ÜBER SYSTEME VON LINEAREN PARTIELLEN DIFFERENZENGLEICHUNGEN MIT ZWEI UNABHÄNGIGEN VARIABLEN.

VON

ARVID UHLER

in LINKÖPING.

Einleitung.

Die Theorie der linearen Differenzengleichungen mit einer unabhängigen Variable hat während der letzten Decennien durch Untersuchungen von u. a. Pincherle, Nörlund, Birkhoff, Galbrun, Carmichael, Perron feste Konture erhalten. Dagegen ist die Theorie der partiellen Differenzengleichungen nur wenig verarbeitet worden. In der vorliegenden Untersuchung wollen wir ein System folgender Form betrachten:

$$
(1) \qquad \begin{aligned} z_i(x+1, y) &= \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}(x, y)\, z_j(x, y) \\ z_i(x, y+1) &= \sum_{j=1}^{j=n} b_{ij}(x, y)\, z_j(x, y) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)
$$

wobei $a_{ij}(x, y)$ und $b_{ij}(x, y)$ rationale Funktionen von x und y sind. Die Lösungen eines solchen Systems zeigen grosse Analogien mit denen linearer Differenzengleichungen mit einer unabhängigen Variable.

Weiter wollen wir ein System folgender Form betrachten:

$$
(2) \qquad \begin{aligned} z(x+2, y) &= a_1(x, y)z(x+1, y+1) + a_2(x, y)z(x+1, y) + a_3(x, y)z(x, y+1) + \\ &\quad + a_4(x, y)z(x, y) \\ z(x, y+2) &= b_1(x, y)z(x+1, y+1) + b_2(x, y)z(x+1, y) + b_3(x, y)z(x, y+1) + \\ &\quad + b_4(x, y)z(x, y) \end{aligned}
$$

wobei $a_i(x, y)$ und $b_i(x, y)$ rationale Funktionen von x und y sind.

Es wird sich zeigen, dass ein solches System ohne Schwierigkeit in ein System von der Form (1) überführt werden kann.

Bei den Untersuchungen dieser Systeme handelt es sich um Existenzbeweise der Lösungen und deren allgemeine Eigenschaften. Indessen scheint es mir aufschlussreich einen Spezialfall zu untersuchen und diesen mehr in Einzelheit zu studieren.

Bekanntlich kann die Untersuchung einer wichtigen Klasse linearer Differenzengleichungen, der so genannten normalen Differenzengleichungen, durch Anwendung der Laplaceschen Transformation

$$z(x) = \int t^{x-1} v(t)\,dt$$

auf die Untersuchung einer linearen Differentialgleichung zurückgeführt werden. Das einfachste Beispiel einer linearen Differenzengleichung, die sich nicht durch elementare Funktionen lösen lässt, bietet die hypergeometrische Differenzengleichung:

$$(x-\alpha+2)(x-\beta+2)z(x+2) - [\alpha\beta-(\alpha+\beta+\gamma+1)(x+1)+2(x+1)(x+2)]z(x+1) + \\ + x(x-\gamma+1)z(x) = 0.$$

Durch die Laplacesche Transformation lässt sich diese auf die hypergeometrische Differentialgleichung zurückführen:

$$t(1-t)v''(t) + [\gamma-(\alpha+\beta+1)t]v'(t) - \alpha\beta v(t) = 0$$

der von der hypergeometrischen Funktion

$$F(\alpha, \beta, \gamma, t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} t^n$$

genügt ist, wobei wir von dem von Appell eingeführten Symbol Gebrauch machen:

$$(\alpha, n) = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1).$$

Als eine Generalisierung dieser Funktion hat Appell[1], Goursat, Picard, Le Vavasseur u. a. folgende Funktionen untersucht:

---

[1] Siehe darüber: P. Appell et J. Kampé de Fériet: Fonctions hypergéométriques et hypersphériques (1926).

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, t, s) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} t^m s^n$$

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', t, s) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} t^m s^n$$

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, t, s) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} t^m s^n$$

$$F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', t, s) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} t^m s^n.$$

Appell hat gezeigt, dass diese Funktionen folgenden partiellen Differentialgleichungen genügen:

$$F_1 \begin{cases} t(1-t) v''_{t^2} + s(1-t) v''_{ts} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)t] v'_t - \beta s v'_s - \alpha\beta v = 0 \\ s(1-s) v''_{s^2} + t(1-s) v''_{ts} + [\gamma - (\alpha+\beta'+1)s] v'_s - \beta' t v'_t - \alpha\beta' v = 0 \end{cases}$$

$$F_2 \begin{cases} t(1-t) v''_{t^2} - ts v''_{ts} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)t] v'_t - \beta s v'_s - \alpha\beta v = 0 \\ s(1-s) v''_{s^2} - ts v''_{ts} + [\gamma' - (\alpha+\beta'+1)s] v'_s - \beta' t v'_t - \alpha\beta' v = 0 \end{cases}$$

$$F_3 \begin{cases} t(1-t) v''_{t^2} + s v''_{ts} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)t] v'_t - \alpha\beta v = 0 \\ s(1-s) v''_{s^2} + t v''_{ts} + [\gamma - (\alpha'+\beta'+1)s] v'_s - \alpha'\beta' v = 0 \end{cases}$$

$$F_4 \begin{cases} t(1-t) v''_{t^2} - s^2 v''_{s^2} - 2ts v''_{ts} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)t] v'_t - (\alpha+\beta+1) s v'_s - \alpha\beta v = 0 \\ s(1-s) v''_{s^2} - t^2 v''_{t^2} - 2ts v''_{ts} + [\gamma' - (\alpha+\beta+1)s] v'_s - (\alpha+\beta+1) t v'_t - \alpha\beta v = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen werden als die hypergeometrischen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variablen bezeichnet.

Man kann jetzt solche Differenzengleichungen mit zwei unabhängigen Variablen betrachten, die sich durch die Transformation

$$z(x, y) = \int\int t^{x-1} s^{y-1} v(t, s)\, dt\, ds$$

in obenstehende Differentialgleichungen überführen lassen. Wir wollen die eben bezeichneten Gleichungen als die hypergeometrischen Differenzengleichungen mit zwei Variablen bezeichnen.

Wir wollen indessen die Aufgabe begrenzen und nur eines dieser Systeme studieren, und zwar dasjenige, das sich durch die obenerwähnte Transformation in das System F_2 überführen lässt. Dieses System ist folgendes:

$$
\begin{aligned}
&(x+2-\beta)(x+y+2-\alpha)z(x+2,y)+(x+1-\beta)(x+y+2-\alpha)z(x+1,y+1)-\\
&\qquad-[(x+1-\beta)(x+y+1-\alpha)+(x+1)(x+2-\gamma)]z(x+1,y)-\\
&\qquad-x(x+1-\gamma)z(x,y+1)+x(x+1-\gamma)z(x,y)=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(y+2-\beta')(x+y+2-\alpha)z(x,y+2)+(y+1-\beta')(x+y+2-\alpha)z(x+1,y+1)-\\
&\qquad-[(y+1-\beta')(x+y+1-\alpha)+(y+1)(y+2-\gamma')]z(x,y+1)-\\
&\qquad-y(y+1-\gamma')z(x+1,y)+y(y+1-\gamma')z(x,y)=0.
\end{aligned}
$$

I.

