SURFACES DE VOSS ET GUICHARD; SURFACES ASSOCIÉES ET ADJOINTES. DÉFORMATION AVEC RÉSEAU CONJUGUÉ PERMANENT.

Par

BERTRAND GAMBIER

à Lille.

1. — *Exposé du problème.* M. Gosse, dans sa Note des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (1925, t. 181, p. 1125), clôture, d'une façon aussi élégante que rigoureuse, l'un des chapitres les plus attrayants et difficiles de la déformation des surfaces, en montrant que les ds^2 déjà signalés par Weingarten, Darboux, M. M. Baroni et Goursat épuisent les types pour lesquels on sait trouver *toutes* les surfaces représentatives.

On doit donc chercher une autre voie: par exemple, chercher les transformations les unes en les autres de surfaces applicables sur certaines surfaces remarquables; c'est ce que M. Bianchi a fait avec tant de succès pour les surfaces à courbure totale constante ou applicables sur une quadrique.

On peut revenir à une question plus ancienne, chercher une surface déformable avec un réseau conjugué permanent. J'ai adopté ce dernier point de vue; je vais retrouver, par une méthode originale, une classe nombreuse de surfaces V que Voss a signalées le premier en mars 1888 aux Sitzungsberichte der K. Akademie zu München, que M. Guichard a étudiées aussi aux Annales de l'Ecole Normale Supérieure (3ᵉ Série, t. 7, 1890, p. 233). *Ces surfaces jouissent de la propriété caractéristique de posséder un réseau conjugué formé de géodésiques;* chacune possède une déformation à un paramètre où ce réseau ne cesse d'être conjugué. Si l'on considère d'autre part une surface Σ à courbure totale constante (positive ou négative), la transformation de Bonnet-Lie définit à partir de cette surface ∞^1 nouvelles surfaces Σ_1 de même courbure totale, correspondant ponctuellement à Σ de sorte que les asymptotiques se conservent (la correspondance en jeu n'est pas une applicabilité); à chacune des diverses surfaces Σ, $\Sigma_1, \ldots$ correspond une surface de la famille de Voss-Guichard, V, $V_1 \ldots$, et cela par plans tangents parallèles, le réseau conjugué permanent correspondant au réseau d'asymptotiques de Σ, $\Sigma_1 \ldots$; parmi les surfaces Σ_1 correspondant à Σ, il y en a une et une seule dont les lignes de courbure correspondent aux lignes de courbure de Σ: c'est la transformée de Hazzidakis de la primitive; à ce couple spécial (Σ, Σ_1) correspond un couple spécial (V, V_1) tel que les asymptotiques de chaque surface V ou V_1 aient pour homologues sur l'autre un réseau conjugué. Toutes ces questions ont été étudiées sans que les auteurs se préoccupent sérieusement de la réalité.

Je pars délibérément d'un autre point de vue: *je cherche si l'on peut trouver deux surfaces applicables l'une sur l'autre et telles que les asymptotiques de l'une aient pour homologues sur l'autre un réseau conjugué.* Cette recherche se trouve inspirée par la forme des équations de Gauss-Codazzi liant D, D', D'' à E, F, G. Les deux surfaces ainsi trouvées seront dites *adjointes;* on constate aussitôt que le réseau conjugué dans l'applicabilité est formé de géodésiques et que l'on peut passer de la première surface à son adjointe par une déformation continue où le réseau reste conjugué; les surfaces de cette famille sont dites *associées;* chacune a une adjointe et une seule, à condition de négliger un déplacement ou une symétrie plane. On a retrouvé les surfaces de Voss.

Je fais une étude complète de la réalité de la transformation et j'indique ensuite des surfaces particulières du type étudié ici, applicables sur une surface de révolution. Les surfaces minima sont une autre solution particulière de ce problème; j'étudie les solutions *voisines* d'une surface minima donnée.

2. — *Equations de Gauss-Codazzi.* Si l'on se donne les coefficients E, F, G du ds^2, on peut chercher les surfaces représentatives en calculant les coefficients D, D', D'' de Gauss[1]; une équation de Riccati (réductible dans certains cas

[1] Les Géomètres Français ont conservé ces coefficients; mais les Italiens désignent par D, D', D'' les coefficients de la forme quadratique $(-S dc dx)$ exprimée en u, v, du, dv, où c, c', c'' sont les cosinus directeurs de la normale. On a donc schématiquement D (Gauss) $= \sqrt{EG-F^2}\,.\,D$ (italien) et de même pour D', D''. Il serait bon de profiter d'un congrès de Mathématiciens pour unifier les notations. Je crois que conserver D, D', D'' pour les coefficients de Gauss, tandis que δ, δ', δ'' désigneraient les coefficients italiens, serait une notation commode; on pourrait lui reprocher de créer confusion si on doit considérer dans un problème deux déplacements différentiels d et δ; la notation Δ, Δ', Δ'' pourrait créer confusion avec les opérateurs de Beltrami.

favorables à des quadratures) donne ensuite la surface, à un déplacement près. Ces fonctions sont déterminées par *trois* équations simultanées

$$\text{I} \qquad (EG-F^2)\left(\frac{\partial D'}{\partial u}-\frac{\partial D}{\partial v}\right)+D\left(\frac{E}{2}\frac{\partial G}{\partial v}+G\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{F}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)+$$
$$+D'\left(-F\frac{\partial E}{\partial v}+2F\frac{\partial F}{\partial u}-G\frac{\partial E}{\partial u}\right)+D''\left(\frac{E}{2}\frac{\partial E}{\partial v}-E\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{F}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\right)=0$$

$$\text{II} \qquad (EG-F^2)\left(\frac{\partial D'}{\partial v}-\frac{\partial D''}{\partial u}\right)+D\left(\frac{G}{2}\frac{\partial G}{\partial u}-G\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{F}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\right)+$$
$$+D'\left(-F\frac{\partial G}{\partial u}+2F\frac{\partial F}{\partial v}-E\frac{\partial G}{\partial v}\right)+$$
$$+D''\left(\frac{G}{2}\frac{\partial E}{\partial u}+E\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{F}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)=0$$

$$\text{III} \qquad DD''-D'^2=\Omega$$

où Ω désigne, pour abréger, une certaine fonction de E, F, G et de leurs dérivées du premier et second ordre; je me servirai plus loin de la formule classique qui donne Ω sous forme de différence de deux déterminants.

Or le système (I, II), *seul*, est homogène et linéaire en D, D', D'' de sorte que deux solutions, non proportionnelles, (D_1, D'_1, D''_1) et (D_2, D'_2, D''_2) du système *total* (I, II, III) donnent une nouvelle solution $(hD_1+kD_2, hD'_1+kD'_2, hD''_1+kD''_2)$ du système (I, II) *seul*, quelles que soient les constantes h, k. *Les surfaces que nous cherchons sont caractérisées par ce fait qu'un choix convenable des constantes h, k fournit une solution de l'équation III aussi.* Si l'on pose

$$(1) \qquad \Omega_{12}\equiv D_1D''_2+D_2D''_1-2D'_1D'_2$$

la condition nécessaire et suffisante est

$$(2) \qquad h^2\Omega+hk\Omega_{12}+k^2\Omega\equiv\Omega$$

et ceci revient, avec une constante *fixe* m, aux deux relations

$$(3) \qquad \Omega_{12}\equiv m\Omega$$

$$(4) \qquad h^2+mhk+k^2=1.$$

Si (3) est vérifiée, la relation quadratique (4) fournit ∞^1 surfaces V applicables sur les deux surfaces V_1, V_2 relatives à (D_1, D'_1, D''_1) et (D_2, D'_2, D''_2): le réseau asymptotique de V

$$(5) \qquad h(D_1\,du^2+2\,D'_1\,du\,dv+D''_1\,dv^2)+k(D_2\,du^2+2\,D'_2\,du\,dv+D''_2\,dv^2)=0$$

reste conjugué par rapport à un réseau R, *indépendant de h et k*, à savoir

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} du^2 & -du\,dv & dv^2 \\ D''_1 & D'_1 & D_1 \\ D''_2 & D'_2 & D_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Il y a donc deux cas à distinguer suivant que ce réseau R, *conjugué sur toutes les surfaces*, se compose d'une famille *double* ou de *deux* familles distinctes. Le premier cas donne les surfaces réglées applicables sur une surface réglée donnée; le secoud cas donne la solution vraiment intéressante, à savoir les surfaces de Voss-Guichard.

Dans le premier cas les deux formes quadratiques $D_1 du^2+\cdots=0$, $D_2 du^2+\cdots=0$ ont un facteur commun; les surfaces V sont réglées, les génératrices se correspondant. On peut prendre les génératrices comme courbes $v=$const.; on a $D_1=D_2=0$, puis $D'_1=\pm D'_2$; le signe $(+)$ donne des surfaces V_1 et V_2 *isométriques et applicables;* le signe $(-)$ donne deux surfaces *isométriques, non applicables;* à condition de remplacer V_2 par sa symétrique, le signe $(-)$ se remplace par le signe $(+)$. Supposons donc $D'_1=D'_2$; la relation $\Omega_{12}=m\,\Omega$ se réduit à $2\,D'^2_1=m D'^2_1$ et, puisque nous écartons le cas banal de développables, on doit prendre $D'_1\neq 0$, $m=2$; la relation (4) donne $h+k=\pm 1$; de la sorte les coefficients $[0, D'_1, hD''_1+(1-h)D''_2]$ donnent, pour h variant de $-\infty$ à $+\infty$, les surfaces *applicables* sur la première et seconde; les coefficients $[0, -D'_1, hD''_1-(1+h)D''_2]$ donnent les surfaces réglées *isométriques* à V_1 et V_2, non applicables sur elles. Nous avons retrouvé un résultat classique, pour lequel, toutefois, on ne met pas suffisamment en relief, la forme linéaire des fonctions D, D', D'' relativement au paramètre de déformation.

3. — *Surfaces de Voss-Guichard. Réseau permanent réel ou imaginaire.* Bornons-nous désormais au cas où le réseau permanent est effectivement formé de deux familles *distinctes, réelles ou imaginaires* (dans ce dernier cas, pour les surfaces réelles, les deux courbes se croisant en un point réel sont imaginaires conjugées).

Avant de particulariser les courbes de coordonnées, remarquons que la relation

$$h^2 + mhk + k^2 = 1 \tag{1}$$

donne ∞^1 surfaces *associées*, dont chacune V peut servir avec V_1, au lieu de V_1 et V_2, pour définir la famille; mais alors la constante m change de valeur. Calculons la valeur m relative à $V_1(D_1, D'_1, D''_1)$ et $V(hD_1 + kD_2, hD'_1 + kD'_2, hD''_1 + kD''_2)$; on trouve immédiatement, au lieu de Ω_{12}, la fonction $2h\Omega + k\Omega_{12} \equiv (2h + km)\Omega$; il est naturel de déterminer h et k par la relation complémentaire

$$2h + km = 0 \tag{2}$$

qui définit *l'adjointe* de V_1. On a par (1) et (2)

$$k = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{4 - m^2}} \qquad h = \frac{-\varepsilon m}{\sqrt{4 - m^2}} \qquad \varepsilon = \pm 1. \tag{3}$$

Nous allons démontrer, un peu plus loin, que le cas $m = \pm 2$ ne peut avoir lieu; le changement de ε en $(-\varepsilon)$ ne fait que remplacer l'adjointe par une surface symétrique: on a donc, en négligeant un déplacement ou une symétrie, *une adjointe et une seule;* supposons donc que V_2 est l'adjointe, ou que m est nul. *Les asymptotiques d'une surface V_1 étudiée ici ont pour homologues sur la surface adjointe un réseau conjugué* (la relation entre V_1 et l'adjointe V_2 est évidemment réciproque). *Inversement deux surfaces applicables, telles que les asymptotiques de l'une se transforment sur l'autre en un réseau conjugué, définissent une des familles étudiées ici.*

Il est particulièrement commode de n'avoir pas encore précisé la choix du réseau de coordonnées curvilignes; *S_1 et S_2 étant associées, supposées réelles, et se correspondant point réel pour point réel,* m est réel; deux cas se présentent donc pour la recherche de l'adjointe: $m^2 > 4$ ou $m^2 < 4$; *dans le premier, on a ∞^1 surfaces associées réelles, mais une adjointe imaginaire* (ou du moins, au cas où l'adjointe aurait des nappes réelles, ce qui est possible, la correspondance entre V_1 et son adjointe aurait lieu point réel pour point imaginaire sur toute l'étendue des deux surfaces); on a toutes les associées réelles en faisant décrire à m l'intervalle $(2, +\infty)$ qui donne V_1 et toutes ses associées réelles *applicables,* puis l'intervalle $(-\infty, -2)$ qui donne les surfaces symétriques de l'ensemble déjà obtenu. *Dans le second cas, $m^2 < 4$, on obtient ∞^1 surfaces associées réelles, dont* *une adjointe réelle; m* décrivant l'intervalle (0, +2), on a toutes les associées réelles *applicables. Dans les deux cas, la correspondance entre deux associées réelles a lieu point réel pour point réel sur toute l'étendue de la surface* (avec la restriction signalée plus haut, tout à fait exceptionnelle). On a, par ces considérations bien simples, bien qu'on ait à peine amorcé la recherche de ces surfaces, des résultats très précis; ces surfaces donnent un nouvel exemple curieux de surfaces susceptibles, *sans déchirure, ni disparition de régions réelles*, d'une déformation continue. Bien plus, si $m^2 < 4$, *on est certain que la courbure totale de la surface est négative dans toute l'étendue réelle;* car, si nous prenons deux axes ωh, ωk, la courbe $h^2+mhk+k^2=0$ est une ellipse *réelle*, sur laquelle on passe, par continuité, du point réel (h, k) au point réel $(-h, -k)$ par une série de positions intermédiaires toutes réelles; la surface V se trouve ainsi déformée par continuité et appliquée sur sa symétrique; cela exige, comme Eugenio Elia Levi l'a montré, que la courbure totale soit négative. Au contraire, pour $m^2 > 4$, on a une hyperbole et la variation continue sur la courbe, par positions réelles, toutes à distance finie, entre (h, k) et $(-h, -k)$ n'est plus possible. Comme rien d'ailleurs n'empêche de trouver des déformées (autres que des associées) pouvant servir de transition entre S et sa symétrique, nous ne pouvons rien dire du signe de la courbure, si $m^2 > 4$.

