ÜBER DIE BERECHNUNG DER KLASSENINVARIANTEN.

(Zur Säkularfeier von Abels Entdeckung der komplexen Multiplikation.)

VON

ROBERT FRICKE

in BRAUNSCHWEIG.

Die Entdeckung der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen durch ABEL wird gekrönt durch die merkwürdige Notiz, die er in einer 1828 erschienenen Abhandlung[1] über die Werte des Integralmoduls macht, falls komplexe Multiplikation möglich ist. Ohne Beweis spricht er den Satz aus, dass alle diese Werte durch Radikale ausdrückbar seien. Diese durch den Hellblick des Genies gewonnene Erkenntnis ist erst drei Jahrzehnte später durch die mit 1857 beginnenden Arbeiten KRONECKERS näher geklärt und fand erst nahehin sechs Jahrzehnte später in der bewundernswerten Theorie H. WEBERS[2] volle Aufklärung. Es handelt sich in der neueren Sprechweise um die Webersche Theorie der »Klassengleichung» und insbesondere ihre Zerfällung entsprechend den Geschlechtern der quadratischen Formen.

Weber hat seine Theorie im dritten Bande seines »Lehrbuches der Algebra» zur Prüfung und Erläuterung mit höchst ausgedehnten Untersuchungen einzelner Klassengleichungen versehen. Da hierbei der Zugang zur Klassengleichung über die »Invariantengleichung» verschlossen schien, hat Weber an Stelle der letzteren Gleichung seiner ursprünglichen Gewöhnung entsprechend die Transformationsgleichungen für Modulfunktionen höherer Stufen herangezogen. Als solche boten sich ihm dar die Jacobischen und die Schläflischen Modulargleichungen, auch die »Modulargleichungen in irrationaler Gestalt», endlich die von Galois

[1] »Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques.»

[2] »Zur Theorie der elliptischen Funktionen» I und II, Acta mathematica, Bd. 6 (1885) und Bd. 11 (1888).

entdeckten besonderen Resolventen fünften, siebenten und elften Grades bei den Transformationsgraden 5, 7 und 11.

Dieser Teil der Weberschen Theorie der Klassengleichung war einer wesentlichen Weiterentwicklung fähig, die ich während des letzten Jahres ausgeführt habe. Es galt, bei dem Gebrauch der Modulfunktionen erster Stufe (die der »Weierstrassschen» Theorie der elliptischen Funktionen entsprechen) nicht auf halbem Wege stehen zu bleiben und nach Erklärung der Klasseninvarianten im Anschluss an die Modulfunktion erster Stufe $j(\omega)$ hernach nicht doch wieder nach den Funktionen der älteren Theorie abzuspringen. Natürlich lag für Weber die Schwierigkeit darin, dass ihm die Denkweisen der Kleinschen Theorie der automorphen Funktionen doch nicht in dem Grade zur Gewöhnung geworden waren wie die ausschliesslicher analytischen Methoden der älteren Theorie.

Die Theorie der automorphen Funktionen hat bisher erst noch wenig Anwendung gefunden. Bei der Untersuchung und Berechnung der Klasseninvarianten lag ein besonders schönes Gebiet solcher Anwendungen verborgen, das sich ganz im Geiste der Kleinschen Methodik und Denkweise ausbauen liess. Die Methode zur Berechnung der Klasseninvarianten gewinnt hier ihre einfachste und einheitlichste Gestalt. Um sie darzulegen, behandele ich in den folgenden Zeilen nur einen einzigen Fall, nämlich den der Diskriminante $D = -168$.[1]

Bei dieser Diskriminante hat man vier Klassen ursprünglicher positiver quadratischer Formen:

$$(a, b, c) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

die repräsentierbar sind durch die reduzierten Formen:

$$(1, 0, 42), \quad (2, 0, 21), \quad (3, 0, 14), \quad (6, 0, 7).$$

Alle Klassen sind ambig, und jede bildet für sich ein Geschlecht. Zufolge der Weberschen Theorie hat also die zugehörige biquadratische Klassengleichung bereits im rationalen Körper, d. h. vor Adjunktion von $i\sqrt{42}$, eine Gruppe vierter Ordnung und ist nach Adjunktion von $\sqrt{6}$ und $\sqrt{14}$ vollständig lösbar. Die Aufgabe ist hier, die vier Klasseninvarianten der Diskriminante $D = -168$:

$$(1) \qquad j(i\sqrt{42}), \quad j\left(i\sqrt{\frac{21}{2}}\right), \quad j\left(i\sqrt{\frac{14}{3}}\right), \quad j\left(i\sqrt{\frac{7}{6}}\right)$$

[1] Andere Fälle in grösserer Zahl sind in dem demnächst erscheinenden dritten Bande meines »Lehrbuches der Algebra» behandelt.

als ganze Zahlen des reellen biquadratischen Körpers $(\mathfrak{R}, \sqrt{6}, \sqrt{14})$ darzustellen, womit dann zugleich die Klassengleichung selbst herstellbar ist.

Der begrifflich genommen nächste Weg zur Gewinnung der Klassengleichung, die die vier eben genannten Klasseninvarianten zu Wurzeln hat, ist bekanntlich der, dass man an die irreduzible algebraische Relation:

$$F\left(j\left(\frac{\omega}{42}\right), j(\omega)\right) = 0 \tag{2}$$

vom 96^{sten} Grade in jeder der beiden Grössen $j\left(\frac{\omega}{42}\right), j(\omega)$ anknüpft und in ihr $j\left(\frac{\omega}{42}\right) = j(\omega) = j$ setzt. Die entstehende Gleichung vom Grade 168 ist im rationalen Körper $\mathfrak{R}$ reduzibel; sie enthält die gesuchte Klassengleichung als einfachen Bestandteil, sowie mehrfach die Klassengleichungen der Diskriminanten $D = -167, -164, -159, -152, -143, \ldots$

Dieses Verfahren zur Gewinnung der Klassengleichungen ist nur bei den allerniedersten Diskriminanten $(D = -3, -4, -7, -8, -11, -12)$ anwendbar. Weber knüpfte demnach, wie schon angedeutet, seine Untersuchungen an die verschiedenartigen Modulargleichungen höherer Stufen (an Stelle der Gleichung (2)) an, die in zahlreichen Fällen bekannt waren. Hierdurch verlor die Theorie an Einfachheit und Einheitlichkeit. Es dürfte demnach der richtigere Weg sein, an dem algebraischen Gebilde festzuhalten, das durch die Modulargleichung »erster» Stufe (2) erklärt ist, aber an Stelle der 96-wertigen Funktionen $j(\omega)$ und $j\left(\frac{\omega}{42}\right)$, also sehr hochwertiger Funktionen, mit den Funktionen niederster Wertigkeit des fraglichen algebraischen Gebildes zu arbeiten. Diese letzteren zu gewinnen, ist man aber nur im Stande, wenn man über die Grundlagen der Theorie der automorphen Funktionen im vollen Umfange verfügt.[1]

Die gruppentheoretische Grundlage der Gleichung (2) ist bekanntlich die Gruppe aller unimodularen Substitutionen:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + 42\beta}{\gamma\omega + \delta}, \qquad \alpha\delta - 42\beta\gamma = 1$$

[1] Mit »E. F.» unter Angabe von Band- und Seitenzahl wird weiterhin mein Buch »Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen» (Leipzig, 1916 und 1922) zitiert. Die Abkürzung »DB» heisst »Diskontinuitätsbereich».

mit ganzen (rationalen) Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Diese Gruppe heisst die »Transformationsgruppe» des Grades 42 und wird mit $\mathfrak{G}_T$ bezeichnet. Sie ist innerhalb der Modulgruppe ein (nicht normaler) Teiler des Index 96. Ihr in der ω-Halbebene gezeichneter »DB» besteht aus 96 Dreieckspaaren der bekannten Dreiecksteilung und liefert das zugehörige »Transformationspolygon», dem nach einer bekannten Formel (vergl. »E. F.» II, 356) das Geschlecht $p = 5$ zukommt. Dieses Polygon liefert also über der j-Ebene eine Riemannsche Fläche des Geschlechtes $p = 5$. Es kommen demnach sicher vierwertige Funktionen auf dieser Fläche vor, während auf ihr die Funktionen $j(\omega)$ und $j\left(\frac{\omega}{42}\right)$ die hohe Wertigkeit 96 haben.