Betrachten wir jetzt ein System von Gleichungen

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
z_i(x+1,y)&=\sum_{j=1}^{j=n}a_{ij}(x,y)z_j(x,y)\\
z_i(x,y+1)&=\sum_{j=1}^{j=n}b_{ij}(x,y)z_j(x,y).
\end{aligned}
\qquad (i=1,2,\ldots n)
$$

Damit diese Gleichungen kompatibel seien, müssen wir $a_{ij}(x,y)$ und $b_{ij}(x,y)$, die so beschaffene rationale Funktionen von x und y sind, dass die Determinanten $|a_{ij}(x,y)|$ und $|b_{ij}(x,y)|$ nicht identisch verschwinden, gewissen Bedingungen unterwerfen. Wir erhalten die letzteren auf folgende Weise. Wenn man in der ersten Gleichung y mit $y+1$ und in der zweiten Gleichung x mit $x+1$ ersetzt, und dann in die rechten Membra die Werte $z_j(x,y+1)$ und $z_j(x+1,y)$, die man aus (1) zieht, einsetzt, erhält man

$$
\begin{aligned}
z_i(x+1,y+1)&=\sum_{j=1}^{j=n}a_{ij}(x,y+1)\sum_{k=1}^{k=n}b_{jk}(x,y)z_k(x,y)\\
z_i(x+1,y+1)&=\sum_{j=1}^{j=n}b_{ij}(x+1,y)\sum_{k=1}^{k=n}a_{jk}(x,y)z_k(x,y).
\end{aligned}
$$

Wenn wir darauf die beiden rechten Membra identifizieren, erhalten wir folgende Bedingungen:

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}(x, y+1) b_{jk}(x, y) = \sum_{j=1}^{j=n} b_{ij}(x+1, y) a_{jk}(x, y)$$

$$\text{für } i = 1, 2, \ldots n \text{ und } k = 1, 2, \ldots n.$$

Diesen Gleichungen müssen identisch genügt sein. Im folgenden wird angenommen, dass diese Bedingungen erfüllt sind. Die Wertesysteme von x und y, für welche $a_{ij}(x, y)$ und $b_{ij}(x, y)$ unendlich werden oder die Determinanten $|a_{ij}(x, y)|$ und $|b_{ij}(x, y)|$ Null werden, bezeichnen wir als die singulären Stellen der Gleichungen. Wir können nun immer eine gewisse Anzahl irreductibler Polynome $\varphi_r(x, y)$ finden, die so beschaffen sind, dass

$$\varphi_r(x, y) = 0$$

von diesen singulären Wertesystemen und von keinen anderen genügt werden. Ausserdem wollen wir alle Wertesysteme, die den Gleichungen

$$\varphi_r(x+\mu, y+\nu) = 0; \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

genügen als singulär bezeichnen. Dazu kommt noch im allgemeinen $x = \infty$ und $y = \infty$.

Mögen jetzt $z_i^{(l)}(x, y)$, $i = 1, 2, \ldots n$; $l = 1, 2, \ldots n$; n Partikulärlösungen vom Systeme (1) sein. Wir wollen diese Lösungen ein Fundamentalsystem nennen, wenn keine lineare Relation besteht zwischen den Lösungen

$$\sum_{l=1}^{l=n} \Pi_l(x, y) z_i^{(l)}(x, y) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{3}$$

wobei $\Pi_l(x, y)$ periodische Funktionen von den Variablen x und y mit Perioden 1 sind, die nicht sämtlich verschwinden.

Betrachten wir die Determinante:

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} z_1^{(1)}(x, y), & z_2^{(1)}(x, y), & \ldots, & z_n^{(1)}(x, y) \\ z_1^{(2)}(x, y), & z_2^{(2)}(x, y), & \ldots, & z_n^{(2)}(x, y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{(n)}(x, y), & z_2^{(n)}(x, y), & \ldots, & z_n^{(n)}(x, y) \end{vmatrix} \tag{4}$$

so können wir dieser Bedingung auch eine andere Form geben. Ersetzen wir hier x mit $x+1$ und bedienen wir uns der Tatsache, dass $z_i^{(l)}(x, y)$ Lösungen von (1) sind, finden wir, dass $D(x, y)$ der folgenden Differenzengleichung genügt

$$D(x+1, y) = |a_{ij}(x, y)| D(x, y).$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir

$$D(x, y+1) = |b_{ij}(x, y)| D(x, y).$$

Wir können jetzt zeigen, dass wenn zwischen $z_i^{(l)}(x, y)$ eine Relation von der Form (3) besteht, so ist $D(x, y)$ identisch Null.

Dies folgt direkt aus (3). Denn, da $\Pi_l(x, y)$ nicht sämtlich verschwinden, muss die Determinante von $z_i^{(l)}(x, y)$, d. h. $D(x, y)$, identisch verschwinden.

Umgekehrt, wenn $D(x, y)$ identisch verschwindet, dann besteht eine Relation (3) zwischen den Funktionen $z_i^{(l)}(x, y)$.

Um dies zu zeigen, bezeichnen wir mit $\psi_l(x, y)$ die Unterdeterminante des Elementes $z_1^{(l)}(x, y)$ der ersten Spalte von $D(x, y)$.

Wir haben dann

$$(5)\quad \begin{aligned} &z_1^{(1)}(x, y)\,\psi_1(x, y) + z_1^{(2)}(x, y)\,\psi_2(x, y) + \cdots + z_1^{(n)}(x, y)\,\psi_n(x, y) = D(x, y) = 0 \\ &z_2^{(1)}(x, y)\,\psi_1(x, y) + z_2^{(2)}(x, y)\,\psi_2(x, y) + \cdots + z_2^{(n)}(x, y)\,\psi_n(x, y) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &z_n^{(1)}(x, y)\,\psi_1(x, y) + z_n^{(2)}(x, y)\,\psi_2(x, y) + \cdots + z_n^{(n)}(x, y)\,\psi_n(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können wir auch mit Anwendung des Systems (1) auf folgende Weise schreiben:

$$\begin{aligned} &z_1^{(1)}(x, y)\,[\psi_1(x, y) - \psi_1(x-1, y)] + \cdots + z_1^{(n)}(x, y)\,[\psi_n(x, y) - \psi_n(x-1, y)] + \\ &\qquad + \psi_1(x-1, y) \sum_{j=1}^{j=n} a_{1j}(x-1, y) z_j^{(1)}(x-1, y) + \cdots + \\ &\qquad + \psi_n(x-1, y) \sum_{j=1}^{j=n} a_{1j}(x-1, y) z_j^{(n)}(x-1, y) = 0 \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$z_n^{(1)}(x,y)\,[\psi_1(x,y)-\psi_1(x-1,y)] + \cdots + z_n^{(n)}(x,y)\,[\psi_n(x,y)-\psi_n(x-1,y)] +$$
$$+ \psi_1(x-1,y)\sum_{j=1}^{j=n} a_{nj}(x-1,y)\,z_j^{(1)}(x-1,y) + \cdots +$$
$$+ \psi_n(x-1,y)\sum_{j=1}^{j=n} a_{nj}(x-1,y)\,z_j^{(n)}(x-1,y) = 0$$

oder durch Umformung unter Anwendung von (1) und (5)

$$z_1^{(1)}(x,y)\,\psi_1(x-1,y) + \cdots + z_1^{(n)}(x,y)\,\psi_n(x-1,y) = a_{11}(x-1,y)\,D(x-1,y)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_n^{(1)}(x,y)\,\psi_1(x-1,y) + \cdots + z_n^{(n)}(x,y)\,\psi_n(x-1,y) = a_{n1}(x-1,y)\,D(x-1,y).$$