4. — *Equations aux dérivées partielles.* Autant il eût été maladroit de particulariser, dans le paragraphe précédent, les courbes (u, v), autant il est avantageux de prendre maintenant le réseau permanent comme réseau de coordonnées (chose possible, même pour $m=\pm 2$); ce réseau peut d'ailleurs être réel ou imaginaire. On aura donc $D'_1=D'_2=0$; débarrassons-nous de l'hypothèse $m=\pm 2$; si cela avait lieu, on se bornerait à $m=+2$ (symétrie). On aurait

$$(1)\qquad \begin{cases} D_1 D''_1 - D_2 D''_2 = 0 & D'_1=0 \\ D_1(D''_2 - 2D''_1) + D_2 D''_1 = 0 & D'_2=0. \end{cases}$$

D_1 ni D_2 ne sont nuls: de (1) résulte donc

$$D''^2_1 - 2D''_1 D''_2 + D''^2_2 = 0$$

d'où $D''_1 = D''_2 \neq 0$, et par suite $D_1=D_2$; mais alors V_2 coïnciderait avec V_1; l'hypothèse $m=\pm 2$ est donc bien inadmissible.

Nous supposons donc V_2 (réelle ou imaginaire) *adjointe*, et non seulement *associée*, à V_1; donc $m=0$. On a

$$(2)\qquad \begin{cases} D_1 D_1'' - D_2 D_2'' = 0 & D'_1 = 0 \\ D_1 D_2'' + D_2 D_1'' = 0 & D'_2 = 0. \end{cases}$$

On peut donc (symétrie) écrire

$$3)\qquad D_2'' = i D_1'' \qquad D_2 = -i D_1 \qquad D'_1 = D'_2 = 0.$$

Dans les équations I, II, où D' a disparu, je remplace D, D'' par D_1, D_1'' puis $-iD_1$, iD_1'': la comparaison entraîne

$$\text{IV}\qquad E\frac{\partial E}{\partial v} - 2E\frac{\partial F}{\partial u} + F\frac{\partial E}{\partial u} = 0$$

$$\text{V}\qquad G\frac{\partial G}{\partial u} - 2G\frac{\partial F}{\partial v} + F\frac{\partial G}{\partial v} = 0.$$

D'après des résultats classiques, l'équation IV exprime que les *courbes* $v =$ *constante sont des géodésiques;* (V) donne le même résultat pour les courbes $u =$ constante. Les équations de Gauss-Codazzi deviennent ($H = \sqrt{EG - F^2}$)

$$\text{I}'\qquad \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\log H + \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2H^2}$$

$$\text{II}'\qquad \frac{1}{D''}\frac{\partial D''}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\log H + \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2H^2}$$

$$\text{III}'\qquad DD'' = \Omega.$$

On élimine aisément D et D'' entre I', II', III'; le calcul se fait symétriquement en calculant

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{D''}{D}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{D''^2}{\Omega}\right) \text{ au moyen de II}'$$

et

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{D''}{D}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{\Omega}{D^2}\right) \text{ au moyen de I}';$$

on a ainsi l'équation aux différentielles totales

$$(4)\qquad d\left[\log\left(\frac{D''}{D}\right)\right]=\left[\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{EG-F^2}{\Omega}\right)+\frac{E\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial E}{\partial v}}{EG-F^2}\right]du-$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{EG-F^2}{\Omega}\right)+\frac{G\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial G}{\partial u}}{EG-F^2}\right]dv$$

de sorte que la condition d'intégrabilité est

$$\text{VI}\qquad \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left[\log\left(\frac{\Omega}{EG-F^2}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{G\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}\right]+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{E\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)}\right].$$

Les équations nécessaires IV, V, VI sont aussi suffisantes; en effet I', II', III' donnent D et D'' par une quadrature avec une constante arbitraire $\left[\text{on calcule } \frac{D''}{D} \text{ par (4)}\right]$. Ces expressions D, D'' ainsi obtenues, jointes à $D'=0$, satisfont donc aux équations de Gauss-Codazzi; donc, avec E, F, G elles déterminent, pour chaque valeur de la constante d'intégration, une surface, intrinsèquement, déformable avec un paramètre, avec réseau (u, v) conjugué permanent, et formé d'ailleurs de géodésiques, en vertu de IV, V; tous les traités classiques démontrent que réciproquement, on a bien ainsi une surface de Voss-Guichard (voir par exemple, Darboux, Théorie des Surfaces, t. 4, p. 103—105). Le paramètre fourni par l'intégration entre bien sous la forme voulue; à priori, nous savons en effet, puisque

$$m=0 \qquad h^2+k^2=1$$

que l'on peut poser

$$(5)\qquad \begin{cases} h=\cos\alpha \qquad k=\sin\alpha \\ D=D_1\cos\alpha+D_2\sin\alpha=D_1e^{-i\alpha} \\ D''=D''_1\cos\alpha+D''_2\sin\alpha=D''_1e^{i\alpha}. \end{cases}$$

Par quotient on a

$$(6)\qquad \frac{D''}{D}=\frac{D''_1}{D_1}e^{2i\alpha} \qquad DD''_1+D''D_1=2\cos\alpha\, D_1D''_1.$$

La constante $e^{2i\alpha}$ est bien fournie par l'intégration de (4); la quantité m relative à $V(D, D'')$ et $V_1(D_1, D''_1)$ est égale à $2\cos\alpha$; elle ne peut devenir égale à ± 2 que si V coïncide avec V_1; nous allons retrouver la séparation en deux classes de surfaces, suivant que $m^2 < 4$ ou α réel, et $m^2 > 4$ ou α imaginaire pure.

5. — *Courbure et torsion des géodésiques u et v.* Nous avons fait remarquer depuis longtemps qu'une surface minima quelconque est solution de notre problème; ici nous négligeons un déplacement, tandis que dans la théorie spéciale des surfaces minima, on impose de plus à chaque surface minima associée de correspondre à la première par plans tangents parallèles aux points homologues, condition possible seulement pour les surfaces *minima* associées; l'équation de Riccati annoncée plus haut, nécessaire pour mettre en place une surface définie intrinsèquement, s'intègre par les trois quadratures donnant la surface adjointe.

Passons maintenant à une surface *quelconque*, minima ou non minima, solution de notre problème. Tout élément, dépendant d'une façon *linéaire et homogène* de D, D', D'' s'obtient, au cours de la déformation, par une formule très simple, pourvu que l'on connaisse ses valeurs sur deux surfaces S_1, S_2 associées (ou adjointes); soit φ cet élément, on aura évidemment

$$\varphi = h\varphi_1 + k\varphi_2 \tag{1}$$

h et k étant les deux constantes déjà introduites; sous cette forme le résultat est valable *même pour les surfaces réglées:* cette formule, d'une si belle simplicité, ne semble pas avoir été remarquée; les éléments de cette nature sont, par exemple, la courbure de Meusnier d'une courbe $\left(\frac{\cos\theta}{R}\right)$, ou bien $\operatorname{cotg}\theta$, ou la torsion géodésique $\left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}\right)$, ou la courbure moyenne de la surface en un point. Si S_1 et S_2 sont deux adjointes, on écrira plus simplement

$$\varphi = \varphi_1 \cos\alpha + \varphi_2 \sin\alpha \tag{2}$$

et ceci prouve que la somme $\varphi_1^2 + \varphi_2^2$ reste constante quand on passe d'un couple d'adjointes à un autre couple.

Pour une *géodésique quelconque* (n'appartenant pas au système conjugué), on a, puisque θ est nul

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos\alpha}{R_1} + \frac{\sin\alpha}{R_2} \qquad \frac{1}{T} = \frac{\cos\alpha}{T_1} + \frac{\sin\alpha}{T_2}. \tag{3}$$

Pour une *géodésique du système conjugué*, on a un résultat encore plus simple; si la géodésique est du système $v =$ constante, on a

$$(4)\qquad \frac{1}{R}=\frac{D}{EH}\quad \frac{1}{T}=\frac{1}{H^2}\frac{DF}{E}\quad D_2=-iD_1\quad \frac{1}{R_1}=\frac{D_1}{EH}\quad \frac{1}{R_2}=\frac{D_2}{EH}.$$

On en déduit donc, en appelant 2ω l'angle des deux géodésiques conjuguées,

$$(5)\qquad \frac{1}{R}=\frac{e^{-i\alpha}}{R_1}\quad \frac{1}{T}=\frac{e^{-i\alpha}}{T_1}\quad \frac{T}{R}=\frac{T_1}{R_1}=\frac{T_2}{R_2}=\frac{H}{F}=\operatorname{tg} 2\omega.$$

Pour une géodésique du système conjugué (soit de la famille u, soit de la famille v) le rapport $\frac{T}{R}$ *reste constant, au cours de la déformation, en chaque point de cette géodésique (mais variable d'un point à l'autre) et égal à la tangente de l'angle des deux géodésiques conjuguées;* nous retrouverons plus bas cette propriété.

Pour la famille $u =$ constante, il faut modifier les deux premières formules (5) et écrire

$$(6)\qquad \frac{1}{R'}=\frac{e^{i\alpha}}{R'_1}\qquad \frac{1}{T'}=\frac{e^{i\alpha}}{T'_1}\qquad \frac{T'}{R'}=\operatorname{tg} 2\omega.$$

Si on introduit la courbure totale K de la surface, égale à $\frac{DD''}{H^4}$, on voit immédiatement d'après les formules

$$\cos 2\omega=\frac{F}{\sqrt{EG}}\qquad \sin 2\omega=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}$$

le résultat relatif aux courbures et aux torsions des géodésiques conjuguées

$$\frac{\sin^2 2\omega}{RR'}=\frac{\cos^2 2\omega}{TT'}=K\qquad RR'+TT'=\frac{1}{K}.$$

On pourra encore remarquer que la transformation, indiquée au numéro 1, par plans tangents parallèles fait correspondre à deux surfaces de même courbure totale constante, se raccordant le long d'une asymptotique, deux surfaces de Voss se raccordant le long d'une géodésique: au cours de la déformation indiquée ici, les deux surfaces de Voss restent tangentes le long d'une géodésique et les formules (5) donnent intrinsèquement les diverses formes de cette géodésique.

6. — *Réseau conjugué réel ou imaginaire.* Les équations IV, V, VI sont au nombre de 3 entre 3 fonctions inconnues E, F, G et les deux variables indépendantes; elles admettent donc une infinité de solutions; comme elles sont à coefficients réels, si, pour les valeurs initiales réelles u_0, v_0 on prend $E_0 > 0$, $G_0 > 0$, $E_0 G_0 - F_0^2 > 0$, on aura un ds^2 qui restera défini positif dans un certain champ réel (u, v) et si on profite du facteur de proportionalité qui entre dans $\frac{D''}{D}$ pour que Ω_0 et $\left(\frac{D_1''}{D_1}\right)_0$ soient de même signe, on voit que les fonctions D_1 et D_1'' restent réelles, soit dans tout le champ déjà défini, soit dans un champ intérieur. En tous cas (sans avoir poussé à fond la discussion des arbitraires initiales) nous avons défini un morceau de surface V_1 réelle et, avec les fonctions $\left(D_1 t, \frac{D_1''}{t}\right)$, où t varie par valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$, une surface V réelle correspondant à V_1 point réel pour point réel, sur toute l'étendue de V_1: la constante m est $\left(t + \frac{1}{t}\right)$; on a donc $m^2 > 4$; le réseau (u, v) est réel.

Supposons maintenant le réseau (u, v) imaginaire, u et v devant recevoir des valeurs conjuguées pour les points réels; on pose

$$(1) \qquad u = u' + iv' \qquad v = u' - iv' \qquad E = e + ig \qquad G = e - ig.$$

On combine IV et V par addition et soustraction; finalement nous avons encore un système à coefficients réels de 3 équations entre e, g, F et les variables indépendantes réelles u', v'. On pourra donc, comme plus haut, trouver une infinité de solutions, réelles pour (u', v') réelles, telles que le ds^2 reste défini positif, ce qui exige

$$(2) \qquad F + e > 0 \qquad F - e > 0 \qquad e^2 + g^2 - F^2 < 0.$$

Les formes de D, D', D'' comme déterminants prouvent que D et $(-D'')$ sont imaginaires conjuguées; si donc la quantité Ω ou DD'' est positive, la surface ne pourra être réelle; il faudra donc s'arranger, par un choix convenable des constantes initiales, pour que Ω_0 soit négatif. On écrira

$$(3) \qquad \begin{cases} D = \varrho e^{i\omega} \qquad D'' = -\varrho e^{-i\omega} \qquad \varrho^2 = -\Omega \\ \log \frac{D''}{D} = -2i\omega + i\pi \qquad d \log \left(\frac{D''}{D}\right) = -2i\,d\omega. \end{cases}$$

Effectivement le second membre de la formule 4 du paragraphe 4 est une imaginaire pure; la surface $V_1(D_1, D''_1)$ et la surface adjointe $V_2(-iD_1, iD''_1)$ sont réelles puisque D_1 et $-D''_1$ sont imaginaires conjuguées; la surface $V(D_1 e^{-i\alpha}, D''_1 e^{i\alpha})$ est réelle et le nombre m correspondant à V et V_1 est $2 \cos \alpha$; α varie de 0 à 2π; m^2 est inférieur à 4; α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$ donnent deux adjointes; α et $\alpha+\pi$ deux surfaces symétriques.[1]

Remarquons que les raisonnements faits sur les surfaces qui se correspondent point réel pour point réel sur toute leur étendue supposent essentiellement que l'on a pu prendre, *en tout point de cette étendue*, u et v comme variables indépendantes; la présence d'une ligne parabolique obligerait Ω à s'annuler tout le long de cette ligne, ou à devenir infini. Les champs de variation pour (u, v) ou (u', v') sont limités par les zéros ou pôles de E, G, F (ou de $F+e$, $F-e$, g) par les zéros de $EG-F^2$ et Ω. On constate ce fait curieux que certaines surfaces V se composent de deux régions R', R'' séparées par une courbe C, telles que sur R' le réseau (u, v) est réel, mais sur R'' imaginaire. J'ai montré au Bulletin des Sciences Mathématiques de Darboux-Picard (1926) que cela a lieu pour l'hélicoïde minimum H et une trajectoire orthogonale *quelconque* C de ses génératrices; il existe donc ∞^1 surfaces V' réelles déformées au sens de Voss de V et recouvrant totalement R' (en double, à l'exclusion de R'') et de même ∞^1 surfaces V'' recouvrant R'' et non R'; pour l'hélicoïde H, la considération des ∞^1 trajectoires C donne finalement les ∞^2 déformées hélicoïdales ou révolutives de H.