Bekannt ist ferner, dass das Transformationspolygon durch die symbolisch mit W zu bezeichnende Substitution:

$$(W) \qquad \omega' = \frac{-42}{\omega}$$

in sich transformiert wird. Demgemäss wird $\mathfrak{G}_T$ durch Zusatz von W zu einer mit $\mathfrak{G}_K$ zu bezeichnenden Gruppe:

$$\mathfrak{G}_K = \mathfrak{G}_T + W . \mathfrak{G}_T$$

erweitert, in der $\mathfrak{G}_T$ ein Normalteiler des Index 2 ist. $\mathfrak{G}_K$ heisst die »Klassengruppe», und zwar in unserem Falle diejenige der Diskriminante $D = -4 . 42 = -168$. Ihr »DB» (vergl. »E. F.» II, 357 ff.) heisst »Klassenpolygon»; sein Geschlecht ist $p = 2$. Die Beziehung zur arithmetischen Theorie der ganzzahligen binären quadratischen Formen ist bekannt (vergl. »E. F.» II, 363): Das Transformationspolygon ist, wie man sagen kann, eine zweiblättrige Riemannsche Fläche über dem Klassenpolygon, die der oben festgestellten Klassenanzahl 4 entsprechend vier Verzweigungspunkte besitzt; auch liefern die betreffenden Stellen ω im Sinne von Kronecker die »singulären Moduln» für die vier Klassen der Diskriminante $D = -168$, wie unten weiter ausgeführt wird.

Auch die Klassengruppe $\mathfrak{G}_K$ ist noch der Erweiterung fähig.[1] Die umfassendste eigentlich diskontinuierliche Gruppe, zu der man die Gruppe $\mathfrak{G}_T$ erweitern kann[2], setzt sich aus den gesamten Substitutionen:

[1] Nach einer mir persönlich zugekommenen Mitteilung hat diese Erweiterungsfähigkeit der Klassengruppe in allen Fällen zusammengesetzter Transformationsgrade zuerst E. Bessel-Hagen erkannt und in seiner Göttinger Habilitationsschrift behandelt.

[2] Freilich tritt noch eine fernere gleich zu besprechende Erweiterung auf, falls man auch »Substitutionen zweiter Art» zulässt.

$$(3) \qquad \omega' = \frac{t\alpha\omega + 42\beta}{\gamma\omega + t\delta}, \quad \alpha\delta t^2 - 42\beta\gamma = t$$

mit ganzzahligen α, β, γ, δ zusammen, wo t der Reihe nach alle acht Teiler 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 des Grades 42 durchläuft. Bezeichnet man die Substitution (3) mit S_t, so gilt, wie man leicht beweist, für die Zusammensetzung der Substitutionen (3) folgende Regel: *Zwei Substitutionen S_t und $S_{t'}$ liefern, nach einander ausgeübt, eine Substitution:*

$$(4) \qquad S_t \,.\, S'_{t'} = S''_{t''}, \quad t'' = \frac{t\,.\,t'}{\tau^2},$$

wo τ der grösste gemeinsame Teiler von t und t' ist.

Auf Grund dieser Regel gewinnt man eine grosse Anzahl von Gruppen, die alle die aus den Substitutionen S_1 allein bestehende Transformationsgruppe $\mathfrak{G}_T$ als Normalteiler in sich enthalten. Zunächst haben wir sieben Gruppen $\mathfrak{G}_{1,t}$, deren einzelne aus den Substitutionen S_1 und S_t mit $t > 1$ besteht; dabei ist $\mathfrak{G}_{1,42}$ die Klassengruppe $\mathfrak{G}_K$. Dazu treten sieben Gruppen, die in sofort verständlicher Weise durch:

$$\mathfrak{G}_{1,2,3,6}, \ \mathfrak{G}_{1,2,7,14}, \ \mathfrak{G}_{1,2,21,42}, \ \mathfrak{G}_{1,3,7,21}, \ \mathfrak{G}_{1,3,14,42}, \ \mathfrak{G}_{1,6,7,42}, \ \mathfrak{G}_{1,6,14,21}$$

bezeichnet werden. In der einzelnen liefert der Normalteiler $\mathfrak{G}_T$ eine komplementäre Gruppe oder Quotientengruppe der Ordnung vier vom Vierertypus. Endlich folgt als aus allen Substitutionen S_t der acht Typen bestehend die weiterhin mit $\mathfrak{G}$ bezeichnete umfassendste Gruppe. In ihr ist $\mathfrak{G}_T$ ein Normalteiler des Index 8, und die zugehörige komplementäre Gruppe ist eine Abelsche Gruppe der Ordnung 8, die ausser dem Einheitselement nur Elemente der Periode 2 enthält.

Lässt man auch sogenannte Substitutionen »zweiter Art» zu, die indirekte Kreisverwandschaften und also konforme Abbildungen mit Umlegung der Winkel liefern, so sind alle genannten Gruppen nochmals einer Erweiterung fähig. Jede dieser Gruppen wird nämlich durch die Spiegelung an der imaginären ω-Achse in sich transformiert. Diese weiterhin mit $\bar{S}$ bezeichnete Spiegelung führt ω in:

$$(\bar{S}) \qquad \omega' = -\bar{\omega}$$

über, wo $\bar{\omega}$ der zu ω konjugiert komplexe Wert ist; die einzelne Substitution (3) wird durch $\bar{S}$ in:

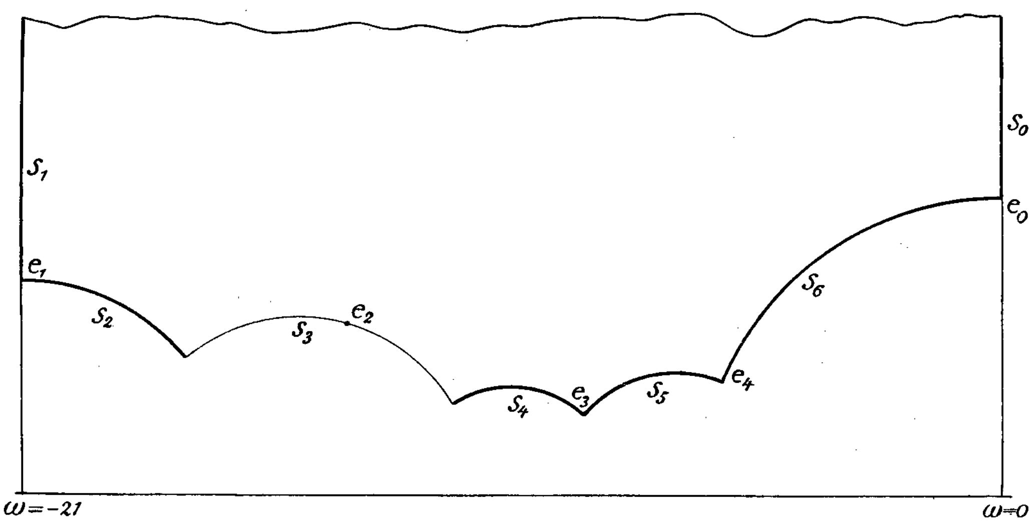
$$\omega' = \frac{t\alpha\omega - 42\beta}{-\gamma\omega + t\delta}$$

transformiert. Für die so zu gewinnenden erweiterten Gruppen benutzen wir die Bezeichnungen:

$$\overline{\mathfrak{G}}_T = \mathfrak{G}_T + \bar{S}\,.\,\mathfrak{G}_T,\ \ldots,\ \ \overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} + \bar{S}\,.\,\mathfrak{G}$$

und nennen sie die zu $\mathfrak{G}_T, \ldots, \mathfrak{G}$ gehörenden »Gruppen zweiter Art». Ihnen gegenüber heissen dann die ursprünglichen $\mathfrak{G}_T, \ldots, \mathfrak{G}$ »Gruppen der ersten Art».