Aber da $D(x-1,y)=0$, so wird auch die rechten Membra Null. Wenn wir weiter annehmen, dass nicht sämtliche Unterdeterminanten Null sind, schliessen wir, dass

$$\frac{\psi_2(x-1,y)}{\psi_1(x-1,y)} = \frac{\psi_2(x,y)}{\psi_1(x,y)},\ \ldots\ \frac{\psi_n(x-1,y)}{\psi_1(x-1,y)} = \frac{\psi_n(x,y)}{\psi_1(x,y)}.$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir

$$\frac{\psi_2(x,y-1)}{\psi_1(x,y-1)} = \frac{\psi_2(x,y)}{\psi_1(x,y)},\ \ldots\ \frac{\psi_n(x,y-1)}{\psi_1(x,y-1)} = \frac{\psi_n(x,y)}{\psi_1(x,y)}.$$

Wir können nun schreiben:

$$\frac{\psi_2(x,y)}{\psi_1(x,y)} = \frac{\Pi_2(x,y)}{\Pi_1(x,y)},\ \ldots\ \frac{\psi_n(x,y)}{\psi_1(x,y)} = \frac{\Pi_n(x,y)}{\Pi_1(x,y)}$$

wobei $\Pi_i(x,y)$ periodische Funktionen von x und y mit Perioden 1 sind. Setzen wir dann in die Gleichungen (5) $\psi_i(x,y)$ ein, erhalten wir eine Relation von der Form (3).

Wären alle Unterdeterminanten Null, könnten wir durch dieselbe Verfahrungsweise zeigen, dass schon zwischen $z_i^{(2)}(x,y), \ldots z_i^{(n)}(x,y)$ eine Relation von der Form (3) bestehen müsse u. s. w.

Also, wenn $D(x,y)$ nicht identisch Null ist, machen $z_i^{(l)}(x,y)$ ein Fundamentalsystem aus.

Wir können jetzt zeigen, dass wenn $z_i^{(l)}(x, y)$ ein Fundamentalsystem ausmachen, jede Lösung des Systems (1) auf folgende Weise dargestellt werden kann:

$$z_i(x, y) = \sum_{l=1}^{l=n} \Pi_l(x, y)\, z_i^{(l)}(x, y) \tag{6}$$

wobei $\Pi_l(x, y)$ periodische Funktionen von x und y mit Perioden 1 sind.

Um dieses zu zeigen, betrachten wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} z_i(x, y), & z_i^{(1)}(x, y), & \ldots, & z_i^{(n)}(x, y) \\ z_1(x, y), & z_1^{(1)}(x, y), & \ldots, & z_1^{(n)}(x, y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n(x, y), & z_n^{(1)}(x, y), & \ldots, & z_n^{(n)}(x, y) \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnen wir mit $\psi_i^{(l)}(x, y)$ die Unterdeterminante des Elementes $z_i^{(l)}(x, y)$ der ersten Zeile, erhalten wir:

$$z_i(x, y)\, D(x, y) = - z_i^{(1)}(x, y)\, \psi_i^{(1)}(x, y) - \cdots - z_i^{(n)}(x, y)\, \psi_i^{(n)}(x, y).$$

Aber unter Beachtung von (1) findet man, dass

$$\frac{\psi_i^{(l)}(x, y)}{D(x, y)}$$

periodische Funktionen von x und y mit Perioden 1 sind, woraus das Theorem hervorspringt.

Wir gehen jetzt dazu über, die Existenz eines Fundamentalsystems zu zeigen.

Zur Erleichterung der formalen Behandlung wenden wir Matrixbezeichnungen an und schreiben (1) folgendermassen

$$\begin{aligned} (z(x+1, y)) &= (z(x, y))\, S_1(x, y) \\ (z(x, y+1)) &= (z(x, y))\, S_2(x, y). \end{aligned} \tag{7}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} (z(x-1, y)) &= (z(x, y))\, S_1^{-1}(x-1, y) \\ (z(x, y-1)) &= (z(x, y))\, S_2^{-1}(x, y-1). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Koeffizienten von $S_1^{-1}(x-1, y)$ und $S_2^{-1}(x, y-1)$ mit $A_{ij}(x, y)$, bez. $B_{ij}(x, y)$.

Aus (7) erhalten wir durch Iteration

$$(z(x+\mu, y+\nu)) = (z(x, y))\, T_{\mu\nu}(x, y)$$

wobei

$$\begin{aligned}(z(x, y))\, T_{\mu\nu}(x, y) &= (z(x, y))\, S_1(x, y)\, S_1(x+1, y) \cdots \\ &\cdots S_1(x+\mu-1, y)\, S_2(x+\mu, y)\, S_2(x+\mu, y+1) \cdots \\ &\cdots S_2(x+\mu, y+\nu-1) = \\ &= (z(x, y))\, S_2(x, y)\, S_2(x, y+1) \cdots \\ &\cdots S_2(x, y+\nu-1)\, S_1(x, y+\nu)\, S_1(x+1, y+\nu) \cdots \\ &\cdots S_1(x+\mu-1, y+\nu)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(z(x, y))\, T_{-\mu,-\nu}(x, y) &= (z(x, y))\, S_1^{-1}(x-1, y)\, S_1^{-1}(x-2, y) \cdots \\ &\cdots S_1^{-1}(x-\mu, y)\, S_2^{-1}(x-\mu, y-1) \cdots S_2^{-1}(x-\mu, y-\nu) = \\ &= (z(x, y))\, S_2^{-1}(x, y-1)\, S_2^{-1}(x, y-2) \cdots \\ &\cdots S_2^{-1}(x, y-\nu)\, S_1^{-1}(x-1, y-\nu) \cdots S_1^{-1}(x-\mu, y-\nu);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(z(x, y))\, T_{\mu,-\nu}(x, y) &= (z(x, y))\, S_1(x, y)\, S_1(x+1, y) \cdots \\ &\cdots S_1(x+\mu-1, y)\, S_2^{-1}(x+\mu, y-1)\, S_2^{-1}(x+\mu, y-2) \cdots \\ &\cdots S_2^{-1}(x+\mu, y-\nu) = \\ &= (z(x, y))\, S_2^{-1}(x, y-1)\, S_2^{-1}(x, y-2) \cdots \\ &\cdots S_2^{-1}(x, y-\nu)\, S_1(x, y-\nu)\, S_1(x+1, y-\nu) \cdots \\ &\cdots S_1(x+\mu-1, y-\nu);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(z(x, y))\, T_{-\mu,\nu}(x, y) &= (z(x, y))\, S_1^{-1}(x-1, y)\, S_1^{-1}(x-2, y) \cdots \\ &\cdots S_1^{-1}(x-\mu, y)\, S_2(x-\mu, y)\, S_2(x-\mu, y+1) \cdots \\ &\cdots S_2(x-\mu, y+\nu-1) = \\ &= (z(x, y))\, S_2(x, y)\, S_2(x, y+1) \cdots S_2(x, y+\nu-1)\, S_1^{-1}(x-1, y+\nu) \cdots \\ &\cdots S_1^{-1}(x-\mu, y+\nu).\end{aligned}$$