Il y a lieu de signaler le cas d'une ligne parabolique; sur une telle ligne C, suivie au cours de la déformation de V, l'équation

$$(4) \quad (D_1 du^2 + 2 D'_1 du\, dv + D''_1 dv^2) \cos \alpha + (D_2 du^2 + 2 D'_2 du\, dv + D''_2 dv^2) \sin \alpha = 0$$

obtenue en ne particularisant pas le système de coordonnées, ne peut avoir une

[1] Je signale ce résultat intéressant: Si une portion de surface réelle admet un réseau conjugué tel que les deux courbes se croissant en un point réel de la surface soient imaginaires conjuguées, la courbure totale est négative sur toute cette région. Cela résulte de ce qui a été dit sur D, D', D'' et $DD''-D'^2=\Omega$. D'ailleurs si on ramène l'équation différentielle du réseau à la forme $du^2+dv^2=0$, l'équation des asymptotiques devient $D(du^2-dv^2)+2D'\,du\,dv=0$, ce qui suffit à démontrer. Remarquons que les coefficients italiens δ, δ', δ'' offrent sur D, D', D'' l'avantage de se trouver: δ' réel et δ et δ'' conjugués quand les courbes u, v sont imaginaires conjuguées; l'expression $EG-F^2 = S\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$ est réelle mais *négative*.

racine double, quel que soit α, que si, en supposant d'abord les D non tous nuls, on a

$$(5) \qquad \frac{D_1}{D_2} = \frac{D'_1}{D'_2} = \frac{D''_1}{D''_2} \qquad D_1 D''_1 - D'^2_1 = 0 \qquad D_2 D''_2 - D'^2_2 = 0$$

et alors la direction, *indépendante de α* définie par l'une ou l'autre équation

$$(6) \qquad D_1 du + D'_1 dv = 0 \qquad D'_1 du + D''_1 dv = 0$$

est l'une des deux directions conjuguées permanentes; elle peut coïncider ou non avec la tangente à C; l'autre direction conjuguée est provisoirement indéterminée. Il y aurait lieu de voir si ces circonstances peuvent ou non se produire.

D'autre part l'étude des surfaces de révolution nous montrera la circonstance suivante: la surface V peut fort bien admettre une ligne C de rebroussement, asymptotique singulière, séparant V en deux régions V' et V'' *isométriques* entre elles; chaque surface V_1 admet la ligne correspondante analogue C_1 et la séparation en deux nappes V'_1, *applicable* sur V', V''_1 *applicable* sur V'', le correspondance ayant lieu point réel pour point réel. Mais alors il existe des surfaces W, *non surfaces de Voss*, qui ont même ds^2 que V et que V ne recouvre que partiellement, la ligne T homologue de C n'ayant plus rien de singulier sur W; la circonstance actuelle se produit si pour V on a $D = D' = D'' = 0$, $EG - F^2 = 0$, ce qui entraîne que les trois jacobiens

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

soient nuls ensemble.

7. — *Intégration directe.* Les équations IV et V traitées comme équation *différentielle* linéaire en F, reçoivent immédiatement la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial(\sqrt{E})}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right) \qquad \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{\sqrt{G}}\right).$$

On peut donc écrire

$$(2) \qquad E = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 \qquad F = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} \qquad G = \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2.$$

Le ds^2 de la surface est

$$(3)\qquad ds^2 = dX^2 + \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2\right] dv^2 = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + dY^2.$$

Nous ne gardons donc que les fonctions inconnues X et Y au lieu de E, F, G; X et Y satisfont à la première équation

$$(\mathrm{E}_1)\qquad \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}.$$

Il n'y a plus qu'à donner l'équation VI: elle admet successivement deux intégrales premières. Il suffit de passer par l'intermédiaire de D et D''. On constate immédiatement l'égalité

$$\frac{G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)} = \frac{\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} - \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v}}{\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\log\left[\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2\right].$$

On peut donc écrire, avec une fonction arbitraire U de u

$$D = H\sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2}\, U$$

et en remplaçant H par l'une des deux formes possibles $\frac{\partial Y}{\partial v}\sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2}$, on a

$$(4)\qquad D = \frac{\partial Y}{\partial v}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2\right] U$$

$$(5)\qquad D'' = \frac{\partial X}{\partial u}\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2\right] V$$

$$(\mathrm{E}_2)\qquad \Omega = U\,V\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2\right].$$

L'équation (E_2), par élimination de UV redonnerait l'équation VI; comme le produit UV est seul connu, on peut remplacer U par $\frac{U}{t}$ et V par Vt, où t est une constante arbitraire et l'on retrouve ainsi la déformation annoncée. Le problème est donc ramené à intégrer (E_1), (E_2) où Ω est remplacée par son expression développée; nous avons donc deux équations aux inconnues X et Y. Quand on n'a pas, par certaines hypothèses à priori, particularisé la forme de U et V, on peut, par le changement de variable $d\bar{u} = U\,du$, ramener U à l'unité; de même $d\bar{v} = V\,dv$ ramène V à l'unité.

Donnons maintenant le $d\sigma^2$ de la représentation sphérique; il suffit d'appliquer la formule classique

$$(6)\qquad d\sigma^2 = \frac{G}{H^4}(D\,du + D'\,dv)^2 - \frac{2F}{H^4}(D\,du + D'\,dv)(D'\,du + D''\,dv) + \frac{E}{H^4}(D'\,du + D''\,dv)^2$$

ou si on préfère

$$(6')\qquad d\sigma^2 = \frac{D'^2 - DD''}{H^4}[E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2] + \frac{ED'' + GD - 2FD'}{H^3}\left[\frac{D}{H}du^2 + \frac{2D'}{H}du\,dv + \frac{D''}{H}dv^2\right]$$

pour obtenir

$$(7)\qquad d\sigma^2 = U^2\,du^2 + V^2\,dv^2 - 2\,UV\frac{\dfrac{\partial X}{\partial v}}{\dfrac{\partial Y}{\partial v}}du\,dv$$

et cette forme remarquable suffirait à elle seule pour montrer le lien avec les surfaces à courbure totale constante.

Or c'est un fait bien connu dans cette théorie que l'équation (E_2), obtenue en égalant $DD'' - D'^2$ à l'expression bien connue, obtenue sous forme de différence de deux déterminants, et exprimée uniquement en E, F, G et leurs dérivées des deux premiers ordres, est purement et simplement équivalente à celle que l'on obtient en écrivant que la courbure totale de la sphère, sur laquelle on effectue la représentation sphérique, est égale à l'unité. Nous posons donc

$$(8) \qquad \cos 2\omega = \frac{\dfrac{\partial X}{\partial v}}{\dfrac{\partial Y}{\partial v}} = \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial u}}{\dfrac{\partial X}{\partial u}}$$

et nous avons l'équation très simple, remplaçant (E_2)

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = U\, V \sin \omega \cos \omega.$$

(Un calcul simple montrerait que E_2 peut être écrite

$$\left[1 - \left(\frac{\dfrac{\partial X}{\partial v}}{\dfrac{\partial Y}{\partial v}}\right)^2\right] \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\dfrac{\partial X}{\partial v}}{\dfrac{\partial Y}{\partial v}}\right)$$

$$+ \frac{\dfrac{\partial X}{\partial v}}{\dfrac{\partial Y}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\dfrac{\partial X}{\partial v}}{\dfrac{\partial Y}{\partial v}}\right) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\dfrac{\partial X}{\partial v}}{\dfrac{\partial Y}{\partial v}}\right) + \left[1 - \left(\frac{\dfrac{\partial X}{\partial v}}{\dfrac{\partial Y}{\partial v}}\right)^2\right]^2 U\, V = 0$$

et l'introduction de la nouvelle inconnue ω donne l'équation (9)).

La méthode revient donc à intégrer l'équation (9), qui est celle bien connue qui domine la théorie des surfaees à courbure totale constante; le changement de variables $d\bar{u} = U\,du$, $d\bar{v} = V\,dv$ ramènerait U et V à l'unité; mais nous allons voir que, dans certains cas, il est commode de laisser U et V, fonctions indéterminées de u et v seul, respectivement. Une fois obtenue *une* intégrale de (9) on intègre le système (8) ou si l'on préfère, en éliminant Y, l'équation de Laplace

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + 2 \operatorname{cotg} 2\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{2}{\sin 2\omega \cos 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = 0$$

Y s'obtient ensuite, quand X est obtenu, par une quadrature de différentielle totale. Je renvoie le lecteur à la seconde Note.

On a ensuite

$$(11)\qquad D = \frac{\partial Y}{\partial v}\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 U \sin^2 2\omega \qquad D' = 0 \qquad D'' = \frac{\partial X}{\partial u}\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 V \sin^2 2\omega.$$

A remarquer la formule donnant la courbure totale K, $\quad K = \dfrac{U\,V}{\dfrac{\partial X}{\partial u}\,\dfrac{\partial Y}{\partial v}}$.

8. — *Surfaces de Voss applicables sur une surface de révolution. Par analogie avec les surfaces minima, il est intéressant de chercher les surfaces V particulières dont le ds^2 est de révolution; l'exemple que je vais donner est assez vraisemblablement le plus général.* Je cherche une solution des équations IV, V, VI de la forme

$$(1)\qquad E \equiv E(x) \qquad F \equiv F(x) \qquad G \equiv G(x) \qquad x = u + v.$$

La dérivée $\dfrac{\partial E}{\partial u}$ ou $\dfrac{\partial E}{\partial v}$ coïncide donc avec $\dfrac{dE}{dx} = E'$. On a donc

$$(2)\qquad \frac{d(\sqrt{E})}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right) \qquad \frac{d(\sqrt{G})}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{F}{\sqrt{G}}\right)$$

de la sorte, je pose pour la commodité

$$(3)\qquad E \equiv \xi^2 \qquad G \equiv \eta^2$$

et l'on a, avec deux constantes arbitraires C_1 et C_2

$$(4)\qquad F = \xi^2 + 2\,C_1\xi \equiv \eta^2 + 2\,C_2\eta$$

puis

$$(5)\qquad \begin{cases} dX = \xi\,du + (\xi + 2\,C_1)\,dv \\ dY = (\eta + 2\,C_2)\,du + \eta\,dv \end{cases}$$

ou plus simplement

$$(6)\qquad X = 2\,C_1 v + \int \xi\,dx \qquad Y = 2\,C_2 u + \int \eta\,dx$$

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = \xi & \dfrac{\partial X}{\partial v} = \xi + 2\,C_1 \\[2ex] \dfrac{\partial Y}{\partial u} = \eta + 2\,C_2 & \dfrac{\partial Y}{\partial v} = \eta. \end{cases}$$

On voit donc que l'angle ω ne dépend lui aussi que de x et le produit UV aussi; donc on aura soit $UV=m^2$, $U=mt$, $V=\frac{m}{t}$ où m et t sont deux constantes, soit $U=e^{au+b}$ $V=e^{av+c}$ et dans ce dernier cas, on pourra sans restreindre supposer $U=e^u$, $V=e^v$. Nous avons donc deux cas à examiner

$$\text{A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\omega}{dx^2}=m^2\sin\omega\cos\omega \\ \xi+2\,C_1=\eta\cos 2\,\omega \\ \eta+2\,C_2=\xi\cos 2\,\omega \end{cases}$$

$$\text{B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\omega}{dx^2}=e^x\sin\omega\cos\omega \\ \xi+2\,C_1=\eta\cos 2\,\omega \\ \eta+2\,C_2=\xi\cos 2\,\omega. \end{cases}$$

Occupons nous de la *première hypothèse:* l'intégration se fait par les fonctions elliptiques, on a effet

$$\omega'^2=A-\frac{m^2}{2}\cos 2\,\omega$$

où A est une nouvelle constante. Je présente le résultat synthétiquement: avec les notations de Weierstrass et la fonction $\wp(x;\,e_1,\,e_2,\,e_3)$ on pourra écrire

$$(8) \qquad \begin{cases} e_1=\dfrac{m^2}{2}-\dfrac{A}{3} & e_2=-\dfrac{m^2}{2}-\dfrac{A}{3} & e_3=\dfrac{2\,A}{3} \\ e_1-e_2=m^2 & e_1-e_3=\dfrac{m^2}{2}-A & e_3-e_2=A+\dfrac{m^2}{2}. \end{cases}$$

de la sorte, puisque m est une constante non nulle, e_1 est distinct de e_2, mais la racine e_3 peut être égale à e_2 ou e_1 suivant que $A=-\frac{m^2}{2}$ ou $+\frac{m^2}{2}\cdot$ On a

$$(9) \qquad \begin{cases} \cos 2\,\omega=\dfrac{\wp+e_1-2\,e_3}{\wp-e_1} & \cos^2\omega=\dfrac{\wp-e_3}{\wp-e_1} & \sin^2\omega=\dfrac{e_3-e_1}{\wp-e_1} \\ \xi=\dfrac{-2\,(C_1+C_2\cos 2\,\omega)}{\sin^2 2\,\omega} & \eta=\dfrac{-2\,(C_2+C_1\cos 2\,\omega)}{\sin^2 2\,\omega} \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} E=\xi^2 \qquad G=\eta^2 \qquad F=\xi\eta\cos 2\omega \\ D=\xi^2\eta t\sqrt{e_1-e_2}\sin^2 2\omega \qquad D'=0 \qquad D''=\xi\eta^2\dfrac{\sqrt{e_1-e_2}}{t}\sin^2 2\omega. \end{cases}$$

L'équation des asymptotiques est

$$(10)\qquad t^2\,du^2+dv^2=0.$$

Celle des lignes de courbure est

$$(11)\qquad \xi t^2\cos 2\omega\,du^2+(\eta t^2-\xi)\,du\,dv-\eta\cos 2\omega\,dv^2=0.$$

Ceci nous apprend que sur chaque surface (t), la correspondance entre le point (u, v) et le point $(u+\lambda,\ v-\lambda)$ où λ est une constante numérique ne change ni le ds^2 ni l'équation des asymptotiques: donc la surface *coïncide* avec elle-même par cette correspondance; elle est, ou simplement hélicoïdale, ou de révolution et l'équation des lignes de courbure départage les deux hypothèses; pour que la surface soit de révolution, il faut et suffit que les lignes $u+v=$ constante le long desquelles la courbure totale de la surface reste constante soient aussi lignes de courbure; en remplaçant dv par $(-du)$, on doit donc avoir une identité, ce qui par un calcul facile donne pour déterminer t la relation

$$C_1=C_2\,t^2.$$

Donc, dans chaque famille (obtenue en choisissant une fois pour toutes e_1, e_2, C_1, C_2) il y a une surface de révolution et une seule, sauf si C_1 ou C_2 est nul; C_1 et C_2 ne sont pas nulles ensemble; les autres surfaces de la famille sont hélicoïdales (le changement de t en $-t$ donne une symétrie qui nous importe peu). D'autre part dans une même famille, deux surfaces correspondant à des valeurs de t^2 différentes, sont non superposables, non symétriques, parce que la correspondance par points de même (u, v) est une application qui change les asymptotiques. Le nombre des paramètres de *forme* (nous ferons abstraction d'une homothétie) est facile à déterminer; le changement de u et v en λu, λv peut donner à la constante e_1-e_2, non nulle, une valeur choisie à priori: ± 1 par exemple ($m=1$ ou i); donc, pour une surface hélicoïdale nous avons pour paramètres de *grandeur* e_1, C_1, C_2, t, donc *trois paramètres de forme* et pour une surface de révolution *deux*.