Das wesentlichste Fundament der weiteren Untersuchung wird nun vom »DB» der umfassendsten Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ in der ω-Halbebene geliefert. Dieser »DB» ist bei einiger Übung nicht schwer aufzufinden. Er ist in der nebenstehenden Figur dargestellt und hat die Gestalt eines Kreisbogensiebenecks mit sechs rech-



ten Winkeln und einem Winkel o; als Kreisbogen-Polygon soll dieser »DB» kurz P genannt werden. Unter den sieben Seiten sind zunächst die mit s_0 und s_1 bezeichneten Gerade, die sich im unendlich fernen Punkte der imaginären ω-Achse (wir sagen bei $\omega = i\infty$) unter dem Winkel o erreichen; sie sind die Symmetrielinien der beiden in $\overline{\mathfrak{G}}$ enthaltenen Spiegelungen $\omega' = -\bar{\omega}$ und $\omega' = -\bar{\omega} - 42$. Die fünf unteren Seiten sind Segmente von Kreisen, die orthogonal zur reellen ω-Achse laufen. Die vier Kreise s_2, s_4, s_5, s_6 sind gleichfalls Symmetriekreise von Spiegelungen der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$. Schreiben wir unter Trennung des reellen und des imaginären Bestandteils $\omega = \xi + i\eta$, so sind die Gleichungen der Kreise und ihre Spiegelungen gegeben durch:

$$(s_2) \qquad \xi^2+\eta^2+42\xi+10.42=0, \qquad \omega' = \frac{21\bar{\omega}+10.42}{-\bar{\omega}-21}, \qquad (\bar{S}_{21}),$$

$$(s_4) \qquad \xi^2+\eta^2+21\xi+5.21=0, \qquad \omega' = \frac{21\bar{\omega}+5.42}{-2\bar{\omega}-21}, \qquad (\bar{S}'_{21})$$

$$(s_5) \qquad \xi^2+\eta^2+14\xi+42=0, \qquad \omega' = \frac{7\bar{\omega}+42}{-\bar{\omega}-7}, \qquad (\bar{S}_7),$$

$$(s_6) \qquad \xi^2+\eta^2-42=0, \qquad \omega' = \frac{42}{\bar{\omega}}, \qquad (\bar{S}_{42})$$

Diese Spiegelungen werden weiterhin $\bar{S}_{21}$, $\bar{S}'_{21}$, $\bar{S}_7$, $\bar{S}_{42}$ genannt. Die etwas schwächer ausgezogene Seite s_3 verbindet die beiden auf s_2 und s_4 gelegenen Punkte:

$$\omega = \frac{-35+i\sqrt{35}}{2}, \qquad \omega = \frac{-35+i\sqrt{35}}{3}$$

und hat die Gleichung:

$$\xi^2+\eta^2+30\xi+5.42=0.$$

Der auf s_3 gelegene Punkt e_2 ist Fixpunkt einer in $\mathfrak{G}$ enthaltenen elliptischen Substitution der Periode zwei, die die beiden durch e_2 abgetrennten Segmente von s_3 in einander überführt. Der Punkt e_2 und die Substitution sind gegeben durch:

$$(e_2) \qquad \omega = -14+i\sqrt{14}, \qquad \omega' = \frac{14\omega+5.42}{-\omega-14} \qquad (S_{14});$$

die Substitution wird weiterhin S_{14} genannt. Die Eckpunkte e_0, e_1, e_3, e_4 sind gleichfalls Fixpunkte elliptischer Substitutionen der Periode zwei; die Lage der Eckpunkte und die Substitutionen sind gegeben durch:

$$(e_0) \qquad \omega = i\sqrt{42}, \qquad \omega' = \frac{-42}{\omega}, \qquad (S_{42}),$$

$$(e_1) \qquad \omega = -21+i\sqrt{21}, \qquad \omega' = \frac{21\omega+11.42}{-\omega-21}, \qquad (S_{21}),$$

$$(e_3) \qquad \omega = -9+i\sqrt{3}, \qquad \omega' = \frac{9\omega+2.42}{-\omega-9}, \qquad (S_3),$$

$$(e_4) \qquad \omega = -6+i\sqrt{6}, \qquad \omega' = \frac{6\omega+42}{-\omega-6}, \qquad (S_6).$$

Dass P den »DB» der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ liefert, ist leicht zu zeigen. Zunächst befriedigt P alle Bedingungen, die die Theorie der automorphen Funktionen für den »DB» einer Gruppe zweiter Art fordert. Die durch P erklärte Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}'$ ist jedenfalls ein Teiler von $\overline{\mathfrak{G}}$. Wäre $\overline{\mathfrak{G}}'$ ein »echter» Teiler von $\overline{\mathfrak{G}}$, etwa vom Index $\nu (> 1)$, so würde sich P aus ν Bereichen »DB» von $\overline{\mathfrak{G}}$ aufbauen lassen. Einen dieser ν »DB» von $\overline{\mathfrak{G}}$ würden wir durch ν Substitutionen von $\overline{\mathfrak{G}}$ (unter ihnen die identische) in alle ν Bereiche überführen. Die Spitze $i\infty$ müsste dabei durch alle ν Substitutionen in sich übergehen, da sie mit keinem anderen Punkte von P äquivalent sein kann. Also haben alle ν Substitutionen $\gamma = 0$, mithin $t = 1$, $\alpha = \delta = 1$; alle diese Substitutionen sind aber schon in $\overline{\mathfrak{G}}'$ enthalten. Durch ähnliche Betrachtungen zeigt man, dass eine nochmalige Erweiterung von $\overline{\mathfrak{G}}$ zu einer noch umfassenderen »eigentlich diskontinuierlichen» Gruppe unmöglich ist.

Zu einem »DB» der Gruppe erster Art $\mathfrak{G}$ gelangt man dadurch, dass man dem Polygon P sein Spiegelbild $\bar{P}$ längs der imaginären ω-Achse anfügt. Die offenen Seiten von $\bar{P}$ mögen den $s_1, s_2, \ldots, s_6$ entsprechend $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_6$ heissen. Dann sind auch die beiden Segmente der Seite s_3 einander zugewiesen, nämlich durch die Substitution:

$$\omega' = \frac{14\omega - 5 \cdot 42}{\omega - 14}.$$

Im übrigen aber sind die Seiten s_1, s_2, s_4, s_5, s_6 auf ihre bezüglich der imaginären ω-Achse symmetrischen Seiten $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_4, \bar{s}_5, \bar{s}_6$ bezogen. Hierbei wird die wichtige Tatsache ersichtlich, *dass die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *bezw. ihr* »DB» *das Geschlecht* $p = 0$ *besitzt.* Dieser Gruppe gehört also eine einwertige Funktion zu, die wir unten zu bilden haben werden.

Die »DB» der sieben Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{1,2,3,6}, \overline{\mathfrak{G}}_{1,2,7,14}, \ldots$ werden gewonnen, indem man dem Polygone P jedesmal in richtiger Weise einen bezüglich $\overline{\mathfrak{G}}$ äquivalenten Bereich P' anhängt und die Randkurven, soweit sie nicht Symmetriekreise der betreffenden Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{1,2,3,6}, \ldots$ sind, dieser Gruppe entsprechend einander zuordnet. Diese Untersuchung hat keinerlei Schwierigkeit, braucht aber wegen der weiteren Schlüsse nicht ausführlich dargelegt zu werden. Von Wichtigkeit ist jedoch, sich anzumerken, dass der »DB» der einzelnen der sieben Gruppen erster Art $\mathfrak{G}_{1,2,3,6}, \ldots$ neben der Spitze bei $\omega = i\infty$ nur noch mit einer einzigen Spitze an die reelle ω-Achse heranreicht. Ausserdem freilich müssen wir die Geschlechter dieser sieben Gruppen kennen. Nun ist der »DB» von $\mathfrak{G}$ vom Geschlechte 0, und der »DB» der einzelnen der sieben Gruppen überlagert[1] den von $\mathfrak{G}$ zweiblättrig mit Verzweigungspunkten, die nur von den sechs Stellen $e_1, e_2, \bar{e}_2, e_3, e_4, e_5$ herrühren können[2]. An der einzelnen Stelle liegt aber dann und nur dann ein Verzweigungspunkt, wenn die zugehörige elliptische Substitution der Periode 2 in der betreffenden Gruppe $\mathfrak{G}_{1,2,3,6}, \ldots$ nicht enthalten ist. Diese Substitutionen sind oben alle angegeben. Man stellt daraufhin das Geschlecht $p=0$ bei $\mathfrak{G}_{1,3,14,42}$ und $\mathfrak{G}_{1,6,14,21}$ fest, während die fünf übrigen Gruppen das Geschlecht $p=1$ haben. Über dem »DB» von $\mathfrak{G}_{1,3,14,42}$ lagert derjenige von $\mathfrak{G}_{1,42}=\mathfrak{G}_K$ zweiblättrig mit sechs Verzweigungspunkten, so dass wir tatsächlich zu $p=2$ kommen. Endlich lagert über dem »DB» des Geschlechtes 2 von $\mathfrak{G}_K$ derjenige von $\mathfrak{G}_T$ zweiblättrig mit vier Verzweigungspunkten, so dass man, wie es sein muss, zu $p=5$ geführt wird. Von Interesse ist hierbei namentlich die Lage der zuletzt genannten vier Verzweigungspunkte, weil sie, wie oben bemerkt, die »singulären Moduln» für die vier Formklassen der Diskriminante $D=-168$ liefern. Es handelt sich um die vier mit $\omega = i\sqrt{42}$ bezüglich $\mathfrak{G}$ äquivalenten Punkte am Rande des »DB» von $\mathfrak{G}_K$:

$$\omega = i\sqrt{42}, \qquad \omega = S_{14}(i\sqrt{42}) = \frac{-6.42 + i\sqrt{42}}{17},$$

$$\omega = \bar{S}_{21}(i\sqrt{42}) = \frac{-11.42 + i\sqrt{42}}{23}, \quad \omega = \bar{S}_{21}.S_{14}(i\sqrt{42}) = \frac{-13.42 + i\sqrt{42}}{31}.$$

Diese vier Punkte liefern als repräsentierende Formen der vier Klassen der Diskriminante $D=-168$:

$$(1, 0, 42), \; (17, 12.42, 89.42), \; (23, 22.42, 221.42), \; (31, 26.42, 229.42).$$

Die drei letzten, nicht-reduzierten Formen sind bezw. mit den reduzierten Formen $(3, 0, 14)$, $(2, 0, 21)$, $(6, 0, 7)$ äquivalent.