Aus diesen Definitionen erhalten wir die inversen Substitutionen:

$$\begin{aligned}(z(x+\mu, y+\nu))\, T_{\mu,\nu}^{-1}(x, y) &= (z(x, y))\, S_2^{-1}(x+\mu, y+\nu-1)\, S_2^{-1}(x+\mu, y+\nu-2) \cdots \\ &\quad \cdots S_2^{-1}(x+\mu, y)\, S_1^{-1}(x+\mu-1, y) \cdots S_1^{-1}(x, y) = \\ &= (z(x, y))\, S_1^{-1}(x+\mu-1, y+\nu)\, S_1^{-1}(x+\mu-2, y+\nu) \cdots \\ &\quad \cdots S_1^{-1}(x, y+\nu)\, S_2^{-1}(x, y+\nu-1) \cdots S_2^{-1}(x, y)\end{aligned}$$

u. s. w.

Wir setzen jetzt

$$(z(x, y)) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} (f(x+\mu, y+\nu))\, T_{\mu\nu}^{-1}(x, y); \tag{8}$$

oder wenn wir mit $K_{ij}^{(\mu,\nu)}(x, y)$ die Koeffizienten von $T_{\mu,\nu}^{-1}(x, y)$ bezeichnen

$$z_i(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \sum_{j=1}^{j=n} f_j(x+\mu, y+\nu)\, K_{ij}^{(\mu,\nu)}(x, y); \qquad i = 1, 2, \ldots n. \tag{9}$$

Wenn wir voraussetzen, dass diese Reihen absolut und gleichmässig konvergieren, können wir zeigen, dass sie dem Systeme (7) genügen.

Ersetzen wir nämlich x mit $x+1$, erhalten wir

$$\begin{aligned}(z(x+1, y)) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} (f(x+1+\mu, y+\nu))\, T_{\mu\nu}^{-1}(x+1, y) = \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} (f(x+\mu, y+\nu))\, T_{\mu-1,\nu}^{-1}(x+1, y).\end{aligned}$$

Aber jetzt hat man

$$T_{\mu-1,\nu}^{-1}(x+1, y)\, S_1^{-1}(x, y) = T_{\mu\nu}^{-1}(x, y).$$

Hieraus erhält man

$$(z(x+1, y)) = (z(x, y))\, S_1(x, y).$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$(z(x, y+1)) = (z(x, y))\, S_2(x, y).$$

Die so gebildeten Reihen genügen also dem Systeme (7) formalerweise. Wir wollen jetzt die Funktionen $f_i(x, y)$ so wählen, dass die Reihen absolut und gleichmässig konvergieren, und zwar so, dass ein Fundamentalsystem sich bildet.

Wir setzen $x = x' + ix''$, $y = y' + iy''$ und betrachten den vierdimensionalen Raum (x', x'', y', y''). Diesem Raum entschneiden wir das Gebiet, für welches $|x| + |y| \geq C$ gilt, wobei C eine beliebig grosse positive Zahl ist. Weiter entschneiden wir die Gebiete, die durch $|\varphi_r(x+\mu, y+\nu)| \leq \varepsilon$, $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ definiert sind, wobei ε eine positive Zahl ist, die beliebig klein gemacht werden kann. Dadurch erhalten wir ein einfach zusammenhängendes Gebiet, R genannt, in dem vierdimensionalen Raume (x', x'', y', y'').

Wir werden jetzt zeigen, dass wir $f_i(x, y)$ so wählen können, dass die Reihen (9) innerhalb des Gebietes R absolut und gleichmässig konvergieren.

Man kann immer eine Zahl M und eine Zahl p so beschaffen finden, dass

$$|a_{ij}(x+\mu, y+\nu)| < M(|\mu|+1)^p(|\nu|+1)^p; \quad |b_{ij}(x+\mu, y+\nu)| < M(|\mu|+1)^p(|\nu|+1)^p$$
$$|A_{ij}(x+\mu, y+\nu)| < M(|\mu|+1)^p(|\nu|+1)^p; \quad |B_{ij}(x+\mu, y+\nu)| < M(|\mu|+1)^p(|\nu|+1)^p$$

wenn x und y innerhalb des Gebietes R sind.

Die Koeffizienten von $T_{\mu\nu}^{-1}(x, y)$, $K_{ij}^{(\mu,\nu)}(x, y)$, genügen dann der folgenden Ungleichheit:

$$|K_{ij}^{(\mu,\nu)}(x, y)| < (M.n)^{|\mu|+|\nu|}(1.2\ldots|\mu|)^p(1.2\ldots|\nu|)^p$$
$$< (M.n)^{|\mu|+|\nu|}e^{(p+\varepsilon)(|\mu|\log|\mu|+|\nu|\log|\nu|)}.$$

Wir wählen dann

$$f_i(x, y) = \frac{\sin\pi(x-a)}{\pi(x-a)} \cdot \frac{\sin\pi(y-b)}{\pi(y-b)} e^{-[(x-a)^2+(y-b)^2]}; \quad i = l$$
$$f_i(x, y) = 0 \qquad\qquad i \neq l$$

wobei (a, b) innerhalb des Gebietes R gelegen ist.

Durch diese Wahl von $f_i(x, y)$ sieht man unmittelbar, dass die Reihen (9) innerhalb des Gebietes R absolut und gleichmässig konvergieren.

Wenn wir jetzt l die Zahlen 1, 2, ... n durchlaufen lassen, erhalten wir n Lösungen $z_i^{(l)}(x, y)$, deren Determinante in dem Punkte $x = a$, $y = b$ den Wert 1 annimmt und folglich nicht identisch verschwinden kann. Die Funktionen $z_i^{(l)}(x, y)$, $l = 1, 2, \ldots n$, machen dann ein Fundamentalsystem von Lösungen aus. Sie sind analytische Funktionen innerhalb des Gebietes R und können folglich nur die singulären Stellen des Systems (1) als singuläre Stellen haben. Die Existenz eines Fundamentalsystems des Systems (1) ist somit gezeigt.

II.