La surface Σ à courbure totale constante qui correspond à la surface V est définie à une homothétie près: on peut prendre la courbure égale à $+1$ ou -1; en prenant -1 on a pour cette surface Σ le ds^2

$$m^2 t^2 du^2 + \frac{m^2}{t^2} dv^2 + 2 m^2 \cos 2\omega\, du\, dv$$

de sorte que les lignes asymptotiques out pour équation $du\,dv=0$ et les lignes de courbure $t^2 du^2 - dv^2 = 0$; or l'une des deux lignes $tu-v=$constante ou $tu+v=$const. ne peut coïncider *avec elle-même* dans son ensemble par la substitution $(u, v;\ u+\lambda,\ v-\lambda)$ que si t est égal à ± 1: donc chaque famille de Voss étudiée ici correspond à une famille de surfaces Σ (déduites les unes des autres par la transformation de Bonnet-Lie) hélicoïdales toutes, sauf la surface $t=1$, qui est révolutive: si donc $C_1 = C_2$, à la surface de révolution de la famille Σ correspond la surface de révolution de la famille V; mais si $C_1 \neq C_2$, à la surface de révolution de chaque famille correspond une surface hélicoïdale de l'autre; nous avons vu que ω dépend de deux paramètres e_1, e_2, que l'on peut astreindre à $e_1 - e_2 = \pm 1$; la surface Σ contient en outre le paramètre t: donc les surfaces Σ hélicoïdales dépendent de *deux paramètres de forme*, les surfaces Σ révolutives *d'un seul*; comme c'est le compte exact pour les surfaces à courbure totale hélicoïdales ou révolutives, nous voyons qu'ici nous avons bien obtenu les surfaces de Voss *générales* qui sont hélicoïdales ou révolutives; la démonstration résulte de ce que la surface Σ est nécessairement elle-même hélicoïdale.

Obtenir les équations cartésiennes de toutes ces surfaces spéciales V ou Σ, définies intrinsèquement, est un jeu d'enfant. Je l'indique en me bornant à un cas simple, $C_1 = C_2$ de sorte que Σ et V soïent ensemble de révolution. Je profite du rapport d'homothétie pour donner à ξ la valeur $\wp - e_1$ et j'écris

$$(12)\qquad \begin{cases} E = G = [\wp(u+v) - e_1]^2 \qquad F = (\wp - e_1)(\wp + e_1 - 2e_3) \\ D = D'' = 4\sqrt{e_1 - e_2}\,(e_3 - e_1)(\wp - e_1)(\wp - e_3). \end{cases}$$

Le ds^2 de la surface et celui de sa représentation sphérique sont

$$(13)\qquad ds^2 = (\wp - e_1)(\wp - e_3)(du + dv)^2 + (e_3 - e_1)(\wp - e_1)(du - dv)^2$$

$$(14)\qquad d\sigma^2 = \frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_1)}{(\wp - e_1)^2}(du + dv)^2 + (e_1 - e_2)\frac{\wp - e_3}{\wp - e_1}(du - dv)^2.$$

Or si $z = f(r)$ est l'équation de la méridienne, on doit aussi trouver

$$(13') \qquad ds = [1 + f'^2(r)]\, dr^2 + r^2\, d\theta^2$$

$$(14') \qquad d\sigma^2 = \frac{f''^2(r)\, dr^2}{[1 + f'^2(r)]^2} + \frac{f'^2}{1 + f'^2}\, d\theta^2.$$

On a donc, avec une constante λ à déterminer

$$(15) \qquad \begin{cases} dr^2 + dz^2 = (\wp - e_1)(\wp - e_3)\, dx^2 \\ r^2 = (e_3 - e_1)(\wp - e_1)\lambda^2 \qquad \theta = \dfrac{u - v}{\lambda} \\ \dfrac{(e_1 - e_2)(\wp - e_3)}{\wp - e_1}\, \lambda^2 = \dfrac{dz^2}{(\wp - e_1)(\wp - e_3)\, dx^2}. \end{cases}$$

Le calcul s'achève aisément et donne

$$(16) \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{e_3 - e_2}} \qquad r = \sqrt{\dfrac{(e_3 - e_1)(\wp - e_1)}{e_3 - e_2}} \\ \dfrac{dz}{dx} = \sqrt{\dfrac{e_1 - e_2}{e_3 - e_2}}\, (\wp - e_3). \end{cases}$$

Cet exemple est très instructif[1] pour les questions de topologie soulevées au numéro 6: $\wp = e_3$ donne un parallèle de rebroussement, *asymptotique singulière; si* ce parallèle est réel, on voit que, déformée à titre de surface de révolution en nouvelle surface de révolution (qui n'est plus surface de Voss) la surface donne, en réduisant les rayons des parallèles, des surfaces de révolution qu'elle ne recouvre plus complètement: elle ne les recouvre que jusqu'au parallèle transformé du parallèle $\wp = e_3$; donc la surface de Voss ne représente qu'une portion de son ds^2; mais, déformée à titre de surface de Voss en nouvelle surface de Voss (hélicoïdale) elle ne cesse de correspondre à l'ensemble (et rien de plus) de chaque déformée, le parallèle de rebroussement devenant une hélice de rebroussement, asymptotique singulière.

On peut maintenant se préoccuper de la réalité. Si le réseau (u, v) est réel, ω est réel; C_1 est C_2 sont réelles afin que $E > 0$, $G > 0$; $EG - F^2$ est automatiquement positif; t est réel ou imaginaire pure en même temps que $\sqrt{e_1 - e_2}$; il n'y a plus qu'à écrire

$$(\wp - e_1)(e_3 - e_1) > 0 \qquad (\wp - e_1)(\wp - e_3) > 0.$$

[1] Voir la première Note, à la fin du Mémoire.

D'ailleurs les expressions de $\cos^2\omega$ et $\sin^2\omega$ montrent que e_1, e_2, e_3 doivent être réelles et la valeur de $\wp$ aussi; on voit qu'on a le choix entre deux hypothèses:

$$(1°) \qquad \wp > e_1 \qquad \wp > e_3 \qquad e_3 > e_1$$

$$(2°) \qquad \wp < e_1 \qquad \wp < e_3 \qquad e_3 < e_1.$$

Comme la courbe $(\wp, \wp')$ se compose d'une branche infinie et d'un ovale situé à gauche de la branche infinie, la première hypothèse oblige $(\wp, \wp')$ à décrire la branche infinie, l'argument $x=u+v$ étant réel; la racine e_3 peut être la plus grande, et le parallèle de rebroussement, quand $C_1=C_2$, est effectivement réel, e_1 étant la plus petite racine ou la racine moyenne; e_3 peut être la racine moyenne et e_1 la plus petite et il n'ya plus de parallèle de rebroussement réel. Dans le second cas, $(\wp, \wp')$ décrit l'ovale, e_3 est la racine moyenne et e_1 la plus grande; le parallèle de rebroussement est réel; l'argument x est de la forme $\bar{x}+\omega'$ où $\bar{x}$ est réel et ω' la période imaginaire pure; il suffira de faire le changement de variable $u=\bar{u}+\frac{\omega'}{2}$, $v=v+\frac{\omega'}{2}$ pour obtenir tous les points réels de la surface avec des arguments $\bar{u}$, $\bar{v}$ réels; il n'y a rien en contradiction, il n'y a qu'un jeu de formules résultant des propriétés de la fonction $\wp$ de Weierstrass. Nous remarquerons que nous avons en même temps rencontré les trois formes de surfaces de révolution à courbure totale constante *négative.*

Si maintenant le réseau (u, v) est imaginaire conjugué sur V, la surface Σ doit être à courbure totale constante positive et nous aurons par là même, d'après les résultats connus, dans chaque famille de Voss, pour $t=1$ la surface Σ de révolution, qui nous indique la valeur de ω et la variation de $(\wp, \wp')$; en prenant C_1 et C_2 imaginaires conjuguées, $\left(\text{le rapport } \frac{C_2}{C_1} \text{ intervient seul pour la forme}\right)$ nous avons des surfaces V réelles, révolutives ou hélicoïdales suivant la valeur de t. On peut remarquer qu'ici E et G devant être imaginaires conjuguées, on peut supposer qu'il en soit de même pour ξ et η, (en remplaçant au besoin η par $-\eta$ et 2ω par $\pi-2\omega$); F est positif, donc $\cos 2\omega > 0$; $EG-F^2$ est *négatif*, donc $\sin^2 2\omega$ est négatif, $\sin 2\omega$ imaginaire pure; on pourra donc supposer $2\omega=2k\pi+i\omega'$, où ω' est un argument réel et k un entier, qui peut être réduit d'ailleurs à zéro; D et $(-D'')$ sont imaginaires conjuguées, leur produit est positif, donc e_1-e_2 est *négatif*, le paramètre t des formules 9 est donc réel; les formules (9), en tenant compte de $(\wp-e_3)(\wp-e_1)>0$ et $(e_3-e_1)(\wp-e_1)<0$, avec

$\cos^2\omega$ *réel* positif, $\sin^2\omega$ réel négatif, montrent que $\wp$ est réel, e_1, e_2, e_3 réelles; $\wp'$ ne peut être réelle, donc $\wp - e_2$ est négatif; en prenant les deux formes connues des déformées de révolution de la sphère, on achèvera aisément la discussion.

On pourra remarquer que la méthode usuelle jusqu'ici pour déterminer les surfaces de Voss hélicoïdales ou révolutives nous aurait fait partir à priori des surfaces Σ à courbure totale constante, positive ou négative, de révolution ou hélicoïdales, mais nous aurions eu ensuite assez de peine à indiquer quelle intégrale choisir de l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = U\,V\,\theta\cos 2\omega \tag{17}$$

pour obtenir une surface de Voss hélicoïdale ou révolutive. C'est d'ailleurs cette difficulté qui se présente dans le cas des surfaces minima, Σ étant la sphère même.

Il reste maintenant à examiner la *seconde hypothèse* qui conduit à l'équation de forme remarquable

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = e^x \sin\omega\cos\omega. \tag{18}$$

Cette équation, si on y pose $\cos 2\omega = y$ devient

$$y'' = \frac{y}{y^2 - 1}y'^2 + e^x(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+1}\right)y'^2 + e^x(y^2 - 1) \tag{19}$$

et cette forme montre que l'équation ne rentre pas dans les types explicités par M. Painlevé ou moi-même aux Acta Mathematica (1902 et 1909) dont l'intégrale générale est à points critiques fixes. Je n'ai pas aperçu d'intégrale première de l'équation (18). En tous les cas soit une intégrale ω de (18), renfermant déjà deux constantes arbitraires; il s'y ajoute deux constantes C_1 et C_2 pour ξ et η, dont le rapport $\frac{C_1}{C_2}$ intervient seul pour la *forme*, puis le paramètre t; comme les surfaces V coïncident avec elles-mêmes, dans leur ensemble, quand t varie, cela ne fera que trois paramètres de forme au total. Je suis encore la même méthode, basée sur l'équation des asymptotiques. On a toujours

$$
(20) \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{-2\,(C_1 + C_2 \cos 2\,\omega)}{\sin^2 2\,\omega} \qquad \eta = \dfrac{-2\,(C_2 + C_1 \cos 2\,\omega)}{\sin^2 2\,\omega} \\ E = \xi^2 \qquad G = \eta^2 \qquad F = \xi\eta \cos 2\,\omega \\ D = \xi^2 \eta t e^u \sin^2 2\,\omega \qquad D' = 0 \qquad D'' = \xi\eta^2 \dfrac{e^v}{t} \sin^2 2\,\omega. \end{cases}
$$

L'équation des asymptotiques

$$e^u t^2 du^2 + e^v dv^2 = 0$$

change, *sur la surface t*, par l'auto-application (u, v, $u+\lambda$, $v-\lambda$), de sorte que la surface n'est ni révolutive ni hélicoïdale; mais si λ est racine de l'équation $e^\lambda t = t'$, la correspondance d'applicabilité entre le point (u, v) de la surface (t) et le point ($u+\lambda$, $v-\lambda$) de la surface t', change les asymptotiques de la première en celles de la seconde, de sorte que ces deux surfaces sont *égales;* la *surface t coïncide donc dans son ensemble avec chacune de ses associées*, (dans l'ensemble mais non point pour point). Les surfaces minima donnent le même résultat, mais plus précis, car dans ce cas, chaque surface associée est définie en *position:* on a des surfaces minima à ds^2 de révolution, qui, en tournant autour d'une droite convenable, deviennent successivement leurs propres associées. Il y aurait donc à étudier les diverses formes possibles de ces surfaces ou des *surfaces Σ correspondantes, jouissant de la propriété de se correspondre elles aussi à elles-mêmes (dans leur ensemble) par la transformation de Bonnet-Lie.*

9. — *Nouveau procédé de détermination de surfaces particulières.* Puisque la recherche des surfaces de Voss est ramenée au système

$$
\mathrm{E}_1) \qquad \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}
$$

$$
\mathrm{E}_2) \qquad \Omega = UV \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2\right]
$$

on peut chercher une forme simple de deux fonctions X et Y donnant une solution identique de E_1; il faut d'ailleurs se rappeler que chacun des facteurs du second membre de E_2 est différent de zéro. De la sorte essayer $\dfrac{\partial Y}{\partial u} = \lambda \dfrac{\partial X}{\partial u}$ avec $\dfrac{\partial Y}{\partial v} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial X}{\partial v}$, où λ est une constante, ne donne rien, car on aurait $\lambda = \pm 1$

et $\Omega \equiv 0$. Mais on peut essayer, avec une constante λ non nulle d'avoir

$$(1) \qquad \frac{\partial Y}{\partial v} = \lambda \frac{\partial X}{\partial u} \qquad \frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial X}{\partial v}$$

ce qui donne

$$(2) \qquad \lambda^2 \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}$$

et l'intégrale est $X = f(u+\lambda v) + \varphi(u-\lambda v)$; comme on peut remplacer λv par v, on peut réduire λ à $+1$. On écrira donc, en changeant la notation

$$(3) \qquad \begin{cases} E \equiv G \equiv [f(u+v)+\varphi(u-v)]^2 \qquad F \equiv f^2(u+v)-\varphi^2(u-v) \\ dX = f(u+v)(du+dv)+\varphi(u-v)(du-dv) \\ dY = f(u+v)(du+dv)-\varphi(u-v)(du-dv) \\ \sqrt{E} = \dfrac{\partial X}{\partial u} = f+\varphi \qquad \dfrac{\partial X}{\partial v} = f-\varphi \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} = f-\varphi \qquad \sqrt{G} = \dfrac{\partial Y}{\partial v} = f+\varphi. \end{cases}$$