Die bisher mit S_{21}, S_{14}, S_3, S_6 und S_{42} bezeichneten Substitutionen sollen fortan der Kürze halber S, T, U, V und W genannt werden; für S_{42} wurde diese Bezeichnung schon oben gebraucht. Man spalte weiter ω in den Quotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ zweier Variablen ω_1, ω_2 und schreibe die Substitutionen S, T, U, V und W homogen von der Periode 2 so:

---

[1] Man fasse in bekannter Weise die »DB» als geschlossene Riemannsche Flächen auf.

[2] $\bar{e}_2$ ist der zu e_2 bezüglich der imaginären Achse symmetrische Punkt.

$$
\begin{array}{lll}
(S) & i\sqrt{21}\,\omega'_1 = 21\,\omega_1 + 11 \,.\, 42\,\omega_2, & i\sqrt{21}\,\omega'_2 = -\,\omega_1 - 21\,\omega_2, \\
(T) & i\sqrt{14}\,\omega'_1 = 14\,\omega_1 + 5 \,.\, 42\,\omega_2, & i\sqrt{14}\,\omega'_2 = -\,\omega_1 - 14\,\omega_2, \\
(U) & i\sqrt{3}\;\;\omega'_1 = 9\,\omega_1 + 2 \,.\, 42\,\omega_2, & i\sqrt{3}\;\;\omega'_2 = -\,\omega_1 - 9\,\omega_2, \\
(V) & i\sqrt{6}\;\;\omega'_1 = 6\,\omega_1 + 42\,\omega_2, & i\sqrt{6}\;\;\omega'_2 = -\,\omega_1 - 6\,\omega_2, \\
(W) & i\sqrt{42}\,\omega'_1 = 42\,\omega_2, & i\sqrt{42}\,\omega'_2 = -\,\omega_1 .
\end{array}
$$

Zur Herstellung von Funktionen der erklärten Gruppen knüpfen wir an die bekannte ganze Modulform erster Stufe $(-12)^{\text{ter}}$ Dimension:

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} q^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{24}, \qquad q = e^{\pi i \omega},$$

die im »DB« der Modulgruppe nirgends unendlich wird und nur einen Nullpunkt erster Ordnung hat, nämlich in der Spitze $\omega = i\infty$ des »DB«. Setzen wir:

$$\Delta_t = \Delta_t(\omega_1, \omega_2) = \Delta\left(\frac{\omega_1}{t}, \omega_2\right), \quad t = 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42,$$

so gewinnen wir zunächst für die Transformationsgruppe $\mathfrak{G}_T$ die acht ganzen Modulformen $\Delta_1 = \Delta, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_6, \Delta_7, \Delta_{14}, \Delta_{21}, \Delta_{42}$. Die Wirkung der homogenen Substitutionen $S, T, U, \ldots$ auf diese Modulformen stellt man leicht durch Rechnung fest. Die Ergebnisse der Rechnung gehen aus folgender Tabelle hervor:

	S	T	U	V	W	$i\infty$
Δ_1	$21^{-6} . \Delta_{21}$	$14^{-6} . \Delta_{14}$	$3^{-6} . \Delta_3$	$6^{-6} . \Delta_6$	$42^{-6} . \Delta_{42}$	42
Δ_2	$21^{-6} . \Delta_{42}$	$2^6 . 7^{-6} . \Delta_7$	$3^{-6} . \Delta_6$	$2^6 . 3^{-6} . \Delta_3$	$2^6 . 21^{-6} . \Delta_{21}$	21
Δ_3	$3^6 . 7^{-6} . \Delta_7$	$14^{-6} . \Delta_{42}$	$3^6 . \Delta_1$	$2^{-6} . 3^6 . \Delta_2$	$3^6 . 14^{-6} . \Delta_{14}$	14
Δ_6	$3^6 . 7^{-6} . \Delta_{14}$	$2^6 . 7^{-6} . \Delta_{21}$	$3^6 . \Delta_2$	$6^6 . \Delta_1$	$6^6 . 7^{-6} . \Delta_7$	7
Δ_7	$3^{-6} . 7^6 . \Delta_3$	$2^{-6} . 7^6 . \Delta_2$	$3^{-6} . \Delta_{21}$	$6^{-6} . \Delta_{42}$	$6^{-6} . 7^6 . \Delta_6$	6
Δ_{14}	$3^{-6} . 7^6 . \Delta_6$	$14^6 . \Delta_1$	$3^{-6} . \Delta_{42}$	$2^6 . 3^{-6} . \Delta_{21}$	$3^{-6} . 14^6 . \Delta_3$	3
Δ_{21}	$21^6 . \Delta_1$	$2^{-6} . 7^6 . \Delta_6$	$3^6 . \Delta_7$	$2^{-6} . 3^6 . \Delta_{14}$	$2^{-6} . 21^6 . \Delta_2$	2
Δ_{42}	$21^6 . \Delta_2$	$14^6 . \Delta_3$	$3^6 . \Delta_{14}$	$6^6 . \Delta_7$	$42^6 . \Delta_1$	1

In der letzten Spalte sind die Ordnungen der Nullpunkte der Formen $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ in der Spitze $\omega = i\infty$ des »DB» der Transformationsgruppe $\mathfrak{G}_T$ hinzugefügt. Durch Zusammensetzung zweier Substitutionen ergiebt sich aus vorstehender Tabelle weiter folgendes Verhalten der Δ_t:

	$S.W,\ U.V$	$S.U,\ V.W$
Δ_1	$2^{-6}.\Delta_2$	$7^{-6}.\Delta_7$
Δ_2	$2^{6}.\Delta_1$	$7^{-6}.\Delta_{14}$
Δ_3	$2^{-6}.\Delta_6$	$7^{-6}.\Delta_{21}$
Δ_6	$2^{6}.\Delta_3$	$7^{-6}.\Delta_{42}$
Δ_7	$2^{-6}.\Delta_{14}$	$7^{6}.\Delta_1$
Δ_{14}	$2^{6}.\Delta_7$	$7^{6}.\Delta_2$
Δ_{21}	$2^{-6}.\Delta_{42}$	$7^{6}.\Delta_3$
Δ_{42}	$2^{6}.\Delta_{21}$	$7^{6}.\Delta_6$

Für die sieben Gruppen $\mathfrak{G}_{1,t}$ finden wir je vier Modulformen:

$$
\begin{array}{lllll}
\mathfrak{G}_{1,2}, & \Delta_1.\Delta_2, & \Delta_3.\Delta_6, & \Delta_7.\Delta_{14}, & \Delta_{21}.\Delta_{42}, \\
\mathfrak{G}_{1,3}, & \Delta_1.\Delta_3, & \Delta_2.\Delta_6, & \Delta_7.\Delta_{21}, & \Delta_{14}.\Delta_{42}, \\
\mathfrak{G}_{1,6}, & \Delta_1.\Delta_6, & \Delta_2.\Delta_3, & \Delta_7.\Delta_{42}, & \Delta_{14}.\Delta_{21}, \\
\mathfrak{G}_{1,7}, & \Delta_1.\Delta_7, & \Delta_2.\Delta_{14}, & \Delta_3.\Delta_{21}, & \Delta_6.\Delta_{42}, \\
\mathfrak{G}_{1,14}, & \Delta_1.\Delta_{14}, & \Delta_2.\Delta_7, & \Delta_3.\Delta_{42}, & \Delta_6.\Delta_{21}, \\
\mathfrak{G}_{1,21}, & \Delta_1.\Delta_{21}, & \Delta_2.\Delta_{42}, & \Delta_3.\Delta_7, & \Delta_6.\Delta_{14}, \\
\mathfrak{G}_{1,42}, & \Delta_1.\Delta_{42}, & \Delta_2.\Delta_{21}, & \Delta_3.\Delta_{14}, & \Delta_6.\Delta_7,
\end{array}
$$

und ebenso für die sieben Gruppen $\mathfrak{G}_{1,2,3,6}, \ldots$ je zwei Modulformen:

$\mathfrak{G}_{1,2,3,6}$,	$\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_6$,	$\Delta_7\Delta_{14}\Delta_{21}\Delta_{42}$,
$\mathfrak{G}_{1,2,7,14}$,	$\Delta_1\Delta_2\Delta_7\Delta_{14}$,	$\Delta_3\Delta_6\Delta_{21}\Delta_{42}$,
$\mathfrak{G}_{1,2,21,42}$,	$\Delta_1\Delta_2\Delta_{21}\Delta_{42}$,	$\Delta_3\Delta_6\Delta_7\Delta_{14}$,
$\mathfrak{G}_{1,3,7,21}$,	$\Delta_1\Delta_3\Delta_7\Delta_{21}$,	$\Delta_2\Delta_6\Delta_{14}\Delta_{42}$,
$\mathfrak{G}_{1,3,14,42}$,	$\Delta_1\Delta_3\Delta_{14}\Delta_{42}$,	$\Delta_2\Delta_6\Delta_7\Delta_{21}$,
$\mathfrak{G}_{1,6,7,42}$,	$\Delta_1\Delta_6\Delta_7\Delta_{42}$,	$\Delta_2\Delta_3\Delta_{14}\Delta_{21}$,
$\mathfrak{G}_{1,6,14,21}$,	$\Delta_1\Delta_6\Delta_{14}\Delta_{21}$,	$\Delta_2\Delta_3\Delta_7\Delta_{42}$.

Bei Ausübung einer nicht zur einzelnen Gruppe $\mathfrak{G}_{1,2,3,6}, \ldots$ gehörenden Substitution der Gruppe $\mathfrak{G}$ tauschen sich jedesmal die beiden Modulformen aus unter Hinzutritt von numerischen Faktoren; und zwar handelt es sich unseren sieben Gruppen entsprechend um folgende sieben Substitutionen der Periode zwei:

$$
\begin{array}{ll}
(\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_6)' = 7^{-24}(\Delta_7\Delta_{14}\Delta_{21}\Delta_{42}), & (\Delta_7\Delta_{14}\Delta_{21}\Delta_{42})' = 7^{24}(\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_6), \\
(\Delta_1\Delta_2\Delta_7\Delta_{14})' = 3^{-24}(\Delta_3\Delta_6\Delta_{21}\Delta_{42}), & (\Delta_3\Delta_6\Delta_{21}\Delta_{42})' = 3^{24}(\Delta_1\Delta_2\Delta_7\Delta_{14}), \\
(\Delta_1\Delta_2\Delta_{21}\Delta_{42})' = (\Delta_3\Delta_6\Delta_7\Delta_{14}), & (\Delta_3\Delta_6\Delta_7\Delta_{14})' = (\Delta_1\Delta_2\Delta_{21}\Delta_{42}), \\
(\Delta_1\Delta_3\Delta_7\Delta_{21})' = 2^{-24}(\Delta_2\Delta_6\Delta_{14}\Delta_{42}), & (\Delta_2\Delta_6\Delta_{14}\Delta_{42})' = 2^{24}(\Delta_1\Delta_3\Delta_7\Delta_{21}), \\
(\Delta_1\Delta_3\Delta_{14}\Delta_{42})' = (\Delta_2\Delta_6\Delta_7\Delta_{21}), & (\Delta_2\Delta_6\Delta_7\Delta_{21})' = (\Delta_1\Delta_3\Delta_{14}\Delta_{42}), \\
(\Delta_1\Delta_6\Delta_7\Delta_{42})' = (\Delta_2\Delta_3\Delta_{14}\Delta_{21}), & (\Delta_2\Delta_3\Delta_{14}\Delta_{21})' = (\Delta_1\Delta_6\Delta_7\Delta_{42}), \\
(\Delta_1\Delta_6\Delta_{14}\Delta_{21})' = (\Delta_2\Delta_3\Delta_7\Delta_{42}), & (\Delta_2\Delta_3\Delta_7\Delta_{42})' = (\Delta_1\Delta_6\Delta_{14}\Delta_{21}).
\end{array}
$$

Man bilde jetzt bei der einzelnen der sieben Gruppen $\mathfrak{G}_{1,2,3,6}, \ldots$ den Quotienten der beiden ihr zugewiesenen viergliedrigen Δ-Produkte, indem man das zweite Produkt zum Zähler und das erste zum Nenner macht. Man gewinnt so automorphe Funktionen:

$$
(5) \qquad \frac{\Delta_7\Delta_{14}\Delta_{21}\Delta_{42}}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_6}, \quad \frac{\Delta_3\Delta_6\Delta_{21}\Delta_{42}}{\Delta_1\Delta_2\Delta_7\Delta_{14}}, \cdot
$$

dieser Gruppen, die nur in den Polygonspitzen verschwinden und unendlich werden können. Der einzelne »DB« hat aber nur zwei solche Spitzen, von denen eine bei $\omega = i\infty$ liegt. Hier findet sich jedesmal der Pol der Funktion (5), und zwar stellt man aus den Anfangsgliedern der Reihen für die Δ leicht fest, dass die Pole der sieben Funktionen (5) bezw. die Ordnungen 72, 48, 36, 32, 24, 16, 12 haben. Die jeweils in der zweiten Spitze liegenden Nullpunkte haben dann die gleichen Ordnungen.

Vom Geschlechte o sind nun die Gruppen $\mathfrak{G}_{1,3,14,42}$ und $\mathfrak{G}_{1,6,14,21}$. Bei der ersten dieser Gruppen ist demnach der Quotient (5) die 24ste Potenz einer einwertigen Funktion $g(\omega)$, bei der zweiten aber der zugehörige Quotient (5) die zwölfte Potenz einer einwertigen Funktion $h(\omega)$. *Für die beiden Gruppen* $\mathfrak{G}_{1,3,14,42}$ *und* $\mathfrak{G}_{1,6,14,21}$ *des Geschlechtes* o *hat man einwertige Funktionen in:*

$$(\mathfrak{G}_{1,3,14,42}), \qquad g(\omega) = \sqrt[24]{\frac{\Delta_2\Delta_6\Delta_7\Delta_{21}}{\Delta_1\Delta_3\Delta_{14}\Delta_{42}}},$$

$$(\mathfrak{G}_{1,6,14,21}), \qquad h(\omega) = \sqrt[12]{\frac{\Delta_2\Delta_3\Delta_7\Delta_{42}}{\Delta_1\Delta_6\Delta_{14}\Delta_{21}}},$$

wo die Wurzeln auf der imaginären ω-Achse reell und positiv genommen werden sollen. Benutzt man als Entwicklungsgrösse:

$$x = q^{\frac{1}{21}} = e^{\frac{\pi i \omega}{21}},$$

so gewinnt man aus der bekannten Potenzreihe für die 24ste Wurzel aus Δ folgende Reihen für die beiden Funktionen $g(\omega)$ und $h(\omega)$:

$$(6) \qquad \begin{cases} g(\omega) = x^{-1} + 1 + x + 3x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 7x^5 + \cdots, \\ h(\omega) = x^{-1} - 2 + x + * + * - 2x^4 + 4x^5 + \cdots, \end{cases}$$

wo durch die Sternchen auf das Ausfallen der Potenzen x^2 und x^3 aufmerksam gemacht wird.