Wir betrachten jetzt ein System wie das folgende:

$$\tag{10} \begin{aligned} z(x+2, y) &= a_1(x, y)z(x+1, y+1) + a_2(x, y)z(x+1, y) + a_3(x, y)z(x, y+1) + \\ &\quad + a_4(x, y)z(x, y) \\ z(x, y+2) &= b_1(x, y)z(x+1, y+1) + b_2(x, y)z(x+1, y) + b_3(x, y)z(x, y+1) + \\ &\quad + b_4(x, y)z(x, y) \end{aligned}$$

wobei $a_i(x, y)$ und $b_i(x, y)$ rationale Funktionen von x und y sind. Es ist leicht zu zeigen, dass die Lösung eines solchen Systems auf die Lösung eines Systems (1) zurückgeführt werden kann.

Untersuchen wir unter welchen Bedingungen die Gleichungen (10) kompatibel sind.

In der ersten Gleichung ersetzen wir y mit $y+1$ und in der zweiten x mit $x+1$. In den so gebildeten Gleichungen ersetzen wir $z(x, y+2)$ und $z(x+2, y)$ mit Ausdrücken, die uns (10) zu Handen geben. Wir erhalten dadurch zwei Gleichungen, aus denen $z(x+2, y+1)$ und $z(x+1, y+2)$ bestimmt werden können, wenn nicht $a_1(x, y+1)\, b_1(x+1, y) = 1$ ist, was zunächst vorausgesetzt wird. Das Resultat sei:

$$\tag{11} \begin{aligned} z(x+2, y+1) &= c_1(x, y)z(x+1, y+1) + c_2(x, y)z(x+1, y) + c_3(x, y)z(x, y+1) + \\ &\quad + c_4(x, y)z(x, y) \\ z(x+1, y+2) &= d_1(x, y)z(x+1, y+1) + d_2(x, y)z(x+1, y) + d_3(x, y)z(x, y+1) + \\ &\quad + d_4(x, y)z(x, y). \end{aligned}$$

Ersetzen wir hier in der ersten Gleichung y mit $y+1$ und in der zweiten x mit $x+1$, und ersetzen wir in den so gebildeten Gleichungen $z(x+1, y+2)$, $z(x, y+2)$, $z(x+2, y+1)$, $z(x+2, y)$ mit Ausdrücken, aus den Gleichungen (10) und (11) geholt, und stellen die Forderung auf, dass, wenn die beiden rechten Membra einander gleichgesetzt werden, die Gleichsetzung zur Identität führen soll, so erhalten wir die Kompatibilitätsbedingungen des Systems (10). Wir nehmen im folgenden an, dass diese Bedingungen vorhanden sind.

Wir setzen jetzt

$$z(x+1, y) = p(x, y)$$
$$z(x, y+1) = q(x, y)$$
$$z(x+1, y+1) = s(x, y)$$

und erhalten das System:

$$(12) \quad \begin{aligned} z(x+1, y) &= p(x, y) \\ p(x+1, y) &= a_1(x, y)s(x, y) + a_2(x, y)p(x, y) + a_3(x, y)q(x, y) + a_4(x, y)z(x, y) \\ q(x+1, y) &= s(x, y) \\ s(x+1, y) &= c_1(x, y)s(x, y) + c_2(x, y)p(x, y) + c_3(x, y)q(x, y) + c_4(x, y)z(x, y) \\ z(x, y+1) &= q(x, y) \\ p(x, y+1) &= s(x, y) \\ q(x, y+1) &= b_1(x, y)s(x, y) + b_2(x, y)p(x, y) + b_3(x, y)q(x, y) + b_4(x, y)z(x, y) \\ s(x, y+1) &= d_1(x, y)s(x, y) + d_2(x, y)p(x, y) + d_3(x, y)q(x, y) + d_4(x, y)z(x, y). \end{aligned}$$

Aber dieses System ist von der Form (1). Stellen wir jetzt die Forderung auf, dass die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} c_3(x, y), & a_3(x, y) \\ c_4(x, y), & a_4(x, y) \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} d_2(x, y), & b_2(x, y) \\ d_4(x, y), & b_4(x, y) \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwinden, können wir von der Behandlung des Systems (1) Gebrauch machen. Bei Ausrechnung von $c_3(x, y)$, $c_4(x, y)$, $d_2(x, y)$, $d_4(x, y)$ finden wir, dass die Bedingungen mit folgenden identisch sind:

$$a_3(x, y+1)\,[a_3(x, y)b_4(x, y) - b_3(x, y)a_4(x, y)] - a_4(x, y)a_4(x, y+1) \neq 0$$

und

$$b_2(x+1, y)\,[b_2(x, y)a_4(x, y) - a_2(x, y)b_4(x, y)] - b_4(x, y)b_4(x+1, y) \neq 0.$$

Vorausgesetzt dass diese Bedingungen erfüllt sind, können wir schliessen, dass das System (10) ein Fundamentalsystem von Lösungen: $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$, $z_3(x, y)$, $z_4(x, y)$ besitzt, und dass jede andere Lösung auf folgende Weise dargestellt werden kann:

$$z(x, y) = \Pi_1(x, y)z_1(x, y) + \Pi_2(x, y)z_2(x, y) + \Pi_3(x, y)z_3(x, y) + \Pi_4(x, y)z_4(x, y)$$

wobei $\Pi_i(x, y)$ periodische Funktionen von x und y mit Perioden 1 sind. $z_i(x, y)$ sind die Elemente eines Fundamentalsystems, wenn die Determinante

$$D_1(x, y) = \begin{vmatrix} z_1(x, y), & z_2(x, y), & z_3(x, y), & z_4(x, y) \\ z_1(x+1, y), & z_2(x+1, y), & z_3(x+1, y), & z_4(x+1, y) \\ z_1(x, y+1), & z_2(x, y+1), & z_3(x, y+1), & z_4(x, y+1) \\ z_1(x+1, y+1), & z_2(x+1, y+1), & z_3(x+1, y+1), & z_4(x+1, y+1) \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet.

Betrachten wir jetzt den Fall:

$$a_1(x, y+1)\, b_1(x+1, y) = 1\,.$$

Anstatt (11) erhalten wir in diesem Falle nur eine Gleichung, die $z(x+1, y+1)$, $z(x+1, y)$, $z(x, y+1)$ und $z(x, y)$ enthält. Diese Gleichung ist eine Konsekvenz von (10). Wenn wir hier $z(x+1, y+1)$ lösen und den so erhaltenen Wert in (10) einsetzen, erhalten wir das System:

$$\begin{aligned} z(x+2, y) &= \bar{a}_1(x, y) z(x+1, y) + \bar{a}_2(x, y) z(x, y+1) + \bar{a}_3(x, y) z(x, y) \\ z(x, y+2) &= \bar{b}_1(x, y) z(x+1, y) + \bar{b}_2(x, y) z(x, y+1) + \bar{b}_3(x, y) z(x, y) \\ z(x+1, y+1) &= \bar{c}_1(x, y) z(x+1, y) + \bar{c}_2(x, y) z(x, y+1) + \bar{c}_3(x, y) z(x, y). \end{aligned} \tag{13}$$

Wir gelangen hier an die Kompatibilitetsbedingungen, wenn wir in der ersten Gleichung statt y $y+1$ und in der dritten statt x $x+1$ setzen, und wenn wir unter Anwendung von (13), die Identitätsbedingungen der rechten Membra aufstellen, und weiter x mit $x+1$ in der zweiten und y mit $y+1$ in der dritten ersetzen, und auf die vorige Weise verfahren. Wir nehmen an, dass diese Bedingungen erfüllt sind.