L'équation (E_2) devient

$$(4) \qquad \Omega = 16 f^2 \varphi^2 (f+\varphi)^2\, U\, V$$

et un calcul direct de Ω donne finalement à E_2 la forme

$$(5) \qquad 2f\varphi(f+\varphi)(f\varphi''+\varphi f'')+f\varphi(f-\varphi)(f'^2-\varphi'^2)-(f+\varphi)^2(f\varphi'^2+\varphi f'^2) \\ +4f^2\varphi^2(f+\varphi)\, U\, V = 0$$

où il est bien entendu que f, f', f'' représentent une fonction $f(x)$ et ses deux premières dérivées où x est égal à $u+v$; de même $\varphi(y)$, φ', φ'' où y est égal à $u-v$. Comme vérification (5) coïncide bien avec ce que l'on obtient en écrivant

$$\cos 2\omega = \frac{\dfrac{\partial X}{\partial v}}{\dfrac{\partial Y}{\partial v}} = \frac{f-\varphi}{f+\varphi}$$

et en portant dans

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = U\, V \sin \omega \cos \omega.$$

Ordonnant (5), on a

$$(6)\qquad f\left[\frac{2\varphi''}{\varphi}-\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}\right]+\varphi\left[\frac{2f''}{f}-\frac{f'^2}{f^2}\right]+\left[2\varphi''-\frac{3\varphi'^2}{\varphi}\right]$$
$$+\left[2f''-\frac{3f'^2}{f}\right]+4(f+\varphi)\,U\,V=0$$

et en désignant par L le symbole des logarithmes népériens, on peut remplacer (6) par

$$(7)\qquad L[X_1+Y_2+X_3Y_3+X_4Y_4]-L[X_3+Y_4]=L\,4+L(-U)+L\,V$$

en posant

$$(8)\qquad \begin{cases} X_1=2f''-\dfrac{3f'^2}{f} & X_3=f \qquad X_4=\dfrac{2f''}{f}-\dfrac{f'^2}{f^2} \\ Y_2=2\varphi''-\dfrac{3\varphi'^2}{\varphi} & Y_4=\varphi \qquad Y_3=\dfrac{2\varphi''}{\varphi}-\dfrac{\varphi'^2}{\varphi^2}. \end{cases}$$

On élimine U et V par dérivation en u, puis en v, d'où

$$(9)\qquad \begin{cases} (X_1''-Y_2''+X_3''Y_3-X_3Y_3''+X_4''Y_4-X_4Y_4'')(X_1+Y_2+X_3Y_3+X_4Y_4)(X_3+Y_4)^2 \\ \qquad -[X'_1+X'_3Y_3+X'_4Y_4)^2-(Y'_2+X_3Y'_3+X_4Y'_4)^2][X_3-Y_4]^2 \\ \qquad +[(X'^2_3-Y'^2_4)-(X''_3-Y''_4)(X_3+Y_4)][X_1+Y_2+X_3Y_3+X_4Y_4]^2=0. \end{cases}$$

Remplaçons dans (9) les X et Y par leurs expressions (8), et on a un résultat de la forme

$$(10)\qquad \sum_1^n \xi_i\,\eta_i=0$$

où n est un certain entier, les ξ étant fonctions de x seul et les η de y seul. On sait résoudre une telle équation de forme classique: on établit h relations linéaires et homogènes à coefficients constants entre les η (h entier, $0\leq h\leq n$); il en résulte $n-h$ relations linéaires et homogènes aussi entre les ξ, n'utilisant que les coefficients constants déjà en jeu. De la sorte φ doit être intégrale de h équations différentielles d'ordre 4 au plus, où y ne figure pas; de même f de $n-h$ équations analogues. Pour une telle solution f, φ (et il en existe), (7) fournit U et V, chacun à un facteur près, t pour U et $\frac{1}{t}$ pour V et nous en déduisons E, F, G, D, D''. La longueur des calculs m'a fait reculer devant une discussion complète; en tous cas les équations en f et φ annoncées ne sont pas incompatibles, puisque le numéro précédent donne une solution où φ est une constante non nulle et où $U\,V$ se réduit à une constante m^2 ou à e^{u+v}. On retrouve directement l'exemple précédent en cherchant à déterminer U et V de sorte que

$$4\,U\,V \equiv A(u+v)+B(u-v)$$

où A et B sont des fonctions convenables de leur argument $u+v$ ou $u-v$. On n'a pas à dériver (6), mais à l'ordonner, d'où

$$(11)\qquad f\left[\frac{2\,\varphi''}{\varphi}-\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}+B\right]+\left[\frac{2f''}{f}-\frac{f'^2}{f^2}+A\right]\varphi+\left[2f''-\frac{3f'^2}{f}+fA\right]$$
$$+\left[2\,\varphi''-\frac{3\,\varphi'^2}{\varphi}+\varphi B\right]=0$$

équation à 4 termes $\sum\limits_1^4 \xi_i\eta_i=0$, que l'on traite par la méthode précédente et on trouve aisément une seule solution (u et v jouant le même rôle), B réduit à une constante que l'on peut supposer nulle et $U=mt$, $V=\frac{m}{t}$ ou $U=te^u$, $V=\frac{e^v}{t}$ et l'on retombe sur le numéro précédent.

Il y aurait lieu de faire la discussion complète.

10. — *Comparaison avec la méthode de Guichard.* Les surfaces étudiées ici ont été signalées pour la première fois par Voss (Sitzungsberichte der K. Akademie zu München, März 1888), puis étudiées par Guichard (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1890, 3e Série, t. 7, p. 19—22 et 233—264). Darboux a résumé l'essentiel du mémoire de Guichard, t. 4 de la Théorie des Surfaces, p. 101—110, puis p. 128—129; il donne d'ailleurs une démonstration géométrique de la plupart des résultats trouvés analytiquement par Guichard; je renvoie le lecteur à ces sources, pour l'intelligence de ce qui suit; je ne connais pas d'autre travail sur ce sujet. M. Bianchi a donné quelques indications que je citerai plus bas.

On a trouvé comme $d\sigma^2$ de la représentation sphériqe de la surface $V(t)$

$$(1)\qquad d\sigma^2=t^2\,U^2\,du^2+\frac{V^2}{t^2}\,dv^2-2\,U\,V\cos 2\,\omega\,du\,dv$$

de sorte que les cosinus directeurs (c_1, c_1', c_1'') de la normale au point $M(u, v)$ de la surface de Voss satisfont aux relations (je réserve c, c', c'', θ sans indice pour la surface $V(1)$ au lieu de $V(t)$

$$(2)\quad Sc_1^2 = 1, \qquad S\left(\frac{\partial c_1}{\partial u}\right)^2 = U^2 t^2, \qquad S\left(\frac{\partial c_1}{\partial v}\right)^2 = \frac{V^2}{t^2}, \qquad S\frac{\partial c_1}{\partial u}\frac{\partial c_1}{\partial v} = -UV\cos 2\omega$$

avec bien entendu

$$(3)\ (\mathrm{E}')\qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = UV \sin\omega\cos\omega.$$

Un calcul classique montre que chaque cosinus c_1, c'_1, c''_1 est une intégrale du système complètement intégrable

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial u^2} - \left[-U^2t^2\theta_1 + \dfrac{\partial}{\partial u}\log(U\sin 2\omega)\cdot\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + \dfrac{2t^2U\dfrac{\partial\omega}{\partial u}}{V\sin 2\omega}\cdot\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v}\right] = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial u\partial v} - UV\theta_1\cos 2\omega = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial v^2} - \left[-\dfrac{V^2}{t^2}\theta_1 + \dfrac{\partial}{\partial v}\log(V\sin 2\omega)\cdot\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{2V\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}{t^2U\sin 2\omega}\cdot\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}\right] = 0 \end{cases}$$

et l'intégration de ce système (4), nécessaire pour obtenir la représentation sphérique, se ramène à une équation de Riccati; les constantes arbitraires se réduisent finalement pour l'ensemble (c_1, c'_1, c''_1) aux trois constantes d'un déplacement autour de l'origine. Ayant obtenu la sphère, on obtient la surface Σ à courbure totale constante qui correspond par plans tangents parallèles à V, les asymptotiques de Σ ayant pour homologues le réseau conjugué géodésique de V; Σ est le lieu du point ξ, η, ζ obtenu par les formules de Lelieuvre (α est égal à i si le réseau (u, v) est imaginaire, à $+1$ si le réseau (u, v) est réel, de sorte que Σ soit réelle avec la courbure totale $+1$ dans le premier cas, -1 dans le second).

$$(5)\quad \begin{cases} \xi = \alpha\displaystyle\int \left(c'_1\frac{\partial c''_1}{\partial u} - c''_1\frac{\partial c'_1}{\partial u}\right)du - \left(c'_1\frac{\partial c''_1}{\partial v} - c''_1\frac{\partial c'_1}{\partial v}\right)dv \\[2ex] \eta = \alpha\displaystyle\int \left(c''_1\frac{\partial c_1}{\partial u} - c_1\frac{\partial c''_1}{\partial u}\right)du - \left(c''_1\frac{\partial c_1}{\partial v} - c_1\frac{\partial c''_1}{\partial v}\right)dv \\[2ex] \zeta = \alpha\displaystyle\int \left(c_1\frac{\partial c'_1}{\partial u} - c'_1\frac{\partial c_1}{\partial u}\right)du - \left(c_1\frac{\partial c'_1}{\partial v} - c'_1\frac{\partial c_1}{\partial v}\right)dv \end{cases}$$

et le ds^2 de Σ est

$$\alpha^2\left(U^2t^2\,du^2+\frac{V^2}{t^2}\,dv^2+2\,U\,V\cos 2\,\omega\,du\,dv\right)\cdot$$

D'autre part, on peut définir la surface de Voss comme enveloppe du plan

(6) $$c_1x+c'_1y+c''_1z=p_1$$

et comme le réseau (u, v) est conjugué, la fonction p_1 est une quatrième intégrale de l'équation

(7) (E″) $$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=U\,V\theta\cos 2\,\omega$$

rencontrée plus haut, où ω est solution de E'. Darboux démontre que réciproquement p_1 fournit bien une surface de Voss.

La détermination de Σ n'est pas indispensable, mais éclaire la signification de la déformation correspondant à la variation de t, *qui n'influe pas sur le choix de* ω, *mais sur le choix de* θ, *quand on veut obtenir des surfaces de Voss applicables.* Guichard d'ailleurs ne s'occupe nullement du paramètre t (de sorte que le travail de Guichard correspond à $t=1$) et il semble, en 1890, n'avoir pas eu connaissance de cette déformation. Remarquons que, t variant, la solution c_1, c'_1, c''_1 qui fournit (1), (2), (4), varie, mais rien n'empêche de conserver la même fonction p_1 solution de (E''). On a alors une famille de surfaces de Voss, dépendant du paramètre t, non applicables entre elles, rapportées à un réseau conjugué permanent géodésique, avec cette propriété assez curieuse qu'aux points homologues, les plans tangents sont à la même distance de l'origine.

Comme ce n'est pas le cas ici, nous devons en réalité étudier la solution $\theta(u, v, t)$ qui correspond aux diverses surfaces de Voss applicables entre elles; désignant pour abréger $\theta(u, v, 1)$ par θ et $\theta(u, v, t)$ par θ_1, nous aurons donc à expliciter θ_1 au moyen de θ.

Expliquons d'abord comment $\Sigma(t)$ change quand t varie; nous pouvons faire $U=V=1$, par un changement de variables. Bonnet-Lie ont remarqué que si $\omega=\varphi(u, v)$ est une solution de

(E′) $$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}=\sin\omega\cos\omega$$

la nouvelle fonction $\omega_1(u, v) \equiv \omega\left(\frac{u}{t}, vt\right)$ satisfait aussi à (E′), quelle que soit t; ω et ω_1 déterminent deux surfaces Σ, Σ_1 dont les éléments linéaires, et ceux des représentations sphériques, sont

$$(8)\qquad \begin{cases} du^2+dv^2 \pm 2\cos 2\omega\, du\, dv \\ du^2+dv^2 \pm 2\cos 2\omega_1 du\, dv \end{cases}$$

le signe + correspondant à Σ ou Σ_1 et le signe — aux représentations sphériques; les lignes de courbure de Σ ou Σ_1 ont pour équation $u \pm v$=constante; u est la longueur d'arc de l'asymptotique v=constante, et de sa représentation sphérique. Donc, *considérée à ce point de vue, qui n'est pas celui adopté ici*, la transformation de Bonnet-Lie fait correspondre à toute surface Σ, de courbure totale constante, ∞^1 nouvelles Σ_1 définies intrinsèquement, de même courbure totale constante que Σ, telles que les asymptotiques se correspondent ainsi que les lignes de courbure; chaque surface peut être partagée en ∞^2 losanges de même côté l par les asymptotiques; ces losanges conservent leur côté en passant à Σ_1, mais leur angle d'ouverture 2ω varie; ces losanges restent losanges sur la représentation sphérique. C'est ce point de vue qui intervient dans les transformation de Bäcklund des surfaces à courbure totale constante et la théorie de M. Bianchi.

Bonnet a, tout de suite après, fait remarquer que si l'on adopte un sens déterminé, suivi par continuité sur Σ et les surfaces $\Sigma(t)$, sur la normale, en portant une longueur constante l sur cette normale, à partir de son pied, $\left(\text{la courbure de } \Sigma \text{ étant } \frac{1}{l^2}\right)$, on obtient une surface T, parallèle à Σ, de courbure moyenne constante égale à l; T est réelle si l est réel, imaginaire si l est imaginaire pure. Les asymptotiques de Σ deviennent lignes de longueur nulle de T. Or les diverses surfaces $T(t)$ sont applicables entre elles, *mais pas par les points de même u, v sur Σ et Σ_1*. On est obligé de prendre sur Σ_1 le point (u_1, v_1) qui a pour coordonnées

$$(9)\qquad u_1 = tu \qquad v_1 = \frac{v}{t}\cdot$$

On a ainsi

$$(10)\qquad \omega_1(u_1, v_1) \equiv \omega(u, v).$$

Les surfaces T sont toutes isothermiques; et dans l'application de $T(t)$ sur $T(1)$, les rayons de courbure principaux sont égaux aux rayons correspondants aux points homologues dans l'applicabilité. En passant sur la demi-normale opposée, on définit de nvuvelles surfaces T', $T'(t)$, isothermiques associées aux précédentes, applicables entre elles (mais non sur celles de l'autre série).

