad \frac{D_0}{D_1} = -\frac{e+1}{e-1}$$

wählt. Dass das auch *nur* bei dieser Wahl eintritt, oder also, dass *nur ein* am Nullpunkt analytisches Integral existiert, erkennt man so: Würde es noch eines geben, so müsste die Reihe (1) bei *beliebiger* Wahl von D_0 und D_1 einen von 0 verschiedenen Konvergenzradius haben, was aber, wie wir sahen, nicht der Fall ist.

Übrigens lassen sich die D_ν auch explizit angeben. Der Kettenbruch (7) ist nämlich gleich (Lehrbuch, S. 478, Satz 3):

$$4 \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2\lambda}\,\lambda!\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}+\lambda\right)} : \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2\lambda}\,\lambda!\,\Gamma\left(\nu+\frac{5}{2}+\lambda\right)}.$$

Mit Rücksicht auf (7) kann man daher, wenn man von einem willkürlichen für alle ν gleichen Proportionalitätsfaktor absieht, setzen:

$$D_\nu = \left(-\frac{1}{4}\right)^\nu \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4^{2\lambda}\,\lambda!\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+\lambda\right)},$$

also speziell

$$D_0 = \frac{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{2}, \qquad D_1 = -\frac{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}}{2},$$

in Übereinstimmung mit (8).

Zweites Beispiel.

$$2\,x^2\,y'' - (2\,k - 5\,x + 2\,x^2)\,y' + (1 - 4\,x)\,y = 0 \qquad (k \neq 0). \tag{9}$$

Hier ist der Nullpunkt wieder eine Stelle der Unbestimmtheit, und im allgemeinen wird kein am Nullpunkt analytisches Integral vorhanden sein. Man kann aber fragen, für welche speziellen Werte der Konstanten k (Eigenwerte) doch ein solches existiert. Macht man wieder den Ansatz (1), so erhält man diesmal die Rekursionsformel

$$-2\,k\,(\nu+1)\,D_{\nu+1} + (2\,\nu^2 + 3\,\nu + 1)\,D_\nu - 2\,(\nu+1)\,D_{\nu-1} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wobei $D_{-1} = 0$ zu setzen ist; oder nach Wegheben des Faktors $2\,(\nu+1)$:

$$D_{\nu-1} = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) D_\nu - k\,D_{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Betrachtet man diese Rekursionsformel zunächst ganz ohne Rücksicht auf das Vorausgehende, so findet man leicht eine Lösung $D_\nu = \Delta_\nu$, für welche von einem gewissen ν an

$$\left|\frac{\Delta_\nu}{\Delta_{\nu-1}}\right| > \frac{\nu-1}{|k|} \tag{11}$$

ist. Dazu braucht man nur eine natürliche Zahl n, die grösser als $2\,|k| + 1$ ist, zu wählen und $\Delta_{n-1} = |k|$, $\Delta_n = n$ zu setzen, worauf die andern Δ_ν durch (10) eindeutig bestimmt sind. Dann ist nämlich die Ungleichung (11) jedenfalls für $\nu = n$ erfüllt. Wenn sie aber für einen gewissen Wert ν gilt, der $\geqq n$, also auch

$>2\,|k|+1$ ist, so gilt sie auch für den nächstfolgenden, weil aus (10) für $D_\nu = \varDelta_\nu$ folgt:

$$\left|\frac{\varDelta_{\nu+1}}{\varDelta_\nu}\right| = \left|\frac{\nu+\frac{1}{2}}{k} - \frac{\varDelta_{\nu-1}}{k\,\varDelta_\nu}\right| \geqq \frac{\nu+\frac{1}{2}}{|k|} - \left|\frac{\varDelta_{\nu-1}}{k\,\varDelta_\nu}\right|$$

$$> \frac{\nu+\frac{1}{2}}{|k|} - \frac{1}{\nu-1} > \frac{\nu+\frac{1}{2}}{|k|} - \frac{1}{2\,|k|} = \frac{\nu}{|k|}.$$