Wir setzen dann

$$\begin{aligned} z(x+1, y) &= p(x, y) \\ z(x, y+1) &= q(x, y) \end{aligned}$$

und erhalten folgendes System:

$$\begin{aligned} z(x+1, y) &= p(x, y) \\ p(x+1, y) &= \bar{a}_1(x, y) p(x, y) + \bar{a}_2(x, y) q(x, y) + \bar{a}_3(x, y) z(x, y) \\ q(x+1, y) &= \bar{c}_1(x, y) p(x, y) + \bar{c}_2(x, y) q(x, y) + \bar{c}_3(x, y) z(x, y) \end{aligned} \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
z(x, y+1) &= q(x, y) \\
p(x, y+1) &= \bar{c}_1(x, y)p(x, y) + \bar{c}_2(x, y)q(x, y) + \bar{c}_3(x, y)z(x, y) \\
q(x, y+1) &= \bar{b}_1(x, y)p(x, y) + \bar{b}_2(x, y)q(x, y) + \bar{b}_3(x, y)z(x, y)
\end{aligned}
$$

das wieder dieselbe Form wie das System (1) hat. Unter Voraussetzung, dass $a_1(x, y+1) \,.\, b_1(x+1, y) = 1$, und dass die Determinanten:

$$
\begin{vmatrix} \bar{a}_2(x, y), & \bar{a}_3(x, y) \\ \bar{c}_2(x, y), & \bar{c}_3(x, y) \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \bar{c}_1(x, y), & \bar{c}_3(x, y) \\ \bar{b}_1(x, y), & \bar{b}_3(x, y) \end{vmatrix}
$$

nicht identisch verschwinden, können wir dann schliessen, dass das System (10) drei linear unabhängige Lösungen hat, und dass jede andere Lösung folgende Form haben muss:

$$
z(x, y) = \Pi_1(x, y)z_1(x, y) + \Pi_2(x, y)z_2(x, y) + \Pi_3(x, y)z_3(x, y)
$$

wobei $\Pi_i(x, y)$ periodische Funktionen von x und y mit Perioden 1 sind. $z_i(x, y)$ sind linear unabhängig, wenn die Determinante

$$
D_2(x, y) = \begin{vmatrix} z_1(x, y), & z_2(x, y), & z_3(x, y) \\ z_1(x+1, y), & z_2(x+1, y), & z_3(x+1, y) \\ z_1(x, y+1), & z_2(x, y+1), & z_3(x, y+1) \end{vmatrix}
$$

nicht identisch verschwindet.

III.

Versucht man in Einzelheiten die Lösungen des Systems (10) zu untersuchen, wird man finden, dass die erhaltenen Lösungen für eine solche Untersuchung wenig geeignet sind. Man muss eine andere Methode herausfinden. Es liegt nahe an der Hand, die Methode zu generalisieren, die Nörlund[1] beim Studium normaler Differenzengleichungen angewandt hat. Bezeichne $z(x)$ eine Lösung einer solchen Gleichung. Bei Setzung

$$
z(x) = \int t^{x-1} v(t)\, dt
$$

[1] Siehe darüber Nörlund: Differenzenrechnung (1924).

kann man, wenn man den Integrationsweg passend wählt, aufweisen, dass $z(x)$ eine Lösung der Differenzengleichung ist, vorausgesetzt dass $v(t)$ einer gewissen Differentialgleichung genügt. Das Problem ist dann wesentlich auf die Lösung von Differentialgleichungen zurückgeführt.

Will man jetzt eine Generalisierung dieser Methode suchen, empfiehlt es sich zu setzen:

$$z(x, y) = \int\int t^{x-1} s^{y-1} v(t, s) dt ds$$

und das Integrationsgebiet so zu bestimmen, dass wenn $v(t, s)$ einem gewissen Systeme linearer partieller Differentialgleichungen genügt, $z(x, y)$ einem Systeme von der Form (10) genügt. Man begegnet aber hier der Schwierigkeit, dass die Theorie desjenigen Systems partieller Differentialgleichungen, zu dem man in dieser Weise kommt, nicht so in Einzelheiten herausgearbeitet ist, wie die Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Ohne eine Durcharbeitung der Theorie dieser Gleichungen vorzunehmen, dürfte man kaum allgemeingültige Resultate erzielen. Ich begnüge mich damit, einen Spezialfall zu untersuchen, um die Methode zu beleuchten. Die Gleichung, die ich vornehmen werde, ist als eine natürliche Generalisierung der hypergeometrischen Differenzengleichung zu betrachten. Gerade wie diese auf die hypergeometrische Differentialgleichung zurückgeführt werden kann, kann die hier zu untersuchende Gleichung auf das System partieller Differentialgleichungen zurückgeführt werden, denen von der von Appell definierten hypergeometrischen Funktion $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', t, s)$ genügt wird.

1. Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen, dem von $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', t, s)$ genügt wird.

Ehe wir dazu übergehen, die hypergeometrischen Differenzengleichungen mit zwei unabhängigen Variablen zu untersuchen, wird es notwendig sein, eine Untersuchung der Lösungen folgender Gleichungen vorzunehmen:

$$(15) \qquad \begin{aligned} t(1-t)v''_{t^2} - tsv''_{ts} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)t]\, v'_t - \beta s v'_s - \alpha\beta v = 0 \\ s(1-s)v''_{s^2} - tsv''_{ts} + [\gamma' - (\alpha+\beta'+1)s]\, v'_s - \beta' t v'_t - \alpha\beta' v = 0. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist von Appell untersucht worden. Die singulären Stellen sind:

$$\left.\begin{matrix} t=0 \\ s=a \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} t=1 \\ s=a \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} t=\infty \\ s=a \end{matrix}\right\} \quad t=1-s \quad \left.\begin{matrix} s=0 \\ t=b \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} s=1 \\ t=b \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} s=\infty \\ t=b \end{matrix}\right\}$$

wobei a und b beliebige komplexe Zahlen sind. Appell hat die Lösungen von (15) in der Form von Reihenentwicklungen gegeben, die in der Nähe von $t=0$, $s=0$ konvergent sind. Im folgenden werden auch solche Reihenentwicklungen nötig sein, die innerhalb anderer Gebiete konvergent sind. Wir werden diese durch Transformation der von Appell gegebenen Lösungen erhalten.

Wir setzen

$$v(t, s) = t^\lambda s^\mu \bar{v}(t, s). \tag{16}$$

Hier können λ und μ so bestimmt werden, dass auch $\bar{v}(t, s)$ einem Systeme von der Form (15) genügt.