C'est ce nouveau point de vue qui est adopté aussi ici; sur $\Sigma_1(t)$, on a appelé les coordonnées curvilignes u_1, v_1, puis on écrit les formules (9) qui ne font qu'échanger entre elles les asymptotiques de Σ_1, multipliant les arcs d'une série par t, et de l'autre par $\frac{1}{t}\cdot$ Dans cette correspondance (u, v) entre Σ et Σ_1, on a désormais les ds^2

$$(11) \qquad \begin{cases} U^2 du^2 + V^2 dv^2 \pm 2\, U V \cos 2\,\omega\, du\, dv \\ U^2 t^2 du^2 + \dfrac{V^2}{t^2} dv^2 \pm 2\, U V \cos 2\,\omega\, du\, dv. \end{cases}$$

Les asymptotiques de Σ ont encore pour homologues les asymptotiques de Σ_1; les lignes de courbure sont remplacées par un réseau conjugué non orthogonal, sauf pour la valeur exceptionnelle $t = \pm i$, qui donne la transformée d'Hazzidakis [sur les surfaces $T(1)$ et $T(i)$, les lignes de courbure se correspondent, leurs rayons principaux s'échangeant]; les losanges de Σ sont devenus des parallélogrammes ayant les mêmes côtés lt et $\frac{l}{t}$; l'angle $2\,\omega$ est conservé; les aires sont conservées (mêmes propriétés pour les losanges et les aires sur les représentations sphériques).

Enfin quand on a choisi une surface Σ, c'est-à-dire la solution ω de

$$(\mathrm{E}') \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v} = U V \cos \omega \sin \omega$$

puis la surface de Voss correspondante, autrement dit la solution de

$$(\mathrm{E}'') \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = U V \theta \cos 2\,\omega$$

on passe de Σ à une surface transformée Σ_1 de Bonnet-Lie, ce qui revient à passer des fonctions $c(u, v)$, $c'(u, v)$, $c''(u, v)$ vérifiant

$$(12)\qquad \begin{cases} c^2+c'^2+c''^2=1 \\ dc^2+dc'^2+dc''^2=U^2du^2+V^2dv^2-2\,UV\cos\omega\,du\,dv \end{cases}$$

et solutions chacune de (4), (conséquence de 12), où l'on a fait $t=1$, aux fonctions $c_1(u, v, t)$, $c'_1(u, v, t)$, $c''(u, v, t)$ qui satisfont aux équations

$$(13)\qquad \begin{cases} c_1^2+c_1'^2+c_1''^2=1 \\ dc_1^2+dc_1'^2+dc_1''^2=U^2t^2du^2+\dfrac{V^2}{t^2}dv^2-2\,UV\cos\omega\,du\,dv \end{cases}$$

les différentielles étant prises en y laissant t constant; c_1, c'_1, c''_1 sont chacune solution de (4), comme conséquence de (13). L'équation (E″) appartient au système (4), elle est indépendante de t, et est vérifiée par c, c', c'' puis c_1, c'_1, c''_1 et enfin par θ: il est clair que la surface de Voss $V(t)$ correspond à une nouvelle solution θ_1 de (E″); il faut trouver le moyen de calculer θ_1 en fonction de θ et t. Une remarque simple nous donne le degré d'indétermination de θ_1: faire subir aux axes un déplacement autour de l'origine ne change pas θ_1; leur faire subir une translation augmente θ_1 de la quantité $\lambda c_1+\mu c'_1+\nu c''_1$, où λ, μ, ν sont des constantes arbitraires: cette quantité est précisément l'intégrale générale du système complètement intégrable (4), donc θ_1 est intégrale d'un système complètement intégrable linéaire *non homogène* en θ_1, qui n'est autre que le système (4) avec un second membre dans chaque équation, fonction de θ seul, afin que θ_1 étant donné on puisse inversement calculer θ en fonction de θ_1; ce second membre ne peut donc qu'être le produit d'une puissance de t (ou d'une fraction rationnelle en t égale à 1 pour $t=1$) par l'expression déduite du premier membre en y faisant $t=1$ et remplaçant θ_1 par θ. Or, effectivement, calculons le ds^2 de la surface relative à t et θ_1 et identifions le avec le ds^2 de la surface $V(1)$ relative à θ. On a, d'après une marche connue de calcul, pour $V(t)$, avec des inconnues auxiliaires λ, μ, λ', μ'

$$(14)\qquad \begin{cases} c_1x+c'_1y+c''_1z=\theta_1 \\ \dfrac{\partial c_1}{\partial u}x+\dfrac{\partial c'_1}{\partial u}y+\dfrac{\partial c''_1}{\partial u}z=\dfrac{\partial \theta_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial c_1}{\partial v}x+\dfrac{\partial c'_1}{\partial v}y+\dfrac{\partial c''_1}{\partial v}z=\dfrac{\partial \theta_1}{\partial v} \end{cases}$$

$$
(15) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \lambda \dfrac{\partial c_1}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial c_1}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial u} = \lambda \dfrac{\partial c'_1}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial c'_1}{\partial v} \qquad \dfrac{\partial z}{\partial u} = \cdots \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = \lambda' \dfrac{\partial c_1}{\partial u} + \mu' \dfrac{\partial c_1}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} = \cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \end{cases}
$$

On aura donc

$$
(16) \quad \begin{cases} E = S\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \lambda^2 U^2 t^2 - 2\lambda\mu\, U V \cos 2\omega + \mu^2 \dfrac{V^2}{t^2} \\[2ex] F = S\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} = \lambda\lambda' U^2 t^2 - (\lambda\mu' + \mu\lambda')\, U V \cos 2\omega + \mu\mu' \dfrac{V^2}{t^2} \\[2ex] G = S\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \lambda'^2 U^2 t^2 - 2\lambda'\mu'\, U V \cos 2\omega + \mu'^2 \dfrac{V^2}{t^2}. \end{cases}
$$

Tout revient à calculer λ, μ.

Or des équations (14) on tire

$$
(17) \quad \begin{cases} Sx\dfrac{\partial^2 c_1}{\partial u^2} + S\dfrac{\partial c_1}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{\partial^2 \theta_1}{\partial u^2} \\[2ex] Sx\dfrac{\partial^2 c_1}{\partial u \partial v} + S\dfrac{\partial c_1}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \partial v} \end{cases}
$$

autrement dit

$$
(17') \quad \begin{cases} \lambda U^2 t^2 - \mu U V \cos 2\omega = \dfrac{\partial^2 \theta_1}{\partial u^2} - Sx\dfrac{\partial^2 c_1}{\partial u^2} \\[2ex] -\lambda U V \cos 2\omega + \mu \dfrac{V^2}{t^2} = \dfrac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \partial v} - Sx\dfrac{\partial^2 c_1}{\partial u \partial v}. \end{cases}
$$

Or le système (4) est de la forme

$$
(18) \quad \frac{\partial^2 c_1}{\partial u^2} = L c_1 + M\frac{\partial c_1}{\partial u} + N\frac{\partial c_1}{\partial v} \qquad \frac{\partial^2 c_1}{\partial u \partial v} = L' c_1 + M'\frac{\partial c_1}{\partial u} + N'\frac{\partial c_1}{\partial v}
$$

de sorte que

$$
(19) \quad Sx\frac{\partial^2 c_1}{\partial u^2} = L\theta_1 + M\frac{\partial \theta_1}{\partial u} + N\frac{\partial \theta_1}{\partial v} \qquad Sx\frac{\partial^2 c_1}{\partial u \partial v} = L'\theta_1 + M'\frac{\partial \theta_1}{\partial u} + N'\frac{\partial \theta_1}{\partial v}
$$

en d'autres termes les seconds membres de (17') se confondent *identiquement* avec les premiers membres correspondants de (4): mais alors

$$
(20)\qquad \begin{cases} \mu\dfrac{V^2}{t} - \lambda U V \cos 2\omega = 0 \\[2ex] E = \mu^2\dfrac{V^2}{t^2} - 2\lambda\mu\, U V \cos 2\omega + \lambda^2 U^2 t^2 = \left(\mu\dfrac{V}{t} - \lambda U t \cos 2\omega\right)^2 \\ \qquad\qquad + \lambda^2 U^2 t^2 \sin^2 2\omega \\[1ex] = \lambda^2 U^2 t^2 \sin^2 2\omega. \end{cases}
$$

Pour la même raison on aura

$$
(21)\qquad G = \mu'^2\frac{V^2}{t^2}\sin^2 2\omega
$$

car on doit permuter u, v, E, F, G, U, V, t avec v, u, G, F, E, V, U, $\frac{1}{t}\cdot$ D'autre part en résolvant (17'), on a, puisque le second membre de la seconde est nul

$$
(22)\qquad \lambda U^2 t^2 \sin^2 2\omega = \frac{\partial^2\theta_1}{\partial u^2} - \left[L\theta_1 + M\frac{\partial\theta_1}{\partial u} + N\frac{\partial\theta_1}{\partial v}\right]\cdot
$$

L'égalité des ds^2 des surfaces $V(t)$ et $V(1)$ se réduit à $(\lambda t)_{t=1} = \lambda t$, $\left(\frac{\mu'}{t}\right)_{t=1} = \frac{\mu'}{t}$, autrement dit, d'après (22), on aura le système complet

$$
(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{t}\left[\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial u^2} + U^2 t^2\theta_1 - \dfrac{\partial}{\partial u}\log(U\sin 2\omega)\cdot\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} - \dfrac{2t^2 U\dfrac{\partial\omega}{\partial u}}{V\sin 2\omega}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v}\right] \\[2ex] \qquad = \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + U^2\theta - \dfrac{\partial}{\partial u}\log(U\sin 2\omega)\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial u} - \dfrac{2U\dfrac{\partial\omega}{\partial u}}{V\sin 2\omega}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial u\,\partial v} - U V\theta_1\cos 2\omega = 0 \\[2ex] t\left[\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial v^2} + \dfrac{V^2}{t^2}\theta_1 - \dfrac{\partial}{\partial v}\log(V\sin 2\omega)\cdot\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} - \dfrac{2V\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}{t^2 U\sin 2\omega}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}\right] \\[2ex] \qquad = \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + V^2\theta - \dfrac{\partial}{\partial v}\log(V\sin 2\omega)\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial v} - \dfrac{2V\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}{U\sin 2\omega}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\cdot \end{cases}
$$

Le résultat est bien conforme aux prévisions; pour être tout à fait complet, on doit calculer F, ce qui, en conservant λ et μ' donne $F=\lambda\mu' U V \cos 2\omega \sin^2 2\omega$ et la formule définitive pour la surface de Voss

$$(24) \qquad ds^2 = \sin^2 2\omega \left[\lambda^2 U^2 t^2 du^2 + 2\lambda\mu' U V \cos 2\omega \, du \, dv + \mu'^2 \frac{V^2}{t^2} dv^2\right].$$

A remarquer que, si θ est combinaison linéaire de c, c', c'', la surface de Voss se réduit à un point. Finalement ce calcul fait ici nous apprend comment on peut déduire, par une équation de Riccati ou par l'intégration du système complet (23), de toute solution de

$$(\mathrm{E}'') \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \theta U V \cos 2\omega$$

une nouvelle intégrale θ_1, ω étant bien entendu solution de (E′)

$$(\mathrm{E}') \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = U V \sin \omega \cos \omega.$$

C'est une transformation que Guichard n'avait pas indiquée. La méthode de Guichard pour la détermination de la surface de Voss revient donc à intégrer (E′), puis (E″), ou du moins à choisir *une* intégrale de chacune. La méthode que j'indique ici revient à intégrer (E′), puis l'équation de Laplace

$$(\mathrm{E}''') \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + 2 \operatorname{cotg} 2\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{2}{\sin 2\omega \cos 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = 0$$

ce qui n'est pas plus compliqué au fond que (E″), puis à déterminer Y par une quadrature (je renvoie le lecteur à la seconde Note)

$$dY = \cos 2\omega \cdot \frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{1}{\cos 2\omega} \frac{\partial X}{\partial v} dv.$$

Or dans la méthode de Guichard, une fois E″ intégrée, il reste deux quadratures à effectuer pour avoir X et Y, arcs des géodésiques, indispensables à calculer pour obtenir les développantes G de V, dont je vais m'occuper. D'ailleurs, on a de part et d'autre, une équation de Riccati à intégrer pour mettre en place les diverses surfaces $V(t)$; le système (23) peut être intégré sans avoir déterminé c_1, c'_1, c''_1, mais son intégration complète entraîne la détermination de c_1, c'_1, c''_1.

Nous pouvons remarquer maintenant que si on considère l'équation

$$\text{(E')} \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = U V \sin \omega \cos \omega$$

une intégrale $\overline{\omega}$, *voisine* de ω, peut être développée sous la forme

$$\overline{\omega} = \omega + t\omega_1 + \frac{t^2}{2}\omega_2 + \cdots$$

et en égalant dans (E') les coefficients des mêmes puissances de t aux deux membres, on a précisément (E'')

$$\text{(E'')} \qquad \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial u \partial v} = U V \omega_1 \cos 2\omega.$$

Ceci explique pourquoi la déformation infiniment petite des surfaces Σ à courbure totale constante doit conduire aux surfaces de Voss: dans la théorie des 12 surfaces de Darboux, la surface V est celle qui correspond à Σ par plans tangents parallèles et le réseau (u, v), conjugué sur V, correspond aux asymptotiques de Σ; circulant donc sur une géodésique u constante de V et l'asymtotique correspondante de Σ, les plans tangents sont parallèles, donc aussi les caractéristiques, donc la tangente à la géodésique v constante au point où elle croise la géodésique u constante est parallèle à la tangente à l'asymptotique u constante au point où l'asymptotique v la rencontre; c'est ce qui explique pourquoi 2ω est, de part et d'autre, l'angle des lignes de coordonnées; d'autre part ce fait que Σ a une courbure constante explique pourquoi V admet une déformation continue sur ce réseau (u, v) comme base: voir Bianchi, Géométrie différentielle, tome 2, 3ème édition, chapitres 17 et 18 et en particulier les numéros 288, 293, 310.

D'autre part si nous réduisons U et V à l'unité dans (E') on remarque que la solution $\omega(u, v)$ est accompagnée des trois solutions $\omega(u+t, v)$; $\omega(u, v+t)$; $\omega\left[(1+t)u, \frac{v}{1+t}\right]$ quelle que soit la constante t. Cela entraîne donc que

$$\frac{\partial \omega}{\partial u}(u, v) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial v}(u, v) \qquad u\frac{\partial \omega}{\partial u} - v\frac{\partial \omega}{\partial v}$$

soient trois solutions particulières de (E'').