Aus (11) folgt nun, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varDelta_\nu\, x^\nu$$

den Konvergenzradius 0 hat, und dass, wenn die Reihe (1) einen von 0 verschiedenen Konvergenzradius haben soll, jedenfalls

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{D_\nu}{\varDelta_\nu} = 0$$

sein muss. Alsdann ergibt sich aber aus (10) sogleich (nach Lehrbuch, S. 291 f., Satz 46 C):

$$D_{-1} : D_0 = \frac{1}{2} - \frac{k|}{|\frac{3}{2}} - \frac{k|}{|\frac{5}{2}} - \frac{k|}{|\frac{7}{2}} - \cdots \tag{12}$$

Umgekehrt hat, wenn D_{-1} und D_0 gemäss der Gleichung (12) gewählt werden, die Reihe (1) wirklich einen von 0 verschiedenen, ja sogar einen unendlich grossen Konvergenzradius. Denn die Rekursionsformel (10) kann in der Gestalt geschrieben werden:

$$D_{\nu-1} : D_\nu = \nu + \frac{1}{2} - \frac{k}{D_\nu : D_{\nu+1}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

und hieraus folgt:

$$D_{-1} : D_0 = \frac{1}{2} - \frac{k|}{|\frac{3}{2}} - \frac{k|}{|\frac{5}{2}} - \cdots - \frac{k\;|}{|\frac{2\nu+1}{2}} - \frac{k\;|}{|D_\nu : D_{\nu+1}}. \tag{13}$$

Vergleicht man das mit (12), so ergibt sich:

$$D_\nu : D_{\nu+1} = \frac{2\nu+3}{2} - \frac{k\,|}{|\,\frac{2\nu+5}{2}} - \frac{k\,|}{|\,\frac{2\nu+7}{2}} - \cdots, \tag{14}$$

und also für genügend grosse ν:[1]

$$\left|\frac{D_\nu}{D_{\nu+1}}\right| > \nu,$$

so dass die Reihe (1) wirklich einen unendlich grossen Konvergenzradius hat.

Die Beziehung (12) ist hiernach für Konvergenz der Reihe (1) notwendig und hinreichend. Da aber, wie oben bemerkt, $D_{-1}=0$ sein muss, so ist (12) gleichbedeutend mit:

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{k\,|}{|\,\frac{3}{2}} - \frac{k\,|}{|\,\frac{5}{2}} - \frac{k\,|}{|\,\frac{7}{2}} - \cdots,$$

oder nach Multiplikation mit 2:

$$0 = 1 - \frac{4k\,|}{|\,3} - \frac{4k\,|}{|\,5} - \frac{4k\,|}{|\,7} - \cdots.$$

Dieser Kettenbruch ist aber nach Lehrbuch, S. 353, Fl. (25) gleich

$$\sqrt{4k}\,\operatorname{cotg}\sqrt{4k},$$

und sonach ergeben sich die Eigenwerte k aus der Forderung

$$\sqrt{4k} = \frac{2\nu+1}{2}\pi \qquad (\nu=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Es gibt also die unendlich vielen Eigenwerte

$$k = \frac{(2\nu+1)^2\pi^2}{16} \qquad (\nu=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{15}$$

---

[1] Die Grössenabschätzung des Kettenbruches (14) ergibt sich aus Lehrbuch, S. 254, Satz 24.

Die D_ν lassen sich auch wieder explizit angeben. Der Kettenbruch (14) ist nämlich nach Lehrbuch, S. 478, Satz 3 gleich

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-k)^\lambda}{\lambda!\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}+\lambda\right)} : \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-k)^\lambda}{\lambda!\,\Gamma\left(\nu+\frac{5}{2}+\lambda\right)},$$

und folglich ist, wenn man von einem willkürlichen für alle ν gleichen Proportionalitätsfaktor absieht:

$$D_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-k)^\lambda\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda!\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}+\lambda\right)}.$$