Durch die Substitution S wird g^{24} in g^{-24} transformiert. Also transformiert S die Funktion $g(\omega)$, abgesehen von einer multiplikativen 24sten Einheitswurzel, in ihren reziproken Wert. Da aber $g(-21 + i\sqrt{21})$ reell (und negativ) ist, so ist diese Einheitswurzel gleich 1:

$$(7) \qquad g\left(\frac{21\omega + 11 \cdot 42}{-\omega - 21}\right) = \frac{1}{g(\omega)}.$$

Genau so zeigt man die Gleichung:

$$(8) \qquad h\left(\frac{-42}{\omega}\right) = \frac{1}{h(\omega)}.$$

Hiernach hat man in:

$$f(\omega) = g(\omega) + \frac{1}{g(\omega)}, \qquad f'(\omega) = h(\omega) + \frac{1}{h(\omega)}$$

zwei einwertige Funktionen der Gruppe $\mathfrak{G}$, für die man aus (6) die Reihen findet:

$$(9) \qquad \begin{cases} f(\omega) = x^{-1} + 1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + 9x^5 + \cdots, \\ f'(\omega) = x^{-1} - 2 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + 9x^5 + \cdots. \end{cases}$$

Hiermit hat man eine bemerkenswerte Bestätigung der bisherigen Schlussweise gefunden. Die beiden einwertigen Funktionen $f(\omega)$, $f'(\omega)$ haben übereinstimmend ihre Pole (erster Ordnung) in der Spitze $\omega = i\infty$ des »DB» der Gruppe $\mathfrak{G}$ und haben überdies die gleichen Anfangsglieder x^{-1}. Sie sind demnach bis auf eine additive Konstante identisch. Die Reihen (9) bestätigen dies und liefern:

$$f'(\omega) = f(\omega) - 3.$$

In der Funktion $f(\omega)$ (die wir bevorzugen) *haben wir die fundamentale automorphe Funktion gewonnen, die den Entwicklungen über die Transformation* 42^{sten} *Grades der elliptischen Funktionen zugrunde zu legen ist, und nach deren Adjunktion die zugehörigen Modular- und Multiplikatorgleichungen durch Wurzelziehungen lösbar sind.*

Die Funktion:

$$(10) \qquad g(\omega) = \frac{1}{2}\left(f + \sqrt{f^2 - 4}\right)$$

ist über f verzweigt an den beiden Stellen $f(-6+i\sqrt{6})$ und $f(-21+i\sqrt{21})$, da die beiden Substitutionen S und V nicht in der Gruppe $\mathfrak{G}_{1,3,14,42}$ enthalten sind. Ebenso erweist sich die Funktion:

$$(11) \qquad h(\omega) = \frac{1}{2}\left(f - 3 + \sqrt{f^2 - 6f + 5}\right)$$

an den Stellen $f(i\sqrt{42})$ und $f(-9+i\sqrt{3})$ verzweigt. Auf diese Weise findet man folgende Eckenwerte der Funktion $f(\omega)$:

$$(12) \quad f(i\sqrt{42}) = 5, \quad f(-6+i\sqrt{6}) = 2, \quad f(-9+i\sqrt{3}) = 1, \quad f(-21+i\sqrt{21}) = -2.$$

Um den Wert $f(-14+i\sqrt{14})$ der Funktion $f(\omega)$ im Punkte e_2 zu bestimmen, benutzen wir den Umstand, dass nach »E. F.» II, 441:

$$\sqrt[12]{\frac{\Delta_3\Delta_7}{\Delta_1\Delta_{21}}}$$

eine Funktion der Transformationsgruppe des Grades 21, also auch unserer Gruppe $\mathfrak{G}_T$ ist. Da letztere durch W in sich transformiert wird, so gehört zur $\mathfrak{G}_T$ auch:

$$\sqrt[12]{\frac{\Delta_{14}\Delta_6}{\Delta_{42}\Delta_2}},$$

damit aber auch die Funktion:

$$k(\omega)=\sqrt[12]{\frac{\Delta_3\Delta_6\Delta_7\Delta_{14}}{\Delta_1\Delta_2\Delta_{21}\Delta_{42}}},$$

die auf der imaginären ω-Achse reell und positiv genommen werden soll. Nach den obigen Feststellungen haben wir hier eine dreiwertige Funktion der Gruppe $\mathfrak{G}_{1,2,21,42}$ gewonnen mit einem Pole dritter Ordnung in der Spitze $i\infty$ und einem Nullpunkte der gleichen Ordnung in der zweiten, bei $\omega=-14$ gelegenen Spitze des zugehörigen »DB». Gegenüber T erfährt diese Funktion die Transformation:

$$k\left(\frac{14\omega+5\,.\,42}{-\omega-14}\right)=\frac{\varepsilon}{k(\omega)},$$

wo ε eine zwölfte Einheitswurzel ist. Die letztere kann man zwar auf Grund des bekannten Verhaltens von $\sqrt[12]{\Delta(\omega_1,\omega_2)}$ gegenüber den Substitutionen der Modulgruppe zu 1 bestimmen. Doch haben wir diese Tatsache zunächst nicht nötig und können sie hinterher ohne weiteres aus unseren Formeln ablesen. Jedenfalls haben wir den Ansatz:

$$k(\omega)+\frac{\varepsilon}{k(\omega)}=f^3+af^2+bf+c \tag{13}$$

mit drei noch unbekannten Koeffizienten a, b, c; es steht nämlich links eine dreiwertige Funktion der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit dem Anfangsgliede x^{-3} der Reihenentwicklung. Die ersten sechs Glieder der Reihe für die Funktion (13):

$$k(\omega) + \frac{\varepsilon}{k(\omega)} = x^{-3} + 2x^{-2} + 7x^{-1} + 12 + 31x + 52x^2 + \cdots$$

werden ausschliesslich von der ersten links stehenden Funktion $k(\omega)$ geliefert. Trägt man in (13) rechts für f die Reihe (9) ein, ordnet nach ansteigenden Potenzen von x und vergleicht die Koeffizienten rechts und links, so folgt:

$$3+a=2, \quad 9+2a+b=7, \quad 19+5a+b+c=12, \quad 39+8a+2b=31,$$
$$66+14a+2b=52.$$

Die ersten drei Gleichungen liefern $a=-1$, $b=0$, $c=-2$; die beiden letzten Gleichungen bestätigen die für a und b gewonnenen Werte, während der Wert für c sogleich auf anderem Wege bestätigt wird. Dass ε reell sein muss, folgt jetzt bereits aus der Realität von a, b, c. Setzen wir aber $\varepsilon = \pm 1$, so ist die Diskriminante der für k quadratischen Gleichung (13):

$$(f^3 - f^2 - 2)^2 \mp 4.$$

Nun gehört die Substitution U der Gruppe $\mathfrak{G}_{1,2,21,42}$ nicht an, so dass k als Funktion von f an der Stelle $f(-9+i\sqrt{3})=1$ verzweigt ist. Also verschwindet die Diskriminante für $f=1$, so dass das obere Zeichen gilt und der Wert $c=-2$ bestätigt ist. Durch Weiterentwicklung der eben genannten Diskriminante findet man als Ausdruck der Funktion k in f:

$$(14) \qquad k(\omega) = \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 - 2 + f\sqrt{(f-1)(f-2)(f^2+f+2)}\right),$$

wo auf der imaginären ω-Achse das positive Zeichen der Wurzel gilt. Das Geschlecht $p=1$ der Gruppe $\mathfrak{G}_{1,2,21,42}$, ebenso der Verzweigungspunkt bei $f(-6+i\sqrt{6})=2$ bestätigt sich. Zugleich finden wir die noch unbekannten Eckenwerte:

$$(15) \qquad f(\mp 14 + i\sqrt{14}) = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

als Wurzeln der quadratischen Gleichung $f^2+f+2=0$.

Es ist jetzt möglich, in jedem Falle die zu f zu adjungierenden Quadratwurzel anzugeben, um von $\mathfrak{G}$ zur einzelnen der übrigen oben genannten Gruppen aufzusteigen. Für die beiden Teiler des Geschlechtes 0 von $\mathfrak{G}$ hat man die folgenden Wurzeln zu adjungieren:

$$\mathfrak{G}_{1,3,14,42}, \qquad \sqrt{f^2-4} = \sqrt{(f+2)(f-2)},$$
$$\mathfrak{G}_{1,6,14,21}, \qquad \sqrt{f^2-6f+5} = \sqrt{(f-1)(f-5)},$$

für die übrigen Teiler des Index 2, die sämtlich $p = 1$ haben:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{G}_{1,2,3,6}, &&\sqrt{f^4-2f^3-11f^2-16f-20} = \sqrt{(f+2)(f-5)(f^2+f+2)},\\
&\mathfrak{G}_{1,2,7,14}, &&\sqrt{f^4-6f^3+f^2+24f-20} = \sqrt{(f+2)(f-1)(f-2)(f-5)},\\
&\mathfrak{G}_{1,2,21,42}, &&\sqrt{f^4-2f^3+f^2-4f+4} = \sqrt{(f-1)(f-2)(f^2+f+2)},\\
&\mathfrak{G}_{1,3,7,21}, &&\sqrt{f^4-6f^3+5f^2-4f+20} = \sqrt{(f-2)(f-5)(f^2+f+2)},\\
&\mathfrak{G}_{1,6,7,42}, &&\sqrt{f^4+2f^3+f^2-4} = \sqrt{(f+2)(f-1)(f^2+f+2)}.
\end{aligned}$$