11. — *Résultats géométriques de Guichard.* Je rappelle les résultats les plus intéressants de Guichard (Annales de l'Ecole Normale, 1890). En un point $M(x, y, z)$ de la surface V de Voss, considérons la géodésique (v constante, u variable) et la tangente (α, β, γ) à cette courbe; la normale principale $(\alpha', \beta', \gamma')$ est normale à V; le point m $(x-X\alpha,\ y-X\beta,\ z-X\gamma)$, où X est l'arc déjà défini de la géodésique, décrit une surface G normale aux droites de la congruence des tangentes (α, β, γ); la ligne (u variable, v constant) est ligne de courbure de G et la tangente en m à cette courbe est parallèle à $(\alpha', \beta', \gamma')$; cette nouvelle tangente engendre une congruence et le second point focal m' engendre une surface G'; sur G les lignes de courbure sont v=constante et u=constante; il en est de même sur G'; G et G' sont dans cette situation *caractéristique* réciproque: focales d'une congruence, les arêtes de rebroussement étant lignes de courbure sur chaque surface (u constant sur G', v constant sur G); les normales à G le long de chaque courbe v constant engendrent une développable dont l'arête de robroussement engendre V; pour la surface G', le même résultat a lieu, *mais pour les courbes u constant:* donc m de G donne le point M de V et le point m' de G' donne le point M' d'une nouvelle surface V' correspondant à V par plans tangents parallèles, le réseau conjugué commun étant formé des géodésiques u ou v. Le plan tangent en m à G est perpendiculaire à (α, β, γ); or c'est le plan osculateur en m' à la courbe u constant, v variable, de G': cette courbe admet donc pour tangente $(\alpha', \beta', \gamma')$, pour binormale (α, β, γ), donc pour normale principale $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ qui est binormale en M de la courbe u variable, v constant de V; il y a donc dans l'ensemble parallélisme des trièdres de Serret-Frenet, en M de la courbe v constant, en m' de la courbe u constant, les arêtes parallèles jouant un rôle différent. Le plan osculateur en m à la courbe v constant de G est tangent en m' à G'; comme la vitesse de m est parallèle à $(\alpha', \beta', \gamma')$, le plan osculateur contient aussi le vecteur de composantes $\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha''}{T}$, $\frac{\beta}{R}+\frac{\beta''}{T}$, $\frac{\gamma}{R}+\frac{\gamma''}{T}$, de sorte que la binormale de la courbe a pour paramètres directeurs $R\alpha-T\alpha''$, $R\beta-T\beta''$, $R\gamma-T\gamma''$; cette droite fait donc avec (α, β, γ) un angle dont la tangente en valeur absolue est $\left|\frac{T}{R}\right|$; nous retrouvons un résultat signalé au paragraphe 5: les courbes u=constante sont parallèles sur V et V', de même les courbes v=constante; la normale de G est la tangente de la courbe v constant de V, la normale de G' est la tangente de la courbe u constant de V',

donc l'angle des plans focaux de mm' est bien l'angle 2ω et nous retrouvons l'interprétation géométrique de $\frac{T}{R}$ (naturellement le calcul seul peut fixer le signe). D'autre part si l'on remplace la surface G par une surface parallèle G_1, le point m est remplacé par m_1, la droite mm' par une droite parallèle $m_1 m'_1$; le nouveau point focal m'_1 décrit une surface G'_1 associée à G_1 comme G' à G; cette fois la surface G'_1 n'est pas parallèle à G et elle définit une surface V'_1 nouvelle parallèle toujours à V suivant le réseau des géodésiques *(parallèle au sens de Peterson)*. Nous voyons donc que la congruence des tangentes aux courbes $v=$constante de V nous fournit, par les différentiations (et une seule quadrature, l'arc X) ∞^1 nouvelles surfaces V', $V'_1, \ldots$ formant une chaîne continue: à cette chaîne correspond donc une transformation de l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \theta \cos 2\omega \tag{1}$$

permettant de déduire d'une intégrale connue, θ, ∞^1 nouvelles intégrales: Guichard a établi le résultat dans un article très court du même tome 1890 des Annales de l'Ecole Normale, p. 19—22; il y revient dans son mémoire sur les surfaces de Voss, p. 244 et suivantes. On pose

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = \theta \sin 2\omega \qquad \frac{\partial\xi}{\partial v} = 2\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v} \tag{2}$$

d'où ξ par une quadrature de différentielle totale, ω étant bien entendu solution de

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} = \sin\omega\cos\omega. \tag{3}$$

On a ensuite pour la nouvelle intégrale θ_1

$$2\theta_1 = -2\xi\frac{\partial\omega}{\partial v} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \theta. \tag{4}$$

Je cite ces résultats pour mémoire: on peut ensuite intervertir les rôles de u et v. Remarquons simplement que la droite Mmm_1 admet comme focale la surface V d'abord, puis une autre focale W lieu du second point focal μ; la droite $m'm'_1$, comme le montre Darboux, passe par le point μ; le plan $Mm\mu m'$ touche en μ la surface W dont μmM et $\mu m'$ sont deux tangentes conjuguées. La transformation de Guichard peut s'appliquer ensuite à chacune des surfaces V', $V'_1, \ldots$ pour en déduire d'autres surfaces V'', $V''_1 \ldots$ et ainsi de suite: on n'est arrêté que si une surface telle que G' devient une sphère, car la surface V' se réduit alors à un point: ceci a lieu si la fonction θ définissant V est égale à $k\frac{\partial \omega}{\partial v}$, où k est une constante: je renvoie au mémoire de Guichard.

Il y a une propriété intéressante à signaler: soit deux surfaces de Voss, correspondant par plans parallèles à une même surface Σ de courbure totale constante et soient θ, θ_1 les deux fonctions correspondantes intégrales de (E''); la combinaison linéaire à coefficients constants $A\theta + B\theta_1$ donne une nouvelle solution; les coordonnées du point courant de la surface de Voss correspondante sont $Ax+Bx_1$, $Ay+By_1$, $Az+Bz_1$: on a composé le vecteur (Ax, Ay, Az) et le vecteur (Bx_1, By_1, Bz_1) dont l'extrémité de chacun décrit une surface homothétique à l'une ou l'autre des primitives. Nous voyons que les surfaces obtenues ici par la méthode de Guichard peuvent en fournir d'autres par ce procédé.

On peut ensuite appliquer la méthode de Guichard en échangeant le rôle de u et v: remarquons d'ailleurs que si V' est déduite de V par les courbes v constante de V, inversement V est l'une des transformées de V' par les courbes u constante de V'.

Ceci nous donne une propriété intéressante des surfaces de Voss, obtenues directement dans ce travail, qui sont révolutives ou hélicoïdales. Supposons V de révolution; *l'ensemble* des surfaces G, $G_1, \ldots$ parallèles entre elles, décrites par les points m, $m_1, \ldots$ donnés plus haut, coïncide avec lui-même par rotation autour de l'axe de V; les surfaces G', $G'_1, \ldots$ aussi, donc les surface V', $V'_1, \ldots$ ou bien sont de révolution ou bien se déduisent l'une de l'autre par une révolution autour de l'axe de V; c'est ce dernier cas qui est réalisé, car les points M', $M'_1, \ldots$ correspondants au point M de V donnent la même direction de plan tangent que M et sont tous différents. De même une surface de Voss hélicoïdale conduit à de nouvelles surfaces non hélicoïdales.

12. — *Surfaces de Voss infiniment voisines d'une surface minima.* Nous avons vu que la transformation précédente se termine dans un sens quand la surface G' est une sphère. Il y a un autre cas où la méthode est en défaut: c'est le cas où la surface Σ est une sphère, puisque la surface V est alors minima et le réseau conjugué formé de lignes minima: la famille de surfaces parallèles G, $G_1, \ldots$ n'existe plus. Il y a intérêt à chercher directement les

surfaces de Voss voisines d'une surface minima donnée, mais non minima elles-mêmes. Nous allons rencontrer une équation aux dérivées partielles du second ordre, qui est presque du type de Laplace (équation de Laplace avec second membre), intégrable par quadratures.

Quand on suppose $E=G=0$, les équations IV et V du paragraphe 4 sont automatiquement satisfaites; l'équation VI, d'ordre 4 en F, admet pour intégrale générale

$$F=\frac{(1+UV)^2}{2}A(u)B(v) \tag{1}$$

où U et A sont fonctions arbitraires de u, V et B de v. On ne restreint rien en prenant simplement

$$E=0 \qquad G=0 \qquad F=f_0=\frac{(1+uv)^2}{2}A(u)B(v).$$

Nous écrivons donc pour la surface minima

$$\left\{\begin{array}{l}
x=\displaystyle\int\frac{1-u^2}{2}A(u)\,du+\int\frac{1-v^2}{2}B(v)\,dv \\
y=i\displaystyle\int\frac{1+u^2}{2}A(u)\,du-i\int\frac{1+v^2}{2}B(v)\,dv \\
z=\displaystyle\int u\,A(u)\,du+\int v\,B(v)\,dv \\
D=-i\dfrac{(1+uv)^2}{2}A^2B \qquad D'=0 \qquad D''=-i\dfrac{(1+uv)^2}{2}AB^2 \\
E=G=0 \qquad F=f_0=\dfrac{(1+uv)^2}{2}A(u)B(v) \qquad \Omega=-\dfrac{(1+uv)^4}{4}A^3B^3.
\end{array}\right. \tag{2}$$

Pour la surface de Voss infiniment voisine on écrira

$$\left\{\begin{array}{l}
E=\qquad e_1t+\dfrac{e_2}{2}t^2+\cdots+\dfrac{e_n}{n!}t^n+\cdots \\
G=\qquad g_1t+\dfrac{g_2}{2}t^2+\cdots+\dfrac{g_n}{n!}t^n+\cdots \\
F=f_0+f_1t+\dfrac{f_2}{2}t^2+\cdots+\dfrac{f_n}{n!}t^n+\cdots
\end{array}\right. \tag{3}$$

où t est une constante numérique; on égale à zéro le coefficient de t dans chaque équation IV, V, VI du paragraphe 4. On développe

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Omega=\Omega_0+t\Omega_1+\frac{t^2}{2}\Omega_1+\cdots\quad+\frac{t^n}{n!}\Omega_n+\cdots\\ &\frac{1}{EG-F^2}=\frac{-1}{f_0^2}\left[1-\frac{2f_1}{f_0}t+\cdots\right]\\ &\frac{\Omega}{EG-F^2}=AB+t\varphi_1+\frac{t^2}{2}\varphi_2+\cdots\end{aligned}\right.$$

Finalement

$$(5)\qquad \log\left(\frac{\Omega}{EG-F^2}\right)=\log AB+t\frac{\varphi_1}{AB}+\frac{t^2}{2}\left(\frac{\varphi_2}{AB}-\frac{\varphi_1^2}{A^2B^2}\right)+\cdots$$

$$(6)\qquad \begin{aligned}\varphi_1&\equiv\frac{-\Omega_1}{f_0^2}+\frac{2f_1}{f_0^3}\Omega_0\\ &\equiv\frac{\partial^2 f_1}{\partial u\,\partial v}-\left(\frac{2u}{1+uv}+\frac{B'}{B}\right)\frac{\partial f_1}{\partial u}-\left(\frac{2v}{1+uv}+\frac{A'}{A}\right)\frac{\partial f_1}{\partial v}\\ &\qquad+\left(\frac{2u}{1+uv}+\frac{B'}{B}\right)\left(\frac{2v}{1+uv}+\frac{A'}{A}\right)f_1\\ &-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 e_1}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 g_1}{\partial u^2}\right)+\left(\frac{v}{1+uv}+\frac{A'}{2A}\right)\frac{\partial g_1}{\partial u}+\left(\frac{u}{1+uv}+\frac{B'}{2B}\right)\frac{\partial e_1}{\partial v}.\end{aligned}$$

Le coefficient de t dans IV et V donne

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &-2e_1\frac{\partial f_0}{\partial u}+f_0\frac{\partial e_1}{\partial u}=0 &\qquad e_1=V_1f_0^2\\ &-2g_1\frac{\partial f_0}{\partial v}+f_0\frac{\partial g_1}{\partial v}=0 &\qquad g_1=U_1f_0^2\end{aligned}\right.$$

U_1 et V_1 étant fonctions arbitraires de u ou v seul. La fonction f_1 est intégrale de l'équation

$$(8)\qquad \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\varphi_1}{AB}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(U'_1\frac{f_0}{2}+U_1\frac{\partial f_0}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(V'_1\frac{f_0}{2}+V_1\frac{\partial f_0}{\partial v}\right).$$

Une double intégration ramène (8) à l'ordre 2: on écrira en effet

$$(9)\qquad A(u) \equiv a'''(u) \qquad B(v) \equiv b'''(v)$$

$$(10)\quad \begin{cases} \displaystyle\int f_0\, dv = \int \frac{(1+uv)^2}{2} a'''(u)\, b'''(v)\, dv \\ \displaystyle\qquad = a'''(u)\left[\frac{(1+uv)^2}{2} b''(v) - (1+uv)\, u b'(v) + u^2 b(v)\right] \\ \displaystyle\int \frac{\partial f_0}{\partial u} dv = \frac{\partial}{\partial u}\left[\int f_0\, dv\right] \end{cases}$$

avec formules analogues pour $\int f_0 du$, $\int \frac{\partial f_0}{\partial v} dv$. On remplace donc (8) par

$$(11)\quad \frac{\varphi_1}{AB} = \frac{U'_1}{2}\int f_0 dv + U_1 \int \frac{\partial f_0}{\partial u} dv + \frac{V'_1}{2}\int f_0 du + V_1 \int \frac{\partial f_0}{\partial v} du + \overline{U}_1 + \overline{V}_1.$$

Cette équation s'intègre par quadratures. D'une façon générale, on calcule e_n, g_n, f_n par un système intégrable par quadratures

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle -2 e_n \frac{\partial f_0}{\partial u} + f_0 \frac{\partial e_n}{\partial u} = E_n \\ \displaystyle -2 g_n \frac{\partial f_0}{\partial v} + f_0 \frac{\partial g_n}{\partial v} = G_n \\ \displaystyle \frac{\partial^2 f_n}{\partial u \partial v} - \left(\frac{2u}{1+uv} + \frac{B'}{B}\right)\frac{\partial f_n}{\partial u} - \left(\frac{2v}{1+uv} + \frac{A'}{A}\right)\frac{\partial f_n}{\partial v} \\ \displaystyle \qquad + \left(\frac{2u}{1+uv} + \frac{B'}{B}\right)\left(\frac{2v}{1+uv} + \frac{A'}{A}\right) f_n = AB\,[F_n + \overline{U}_n + \overline{V}_n] \end{cases}$$

où E_n, G_n ont été obtenues au moyen de la donnée f_0, puis des fonctions $e_1, f_1, g_1, \ldots e_{n-1}, f_{n-1}, g_{n-1}$ calculées de proche en proche: e_n et g_n s'obtiennent donc chacune par une quadrature; F_n a été obtenue par deux quadratures, une fois que e_n et g_n ont été calculées; $\overline{U}_n$ et $\overline{V}_n$ sont deux nouvelles fonctions arbitraires introduites dans ces deux quadratures. Ecrivons pour abréger la dernière équation (12) sous la forme

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial \theta}{\partial u} + b \frac{\partial \theta}{\partial v} + c\theta = \psi.$$