Setzen wir nämlich in (15) statt $v(t, s)$ den Ausdruck (16) ein, erhalten wir, nachdem wir den Faktor $t^\lambda s^\mu$ unterdrückt haben

$$t(1-t)\bar{v}''_{t^2} - ts\bar{v}''_{ts} + [2\lambda+\gamma-(2\lambda+\mu+\alpha+\beta+1)t]\,\bar{v}'_t - (\lambda+\beta)s\bar{v}'_s -$$
$$- \left[(\lambda+\mu+\alpha)(\lambda+\beta) - \frac{\lambda(\lambda+\gamma-1)}{t}\right]\bar{v} = 0$$

$$s(1-s)\bar{v}''_{s^2} - ts\bar{v}''_{ts} + [2\mu+\gamma'-(2\mu+\lambda+\alpha+\beta'+1)s]\bar{v}'_s - (\mu+\beta')t\bar{v}'_t -$$
$$- \left[(\lambda+\mu+\alpha)(\mu+\beta') - \frac{\mu(\mu+\gamma'-1)}{s}\right]\bar{v} = 0.$$

Dieses System nimmt dieselbe Form an wie (15), wenn

$$\lambda(\lambda+\gamma-1)=0 \quad \text{und} \quad \mu(\mu+\gamma'-1)=0$$

was uns die vier Kombinationen gibt:

$$\left.\begin{matrix} \lambda=0 \\ \mu=0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} \lambda=1-\gamma \\ \mu=0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} \lambda=0 \\ \mu=1-\gamma' \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} \lambda=1-\gamma \\ \mu=1-\gamma' \end{matrix}\right\}.$$

Die erste Kombination führt uns wieder zum Systeme (15). Die zweite Kombination führt uns zum folgenden Systeme

$$t(1-t)\bar{v}''_{t^2}-ts\bar{v}''_{ts}+[2-\gamma-(\alpha+1-\gamma+\beta+1-\gamma+1)t]\bar{v}'_t-$$
$$-(\beta+1-\gamma)s\bar{v}'_s-(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)\bar{v}=0$$
$$s(1-s)\bar{v}''_{s^2}-ts\bar{v}''_{ts}+[\gamma'-(\alpha+1-\gamma+\beta'+1)s]\bar{v}'_s-\beta' t\bar{v}'_t-(\alpha+1-\gamma)\beta'\bar{v}=0.$$

Aber dieses letztere ist mit (15) identisch, wenn wir in (15) α mit $\alpha+1-\gamma$, β mit $\beta+1-\gamma$ und γ mit $2-\gamma$ ersetzen. Wir schliessen daraus, dass, wenn $v(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',t,s)$ eine Lösung von (15) ist, auch $t^{1-\gamma}v(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,\beta',2-\gamma,\gamma',t,s)$ eine Lösung ist. Die dritte und vierte Kombination führt uns auf dieselbe Weise zu den Lösungen:

$$s^{1-\gamma'}v(\alpha+1-\gamma',\beta,\beta'+1-\gamma',\gamma,2-\gamma',t,s) \quad \text{und}$$
$$t^{1-\gamma}s^{1-\gamma'}v(\alpha+2-\gamma-\gamma',\beta+1-\gamma,\beta'+1-\gamma',2-\gamma,2-\gamma',t,s).$$

Setzen wir

$$v(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',t,s)=F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',t,s)=$$
$$=\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)}t^m s^n$$

so erhalten wir die vier von Appell gegebenen Lösungen. Wir bezeichnen diese mit v_1, v_2, v_3 und v_4. Also:

$$\begin{aligned} &v_1=F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',t,s)\\ &v_2=t^{1-\gamma}F_2(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,\beta',2-\gamma,\gamma',t,s)\\ (17)\qquad &v_3=s^{1-\gamma'}F_2(\alpha+1-\gamma',\beta,\beta'+1-\gamma',\gamma,2-\gamma',t,s)\\ &v_4=t^{1-\gamma}s^{1-\gamma'}F_2(\alpha+2-\gamma-\gamma',\beta+1-\gamma,\beta'+1-\gamma',2-\gamma,2-\gamma',t,s).\end{aligned}$$

Diese Lösungen sind linear unabhängig, und Appell hat gezeigt, dass jede andere Lösung von (15) auf folgende Weise geschrieben werden kann:

$$(18)\qquad v(t,s)=Av_1+Bv_2+Cv_3+Dv_4$$

wobei A, B, C und D beliebige Konstanten sind.

Die vier Lösungen v_1, v_2, v_3 und v_4 sind durch Reihenentwicklungen dargestellt, die konvergent sind, wenn $|t|+|s|<1$.

Wir können jetzt v_1 auf folgende Weise schreiben:

$$v_1=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha,n)(\beta',n)}{(\gamma',n)(1,n)}F(\alpha+n,\beta,\gamma,t)s^n.$$

Ebenso können wir v_2 folgendermassen schreiben:

$$v_2 = t^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma, n)(\beta', n)}{(\gamma' n)(1, n)} F(\alpha+1-\gamma+n, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, t) s^n.$$

Aber jetzt hat man

$$F(\alpha+n, \beta, \gamma, t) - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+1+n-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta)} t^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma+n, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, t) =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha+n+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+n+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} F(\alpha+n, \beta, \alpha+n+\beta-\gamma+1, 1-t).$$

Kombinieren wir nun v_1 und v_2, erhalten wir folglich:

$$v_1 - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} v_2 = \frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} \cdot$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta', n)(\alpha+1-\gamma, n)}{(\alpha+\beta+1-\gamma, n)(\gamma', n)(1, n)} F(\alpha+n, \beta, \alpha+n+\beta-\gamma+1, 1-t) s^n =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, n+m)(\beta, m)(\beta', n)(\alpha+1-\gamma, n)}{(\alpha+\beta+1-\gamma, n+m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} (1-t)^m s^n.$$

Wir setzen

$$(19) \qquad v_5 = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)(\alpha+1-\gamma, n)}{(\alpha+\beta+1-\gamma, m+n)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} (1-t)^m s^n.$$

Zwischen v_1, v_2 und v_5 besteht dann folgende Relation:

$$(20) \qquad v_1 - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} v_2 = \frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} v_5.$$

Es ist leicht festzustellen, dass die Reihe v_5 konvergiert, wenn

$$|1-t| < 1, \quad |s| < 1.$$

Da v_1 und v_2 Lösungen von (15) sind, ist auch v_5 eine Lösung.