Um zu den Teilern des Index 4 zu gelangen, kann man jedesmal zu f drei Quadratwurzeln adjungieren, von denen sich übrigens jede in den beiden anderen und f leicht rational darstellt. Das Nähere entnehme man aus der Zusammenstellung:

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{G}_{1,14}, & \sqrt{(f+2)(f-2)}, & \sqrt{(f-1)(f-5)}, & \sqrt{(f+2)(f-1)(f-2)(f-5)},\\
\mathfrak{G}_{1,3}, & \sqrt{(f+2)(f-2)}, & \sqrt{(f+2)(f-5)(f^2+f+2)}, & \sqrt{(f-2)(f-5)(f^2+f+2)},\\
\mathfrak{G}_{1,42}, & \sqrt{(f+2)(f-2)}, & \sqrt{(f+2)(f-1)(f^2+f+2)}, & \sqrt{(f-1)(f-2)(f^2+f+2)},\\
\mathfrak{G}_{1,6}, & \sqrt{(f-1)(f-5)}, & \sqrt{(f+2)(f-5)(f^2+f+2)}, & \sqrt{(f+2)(f-1)(f^2+f+2)},\\
\mathfrak{G}_{1,21}, & \sqrt{(f-1)(f-5)}, & \sqrt{(f-1)(f-2)(f^2+f+2)}, & \sqrt{(f-2)(f-5)(f^2+f+2)},\\
\mathfrak{G}_{1,2}, & \sqrt{(f+2)(f-1)(f-2)(f-5)}, & \sqrt{(f+2)(f-5)(f^2+f+2)}, & \sqrt{(f-1)(f-2)(f^2+f+2)},\\
\mathfrak{G}_{1,7}, & \sqrt{(f+2)(f-1)(f-2)(f-5)}, & \sqrt{(f+2)(f-1)(f^2+f+2)}, & \sqrt{(f-2)(f-5)(f^2+f+2)}.
\end{array}$$

Am einfachsten gestalten sich die Verhältnisse bei der Gruppe $\mathfrak{G}_{1,14}$. Da sich f rational aus $\sqrt{f^2-4}$ und $\sqrt{f^2-6f+5}$ berechnen lässt, so sind die automorphen Funktionen dieser Gruppe rational in den beiden genannten Wurzeln darstellbar. Fügt man auch noch f hinzu und setzt:

$$f = X, \qquad \sqrt{f^2-4} = Y, \qquad \sqrt{f^2-6f+5} = Z,$$

so bestehen die beiden Relationen:

$$X^2 - Y^2 - 4 = 0, \qquad X^2 - Z^2 - 6X + 5 = 0.$$

Deutet man X, Y, Z als rechtwinklige Raumkoordinaten, so erscheint durch unsere Funktionen der »DB» von $\mathfrak{G}_{1,14}$ auf eine Raumkurve vierten Grades erster Spezies abgebildet. Es liegt also das Geschlecht $p=1$ vor, was man auch am »DB» leicht bestätigt. Die algebraische Behandlung des Transformationsgrades 42 gestaltet sich hiernach am einfachsten etwa so: *Zur Hauptfunktion $f(\omega)$, von der man auszugehen hat, ist zunächst die Quadratwurzel $\sqrt{f^2-4}$ zu adjungieren, wobei das Geschlecht $p=0$ bestehen bleibt, sodann $\sqrt{f^2-6f+5}$, was zu $p=1$ führt, endlich etwa $\sqrt{f^4+2f^3+f^2-4}$ oder eine der anderen Wurzeln mit dem Faktor (f^2+f+2) im Radikanden, was zur Transformationsgruppe mit $p=5$ hinführt; die Funktionen der $\mathfrak{G}_T$ sind also rational darstellbar in:*

$$(16) \qquad f, \quad \sqrt{f^2-4}, \quad \sqrt{f^2-6f+5}, \quad \sqrt{f^4+2f^3+f^2-4}$$

oder auch in den drei Wurzeln allein, da man f durch die beiden ersten rational ausdrücken kann.

Zu den Klasseninvarianten der Diskriminante $D=-168$ gelangt man jetzt durch folgende Überlegung: Nach »E. F.» II, 441[1] ist:

$$(17) \qquad \varphi(\omega)=\sqrt[12]{\frac{\Delta_3\Delta_7}{\Delta_1\Delta_{21}}},$$

wie schon oben benutzt wurde, eine Funktion der Transformationsgruppe des Grades 21, also auch unserer hier vorliegenden $\mathfrak{G}_T$; auf der imaginären ω-Achse soll die zwölfte Wurzel wieder reell und positiv genommen werden. Dieser Gruppe gehört demnach auch die Funktion:

$$(18) \qquad \varphi\left(\frac{-42}{\omega}\right)=\sqrt[12]{\frac{\Delta_6\Delta_{14}}{\Delta_2\Delta_{42}}}$$

an. Das Produkt dieser beiden Funktionen:

$$(19) \qquad \varphi(\omega)\varphi\left(\frac{-42}{\omega}\right)=\sqrt[12]{\frac{\Delta_3\Delta_6\Delta_7\Delta_{14}}{\Delta_1\Delta_2\Delta_{21}\Delta_{42}}}$$

bleibt bei der Substitution W unverändert, aber auch bei der Substitution S.

---

[1] Daselbst ist die Transformationsgruppe für den n^{ten} Grad durch $\gamma\equiv 0 \pmod{n}$, nicht wie hier durch $\beta\equiv 0 \pmod{n}$ erklärt, was einige untergeordnete Abänderungen in den Gestalten der Formeln zur Folge hat.

Sie könnte nämlich bei dieser Substitution höchstens Zeichenwechsel erfahren, würde dann aber im Fixpunkte $\omega = -21 + i\sqrt{21}$ von S verschwinden, was jedoch nicht der Fall ist. Die Funktion (19) gehört also zur Gruppe $\mathfrak{G}_{1,2,21,42}$, und zwar hat sie, wie aus einer oben gemachten Angabe folgt, in der Spitze $\omega = i\infty$ des zugehörigen »DB» einen Pol dritter Ordnung, mithin in der anderen Spitze einen Nullpunkt der gleichen Ordnung. Gegenüber der Substitution T geht die Funktion (19) bis auf eine multiplikative zwölfte Einheitswurzel ε in ihren reziproken Wert über. Daraufhin beweist man leicht die Beziehung:

$$\varphi(\omega)\varphi\left(\frac{-42}{\omega}\right) + \frac{\varepsilon}{\varphi(\omega)\varphi\left(\frac{-42}{\omega}\right)} = f^3 - f^2 - 2.$$

Es steht nämlich hier links eine dreiwertige Funktion der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit einem Pole dritter Ordnung im Punkte $\omega = i\infty$, also eine ganze Funktion dritten Grades von f, für welche man durch die ersten drei Reihenglieder den rechts stehenden Ausdruck feststellt. Da $f(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $\varphi\left(\frac{-42}{\omega}\right)$ auf der imaginären ω-Achse reell sind, so ist ε notwendig gleich $+1$ oder -1. Wäre $\varepsilon = -1$, so hätte die Funktion (19) im Fixpunkte $\omega = -14 + i\sqrt{14}$ von T den Wert $\pm i$, mithin die linke Seite der letzten Gleichung den Wert $\pm 2i$. Dagegen haben f und die rechte Seite der letzten Gleichung daselbst die Werte:

$$f = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}, \qquad f^3 - f^2 - 2 = 2.$$

Hiernach ist $\varepsilon = 1$, und man findet:

$$\varphi(\omega)\varphi\left(\frac{-42}{\omega}\right) + \frac{1}{\varphi(\omega)\varphi\left(\frac{-42}{\omega}\right)} = f^3 - f^2 - 2.$$

Eine Bestätigung der Schlussweise zieht man aus der Berechnung der Funktion (19) selbst. Man findet nämlich:

$$(20) \qquad \varphi(\omega)\varphi\left(\frac{-42}{\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 - 2 + f\sqrt{f^4 - 2f^3 + f^2 - 4f + 4}\right)$$

mit einer auf der imaginären ω-Achse positiv zu nehmenden Quadratwurzel.

In der Tat musste sich eben diese Quadratwurzel bei der hier vorliegenden Gruppe $\mathfrak{G}_{1,2,21,42}$ einfinden.