La méthode de Laplace fait écrire

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial v} + a\theta = \theta_1 \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + b\theta_1 = \dfrac{-2}{(1+uv)^2}\theta + \psi \end{cases}$$

d'où par élimination de θ l'équation

$$(15)\qquad \frac{\partial^2\theta_1}{\partial u\,\partial v} - \frac{B'}{B}\frac{\partial\theta_1}{\partial u} - \left(\frac{2v}{1+uv} + \frac{A'}{A}\right)\frac{\partial\theta_1}{\partial v} + \frac{B'}{B}\left(\frac{2v}{1+uv} + \frac{A'}{A}\right)\theta_1 = \frac{\partial\psi}{\partial v} - \psi\frac{B'}{B}\cdot$$

Cette équation, d'après Laplace encore, devient

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} - \dfrac{B'}{B}\theta_1 = \theta_2 \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u} - \left[\dfrac{\partial}{\partial u}\{\log\,(1+uv)^2 A\}\right]\theta_2 = \dfrac{\partial\psi}{\partial v} - \psi\dfrac{B'}{B}\cdot \end{cases}$$

La dernière équation (16) donne θ_2 par une seule quadrature; la première (16) par une nouvelle quadrature unique donne θ_1; la dernière (14) donne donc θ sans quadrature nouvelle. Conformément aux principes généraux, si on sait trouver une intégrale *particulière* de la dernière (12), ou de l'équation analogue où le second membre serait $AB[F_n + U'_n + V'_n]$, il suffira d'ajouter à cette intégrale particulière, l'intégrale générale de l'équation en question où le second membre serait $AB[\overline{U}_n - U'_n + \overline{V}_n - V'_n]$: or cette dernière, non seulement est intégrable par deux quadratures, mais peut être intégrée par des *expressions dont les signes de quadrature ont disparu.* J'écris donc l'équation en question

$$(17)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} - \left(\frac{2u}{1+uv} + \frac{B'}{B}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u} - \left(\frac{2v}{1+uv} + \frac{A'}{A}\right)\frac{\partial\theta}{\partial v}$$
$$+ \left(\frac{2u}{1+uv} + \frac{B'}{B}\right)\left(\frac{2v}{1+uv} + \frac{A'}{A}\right)\theta = AB(U+V).$$

Il suffit de faire la remarque très simple que les fonctions

$$(18)\qquad \begin{cases} E \equiv 0 \qquad G \equiv 0 \\[1ex] F \equiv \dfrac{1}{2}[1 + (u + tu_1 + \cdots)(v + tv_1 + \cdots)]^2\ \ (A + tA_1 + \cdots)(B + tB_1 + \cdots) \end{cases}$$

où $u_1, u_2, \ldots A_1, A_2, \ldots$ sont fonctions arbitraires de u seul et $v_1, v_2, \ldots B_1, B_2, \ldots$ arbitraires de v seul donnent l'intégrale générale des systèmes successifs (12) où tous les e_i, g_i sont nuls. L'équation

$$(19)\qquad \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left[\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}-\left(\frac{2u}{1+uv}+\frac{B'}{B}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}-\left(\frac{2v}{1+uv}+\frac{A'}{A}\right)\frac{\partial\theta}{\partial v}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{2u}{1+uv}+\frac{B'}{B}\right)\left(\frac{2v}{1+uv}+\frac{A'}{A}\right)\theta\right\}\right]=0$$

admet comme *intégrale générale*

$$(20)\qquad \theta=\frac{(1+uv)^2}{2}(AB_1+A_1B)+AB(1+uv)(uv_1+vu_1)$$

où A_1, u_1 sont arbitraires, fonctions de u seul, B_1 et v_1 de v seul. Si on substitue cette fonction θ dans le premier membre de (17), on trouve comme résultat de substitution

$$AB\left[\left(A_1+u'_1-u_1\frac{A'}{A}\right)\frac{1}{A}+\left(B_1+v'_1-v_1\frac{B'}{B}\right)\frac{1}{B}\right]$$

et il suffit d'égaler le crochet à $U+V$ pour obtenir l'intégrale générale de (17) sous la forme

$$(21)\qquad \theta=\frac{(1+uv)^2}{2}\left[AB(U+V)+B\left(u_1\frac{A'}{A}-u'_1\right)+A\left(v_1\frac{B'}{B}-v'_1\right)\right]$$
$$+AB(1+uv)(uv_1+vu_1)$$

avec deux fonctions seulement arbitraires u_1 et v_1.

13. — *Conclusion.* J'ai pu obtenir des surfaces de Voss explicitement; j'ai signalé l'intérêt qu'il y aurait à déterminer les surfaces à courbure totale constante invariantes dans leur ensemble par la transformation de Bonnet-Lie: leur détermination est ramenée à l'intégration de l'équation *différentielle du second ordre*

$$(1)\qquad 2y\frac{d^2y}{dx^2}(C+y)-(3y+2C)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4e^xy(C+y)^2=0$$

ou d'une équation un peu plus compliquée renfermant deux constantes C_1, C_2 (l'équation explicitée correspondant au cas $C_1=C_2$). Il serait intéressant d'intégrer effectivement cette équation (1).

D'autre part la méthode, devenue classique, de M. Bianchi, de transformation des surfaces Σ à courbure totale constante entraîne une transformation simultanée de la famille de surfaces de Voss correspondant à chaque surface Σ. Les propriétés de permutabilité et composition s'appliquent évidemment aux surfaces de Voss, avec cette particularité complémentaire qu'à *une* surface Σ, définie par *une* intégrale ω de

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega \cos \omega,$$

correspondent *toutes* les intégrales de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \theta \cos 2\,\omega_1$$

dépendant de deux fonctions arbitraires d'une variable; il y aurait donc lieu d'étudier la transformation d'une intégrale particulière θ, au cours des opérations de M. Bianchi.

D'autre part, de même que l'on a une classe intéressante de surfaces réglées en cherchant celles qui sont *doublement* réglées (quadriques), il y aurait lieu ici de chercher si certaines surfaces de Voss peuvent être *doublement* (ou même ∞^1 fois) surfaces de Voss: on songera d'ailleurs à la circonstance, un peu du même genre, offerte par les surfaces minima *doubles.*

Telles sont les indications que je me permets de proposer aux Géomètres. J'ai d'ailleurs démontré que l'hélicoïde minimum est ∞^1 fois surface de Voss.

Première note.

A la rédaction de cette étude, une remarque bien simple m'a échappé. Au paragraphe 8, formules (15), nous trouvons une surface de révolution *applicable sur l'hélicoïde minimum* (ou sur le caténoïde). En effet elle admet le ds^2

$$(1) \qquad ds^2 = dr^2 + dz^2 + r^2\, d\theta^2 = (\wp - e_1)\,[(\wp - e_3)\, dx^2 + (e_3 - e_1)\, d\theta^2].$$

Définissons la fonction X par les égalités

$$(2) \qquad \frac{\wp - e_1}{\mathrm{Ch}^2 X} = \frac{\wp - e_2}{\mathrm{Sh}^2 X} = e_2 - e_1 = \frac{\wp - e_3}{\mathrm{Ch}^2 X - \mu} = \frac{e_3 - e_1}{\mu}.$$

μ est une constante: les deux premiers rapports (2) entraînent les trois suivants par des combinaisons évidentes. Écrivons donc

$$(3) \qquad \wp - e_1 = (e_2 - e_1)\,\mathrm{Ch}^2 X \qquad \wp - e_2 = (e_2 - e_1)\,\mathrm{Sh}^2 X.$$

La différentiation donne

$$(4) \qquad \sqrt{(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)}\; dx = (e_2 - e_1)\,\mathrm{Ch}\,X\,\mathrm{Sh}\,X\,dX$$

et, en simplifiant,

$$(5) \qquad \sqrt{\wp - e_3}\; dx = dX.$$

Par suite, on a

$$(6) \qquad ds^2 = (e_2 - e_1)\,\mathrm{Ch}^2 X\,[dX^2 + dY^2]$$

ce qui démontre le résultat (on a remplacé $\theta\sqrt{e_3 - e_1}$ par Y; on a d'ailleurs aussi $X = \sqrt{\dfrac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}}\, z$).

Or j'ai été conduit à me poser la question suivante: on sait qu'un ds^2 de révolution

$$(7) \qquad ds^2 = U^2(du^2 + dv^2)$$

où U est une fontion donnée de u admet ∞^2 surfaces représentatives, hélicoïdales ou révolutives. On peut chercher s'il est possible d'extraire de ce système ∞^2 de surfaces un ensemble ∞^1 possédant un réseau conjugué commun à toutes les surfaces de cet ensemble: *si U est quelconque, on trouve uniquement la solution évidente correspondant à l'ensemble des surfaces révolutives* et au réseau des méridiens et parallèles. *En dehors de ce type relativement banal, il y a trois types de solutions, correspondant à un choix convenable de U:*

1°. $ds^2 = u^2(du^2 + dv^2)$, c'est-à-dire des hélicoïdes applicables sur la développée du caténoïde. Le ds^2 en jeu possède ∞^2 courbes géodésiques, considérées *in abstracto:* on peut les répartir en ∞^1 familles (λ), la famille (λ), où λ est une constante arbitraire, définie par l'équation

$$(8) \qquad \lambda^2\,du^2 - (u^2 - \lambda^2)\,dv^2 = 0$$

et à cette famille (λ) correspondent ∞^1 hélicoïdes admettant ce réseau géodésique pour réseau conjugué commun. Ici chaque hélicoïde (ou surface révolutive) représentatif du ds^2 possède un seul réseau de cette espèce et appartient à une seule famille.

2°. $ds^2 = \mathrm{Ch}^2 u\,(du^2 + dv^2)$; on a les hélicoïdes applicables sur le caténoïde ou l'hélicoïde minimum. Chaque famille de géodésiques

$$\lambda^2\, du^2 - (\mathrm{Ch}^2 u - \lambda^2)\, dv^2 = 0 \tag{9}$$

donne encore le réseau géodésique conjugué commun à ∞^1 surfaces hélicoïdales; l'hélicoïde minimum appartient à chaque famille, mais les autres surfaces appartiennent à une seule famille et sont surfaces de Voss une seule fois (le caténoïde, par exemple, donne les surfaces minima qui lui sont associées).

3°. On trouve ensuite ∞^3 types de ds^2, réductibles d'ailleurs par une homothétie à ∞^2 seulement; chaque type conduit à une famille particulière de ∞^1 hélicoïdes ayant en commun un réseau conjugué, formé encore de géodésiques.

Il résulte de l'étude directe ainsi faite que *tous* les hélicoïdes (ou surfaces de révolution) ainsi obtenus sont *surfaces de Voss*, circonstance qui n'était pas évidente à priori. Quand le ds^2 est rapporté au système géodésique conjugué, la forme de révolution se perd et l'on risque de ne pas reconnaître les surfaces bien simples des deux premières catégories. J'indique les ds^2 obtenus en rapportant aux géodésiques conjugées.

Pour le premier cas

$$ds^2 = \mathrm{Ch}^2 (u_1 + v_1)\, [\mathrm{Ch}^2 (u_1 + v_1)\,(du_1^2 + dv_1^2) + 2\,\{\mathrm{Ch}^2 (u_1 + v_1) - 2\}\, du_1\, dv_1]. \tag{10}$$

Pour le second cas, on a d'abord le ds^2 déjà donné plus haut

$$ds^2 = (\wp - e_1)^2\,(du_1^2 + dv_1^2) + 2(\wp - e_1)\,(\wp + e_1 - 2 e_3)\, du_1\, dv_1 \tag{11}$$

où $\wp$ est la fonction $\wp\ (u_1 + v_1 \,|\, e_1, e_2, e_3)$. A ce type il faut ajouter le ds^2 du caténoïde rapporté à ses lignes de longueur nulle, puis le ds^2 du caténoïde rapporté aux géodésiques *asymptotes* au cercle équatorial

$$ds^2 = \frac{\mathrm{Ch}^2 (u_1 + v_1)}{\mathrm{Sh}^4 (u_1 + v_1)}\, [\mathrm{Ch}^2 (u_1 + v_1)\,(du_1^2 + dv_1^2) - 2\,\{\mathrm{Ch}^2 (u_1 + v_1) - 2\}\, du_1\, dv_1]. \tag{12}$$

Pour le troisième cas, on a le ds^2

$$\begin{aligned} ds^2 = (\wp - e_1)^2 \left(C + \frac{D}{\wp - e_3}\right)^2 du_1^2 + (\wp - e_1)^2 \left(C - \frac{D}{\wp - e_3}\right)^2 dv_1^2 \\ + 2\,(\wp - e_1)\,(\wp + e_1 - 2\, e_3) \left(C^2 - \frac{D^2}{(\wp - e_3)^2}\right) du_1\, dv_1 \end{aligned} \tag{13}$$

où $\wp$ est toujours $\wp(u_1+v_1 | e_1, e_2, e_3)$, et C et D des constantes. A cette forme (13) il faudrait ajouter les formes dues à la dégénérescence de la fonction $\wp$.

Il est intéressant de signaler que tous les hélicoïdes de Voss peuvent s'obtenir, par la méthode du parallélisme de Peterson, à partir de l'hélicoïde minimum et de ses déformées hélicoïdales. On constate que par la méthode du paragraphe 8 et par cette dernière nous avons retrouvé les mêmes résultats.

Deuxième note.

J'ai dit plus haut, paragraphe 7, que la détermination des surfaces de Voss revient, d'abord, à l'intégration de

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} = U V \sin \omega \cos \omega \tag{1}$$

puis à l'intégration du système

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial v} &= \frac{\partial Y}{\partial v} \cos 2\omega \\ \frac{\partial Y}{\partial u} &= \frac{\partial X}{\partial u} \cos 2\omega . \end{aligned} \right. \tag{2}$$

L'élimination de Y conduit pour X à une équation de Laplace donnée au paragraphe 7. Mais il est plus élégant, en s'inspirant du mémoire déjà cité de Voss, puis d'un travail de M. A. Razzaboni (Memorie della R. Academia Delle Scienze dell' Istituto di Bologna, 4e Série, t. IX, 1888, p. 765—776), d'opérer ainsi: posons

$$X = M + N \qquad Y = M - N. \tag{3}$$

Le système (2) prend la forme canonique élégante

$$\frac{\partial N}{\partial u} = tg^2 \omega \frac{\partial M}{\partial u} \qquad \frac{\partial N}{\partial v} = - tg^2 \omega \frac{\partial M}{\partial v} \cdot \tag{4}$$

Si on pose, comme Darboux,

$$\mathfrak{F}(z) \equiv \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} \tag{5}$$

on sait que le système (4) peut être remplacé par l'une ou l'autre des équations de Moutard

$$\mathfrak{F}(M\,tg\,\omega) = \mathfrak{F}(tg\,\omega) \tag{6}$$

$$\mathfrak{F}\left(\frac{N}{tg\,\omega}\right) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{tg\,\omega}\right). \tag{6'}$$