Weiter findet man durch Quotientenbildung aus (17) und (18):

$$\frac{\varphi(\omega)}{\varphi\left(\frac{-42}{\omega}\right)} = \sqrt[12]{\frac{\Delta_2\Delta_3\Delta_7\Delta_{42}}{\Delta_1\Delta_6\Delta_{14}\Delta_{21}}} = h(\omega) = \frac{1}{2}\left(f-3+\sqrt{f^2-6f+5}\right),$$

wo die Quadratwurzel auf der imaginären Achse wieder positiv zu nehmen ist. Durch Multiplikation dieser Gleichung mit (20) und Ausziehen der Quadratwurzel folgt:

$$(21)\qquad \varphi(\omega) = \sqrt[12]{\frac{\Delta_3\Delta_7}{\Delta_1\Delta_{21}}} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(f-3+\sqrt{f^2-6f+5}\right)\left(f^3-f^2-2+f\sqrt{f^4-2f^3+f^2-4f+4}\right)},$$

wo auch die äussere Wurzel auf der imaginären ω-Achse positiv genommen wer den soll. Man kann das Ergebnis auch in die Gestalt kleiden:

$$(22)\qquad \begin{aligned} \varphi(\omega) &= \sqrt{\frac{f-3+\sqrt{f^2-6f+5}}{2}\cdot\frac{f^3-f^2-2+f\sqrt{f^4-2f^3+f^2-4f+4}}{2}},\\ \frac{1}{\varphi(\omega)} &= \sqrt{\frac{f-3-\sqrt{f^2-6f+5}}{2}\cdot\frac{f^3-f^2-2-f\sqrt{f^4-2f^3+f^2-4f+4}}{2}}. \end{aligned}$$

Die Beziehung der Funktion $\varphi(\omega)$ zu der beim siebenten Transformationsgrade auftretenden Funktion:

$$\chi(\omega) = \sqrt[6]{\frac{\Delta_7}{\Delta_1}}$$

ist nach »E. F.» II, 443[1] die folgende:

$$(23)\qquad \chi(\omega) = \frac{1}{4}\varphi\left(\psi-3+\sqrt{\psi^2-6\psi-19}\right)^2, \qquad \psi = \varphi+\frac{1}{\varphi},$$

[1] Es handelt sich um die Gleichung (20) daselbst, in der τ und τ_7 durch φ und χ zu ersetzen sind und die Quadratwurzel σ hier (wegen der veränderten Auswahl der Transformationsgruppe) das positive Vorzeichen haben muss.

wo die Wurzel auf der imaginären ω-Achse wieder positiv zu nehmen ist. Endlich ist nach (41) in »E. F.» II, 398 die Darstellung der Modulfunktion erster Stufe $j(\omega)$ in χ die folgende:

$$j(\omega) = \left(\chi + \frac{49}{\chi} + 13\right)\left(\chi + \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^3\left(\chi + \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^3. \tag{24}$$

Die Berechnung der Klasseninvariante $j(i\sqrt{42})$ ist aus (22), (23) und (24) sofort zu leisten, indem man $f(i\sqrt{42}) = 5$ einträgt. Man hat zunächst:

$$\varphi(i\sqrt{42}) = \sqrt{49+20\sqrt{6}} = 5+2\sqrt{6}, \quad \frac{1}{\varphi} = 5-2\sqrt{6},$$

womit sich die erste der Irrationalitäten einfindet, die nach der Weberschen Theorie bei der Diskriminante $D = -168$ zur Trennung der Geschlechter dienen. Weiter findet sich aus (23) der Wert $\psi(i\sqrt{42}) = 10$ und damit weiter:

$$\chi(i\sqrt{42}) = 7(5+2\sqrt{6})\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 7(5+2\sqrt{6})\frac{5+\sqrt{21}}{2},$$

$$\frac{49}{\chi(i\sqrt{42})} = 7(5-2\sqrt{6})\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 7(5-2\sqrt{6})\frac{5-\sqrt{21}}{2}.$$

Hier tritt die zweite zur Trennung der Geschlechter noch nötige Irrationalität $\sqrt{21}$ auf, die (nachdem bereits $\sqrt{6}$ adjungiert war) die nach Weber nötige Irrationalität $\sqrt{14}$ ersetzen kann. Weiter gewinnt der erste Faktor in (24) rechts für $\omega = i\sqrt{42}$ den Zahlwert:

$$\chi + \frac{49}{\chi} + 13 = 188 + 42\sqrt{14} = (15+4\sqrt{14})(6-\sqrt{14})^3$$
$$= (15+4\sqrt{14})(4-\sqrt{14})^3(5+\sqrt{14})^3,$$

wo der erste Faktor rechts die Grundeinheit des quadratischen Körpers $(\mathfrak{R}, \sqrt{14})$ ist, während die Basen der beiden dritten Potenzen Primfaktoren von 2 und 11 in diesem Körper sind. Die Basis des zweiten Faktors in (24) rechts ergiebt für $\omega = i\sqrt{42}$:

$$\chi + \frac{5+\sqrt{21}}{2} = 2\sqrt{6}(7+3\sqrt{6})\frac{5+\sqrt{21}}{2},$$

wo die Zahl in der Klammer der eine Primteiler von 5 im Körper $(\mathfrak{R}, \sqrt{6})$ ist und der letzte Faktor die Grundeinheit des quadratischen Körpers $(\mathfrak{R}, \sqrt{21})$ darstellt. Die Basis des letzten Faktors in (24) rechts hat für $\omega = i\sqrt{42}$ den Wert:

$$\chi + \frac{5-\sqrt{21}}{2} = \frac{5+\sqrt{21}}{2} \cdot \frac{93+28\sqrt{6}-5\sqrt{21}}{2},$$

wo der zweite Faktor eine ganze Zahl des biquadratischen Körpers:

$$(\mathfrak{R}, \sqrt{6}, \sqrt{21}) = (\mathfrak{R}, \sqrt{6}, \sqrt{14})$$

ist. Endlich lässt sich die Klasseninvariante $j(i\sqrt{42})$ selbst so darstellen:

$$j(i\sqrt{42}) = (15+4\sqrt{14})\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^6 [(18+7\sqrt{6})(6-\sqrt{14})(93+28\sqrt{6}-5\sqrt{21})]^3,$$

wobei die Faktoren, die Einheiten darstellen, vorangenommen sind. Insgesamt bilden die vier Klasseninvarianten der Diskriminante $D = -168$ vier positive, die Ungleichungen:

$$12^3 < j\left(i\sqrt{\frac{7}{6}}\right) < j\left(i\sqrt{\frac{14}{3}}\right) < j\left(i\sqrt{\frac{21}{2}}\right) < j(i\sqrt{42})$$

befriedigende ganze Zahlen des biquadratischen Körpers $(\mathfrak{R}, \sqrt{6}, \sqrt{14})$. Aus dem berechneten Werte von $j(i\sqrt{42})$ gehen die drei anderen Klasseninvarianten hervor, indem man in den drei Arten je zwei unter den Wurzeln $\sqrt{6}, \sqrt{14}, \sqrt{21}$ im Vorzeichen wechselt. Man gelangt zu folgenden Werten:

$$j\left(i\sqrt{\frac{7}{6}}\right) = (15+4\sqrt{14})\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^6 [(18-7\sqrt{6})(6-\sqrt{14})(93-28\sqrt{6}+5\sqrt{21})]^3,$$

$$j\left(i\sqrt{\frac{14}{3}}\right) = (15-4\sqrt{14})\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^6 [(18-7\sqrt{6})(6+\sqrt{14})(93-28\sqrt{6}-5\sqrt{21})]^3,$$

$$j\left(i\sqrt{\frac{21}{2}}\right) = (15-4\sqrt{14})\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^6 [(18+7\sqrt{6})(6+\sqrt{14})(93+28\sqrt{6}+5\sqrt{21})]^3.$$

Für die dekadischen Logarithmen findet man:

$$\log 12^3 = 3{\cdot}2375436,$$
$$\log j\left(i\sqrt{\frac{7}{6}}\right) = 3{\cdot}2740571,$$
$$\log j\left(i\sqrt{\frac{14}{3}}\right) = 5{\cdot}8925155,$$
$$\log j\left(i\sqrt{\frac{21}{2}}\right) = 8{\cdot}8398072,$$
$$\log j(i\sqrt{42}) = 17{\cdot}6843276,$$

entsprechend den eben angegebenen Ungleichungen. Die ganzzahlige biquadratische Klassengleichung selbst aufzustellen, ist wegen der Grösse der Koeffizienten umständlich. Beispielsweise ist das Absolutglied dieser Gleichung gleich $2^{24}.3^{12}.5^{15}.11^6.101^3$, also eine 36-ziffrige Zahl.

Bad Harzburg, den 3^{ten} August 1928.