Auf analoge Weise können wir durch Kombination von v_3 und v_4 eine neue Lösung v_6 erhalten:

$$(21)\qquad v_6 = s^{1-\gamma'} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma', m+n)(\beta, m)(\beta'+1-\gamma', n)(\alpha+2-\gamma-\gamma', n)}{(\alpha+\beta+2-\gamma-\gamma', m+n)(2-\gamma', n)(1, m)(1, n)} (1-t)^m s^n.$$

Zwischen v_3, v_4 und v_6 besteht folgende Relation:

$$(22)\qquad v_3 - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+2-\gamma-\gamma')\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma')\Gamma(\beta)} v_4 = \frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha+2-\gamma-\gamma')}{\Gamma(\alpha+\beta+2-\gamma-\gamma')\Gamma(1-\gamma)} v_6.$$

v_6 wird auch direkt aus v_5 dadurch erhalten, dass man in dieser α mit $\alpha+1-\gamma'$, β' mit $\beta'+1-\gamma'$, γ' mit $2-\gamma'$ ersetzt und schliesslich mit $s^{1-\gamma'}$ multipliziert. Das Konvergenzgebiet ist auch hier

$$|1-t| < 1, \quad |s| < 1.$$

Aus v_1 und v_2 ist auch eine andere Lösung zu bekommen. Man hat nämlich

$$F(\alpha+n, \beta, \gamma, t) - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\alpha-n)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-n)\Gamma(\gamma-\beta)} t^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma+n, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, t) =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\alpha-n)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta-n)\Gamma(1-\gamma)} (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-n} F(\gamma-\alpha-n, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta-n, 1-t).$$

Wir erhalten, wenn wir von der Gleichung

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

Gebrauch machen:

$$v_1 - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} v_2 = \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)} (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta}\,.$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma, n)(\beta', n)(\gamma-\beta, m)\Gamma(\gamma-\alpha-n+m)}{(\gamma', n)(1, n)(1, m)\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta-n+m)} (1-t)^m \left(\frac{s}{1-t}\right)^n.$$

Wir setzen

$$(23)\qquad v_7 = \frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta}\,.$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma, n)(\beta', n)(\gamma-\beta, m)\Gamma(\gamma-\alpha-n+m)}{(\gamma', n)(1, n)(1, m)\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta-n+m)} (1-t)^m \left(\frac{s}{1-t}\right)^n.$$

Zwischen v_1, v_2 und v_7 besteht folgende Relation:

$$(24)\qquad v_1 - \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\,v_2 = \frac{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)}\,v_7 .$$

Die Reihenentwicklung v_7 konvergiert, wenn

$$|1-t| < 1, \quad \left|\frac{s}{1-t}\right| < 1 .$$

v_7 ist auch eine Lösung von (15). Aus v_7 lässt sich noch eine Lösung v_8 erzielen, wenn wir in v_7 α mit $\alpha+1-\gamma'$, β' mit $\beta'+1-\gamma'$ und γ' mit $2-\gamma'$ ersetzen und zuletzt mit $s^{1-\gamma'}$ multiplizieren. Wir erhalten

$$(25)\qquad v_8 = \frac{\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-1)}(1-t)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-1} .$$

$$\cdot\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha+2-\gamma-\gamma',n)(\beta'+1-\gamma',n)(\gamma-\beta,m)\,\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-1-n+m)}{(2-\gamma',n)\,(1,n)\,(1,m)\,\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-n+m)}(1-t)^m\left(\frac{s}{1-t}\right)^n .$$

Zwischen v_3, v_4 und v_8 besteht folgende Relation:

$$(26)\qquad v_3 - \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\gamma'-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-1)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\,v_4 = \frac{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\gamma'-\alpha)}{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta)}\,v_8 .$$

v_8 konvergiert innerhalb desselben Gebietes wie v_7. Die Lösungen v_5, v_6, v_7 und v_8 sind linear unabhängig und machen somit ein Fundamentalsystem von Lösungen von (15) aus. Wir stellen auch fest, dass für reelle t und s Konvergenz vorhanden ist, jedenfalls wenn

$$t > 0, \quad s > 0, \quad t+s < 1 .$$

Wenn wir in v_5, v_6, v_7 und v_8 t und s, β und β', γ und γ' permutieren, erhalten wir ein drittes Fundamentalsystem von Lösungen:

$$v_9, \quad v_{10}, \quad v_{11}, \quad v_{12}$$

die auch konvergent sind, wenn $t > 0$, $s > 0$, $t+s < 1$.

Wir arbeiten jetzt Lösungen heraus, die konvergent sind, wenn $s<0$, $t>1$, $t+s>1$ oder wenn $t<0$, $s>1$, $t+s>1$. Man hat

$$F(\alpha+n,\beta,\gamma,t)-\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+1+n-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta)}t^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma+n,\beta+1-\gamma,2-\gamma,t)=$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha+n+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma+n)\Gamma(1-\gamma)}t^{-\alpha-n}F\left(\alpha+n,\alpha+1-\gamma+n,\alpha+\beta+1-\gamma+n,\frac{t-1}{t}\right).$$

Hieraus erhalten wir

$$v_1-\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}v_2=t^{-\alpha}\frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}.$$

$$.\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\alpha+1-\gamma,m+n)(\beta',n)}{(\alpha+\beta+1-\gamma,m+n)(\gamma',n)(1,n)(1,m)}\left(\frac{t-1}{t}\right)^m\left(\frac{s}{t}\right)^n.$$

Die Doppeltreihe in dem rechten Membrum ist konvergent, wenn

$$\left|\frac{t-1}{t}\right|+\left|\frac{s}{t}\right|<1.$$

Wir können aus dieser Doppeltreihe eine andere Entwicklung erhalten, die unserem Zweck mehr dienlich ist. Wir setzen $m+n=p$ und schreiben die Doppeltreihe folgendermassen:

$$t^{-\alpha}\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{n=0}^{n=p}\frac{(\alpha,p)(\alpha+1-\gamma,p)(\beta',n)(-p,n)}{(\alpha+\beta+1-\gamma,p)(\gamma',n)(1,n)(1,p)}\left(\frac{t-1}{t}\right)^p\left(\frac{s}{1-t}\right)^n=$$

$$=t^{-\alpha}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{(\alpha,p)(\alpha+1-\gamma,p)}{(\alpha+\beta+1-\gamma,p)(1,p)}F\left(-p,\beta',\gamma',\frac{s}{1-t}\right)\left(\frac{t-1}{t}\right)^p.$$

Aber jetzt hat man

$$F\left(-p,\beta',\gamma',\frac{s}{1-t}\right)=\left(\frac{t+s-1}{t-1}\right)^{\gamma'-\beta'+p}F\left(\gamma'+p,\gamma'-\beta',\gamma',\frac{s}{1-t}\right).$$

Die Doppeltreihe bekommt somit folgenden Ausdruck, wenn wir m statt p schreiben:

$$(27)\qquad v_{13}=t^{-\alpha}\left(\frac{t+s-1}{t-1}\right)^{\gamma'-\beta'}.$$

$$.\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha,m)(\alpha+1-\gamma,m)(\gamma',m+n)(\gamma'-\beta',n)}{(\alpha+\beta+1-\gamma,m)(\gamma',m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)}\left(\frac{t+s-1}{t}\right)^m\left(\frac{s}{1-t}\right)^n.$$

Diese Reihenentwicklung ist konvergent, wenn $\left|\frac{t+s-1}{t}\right| + \left|\frac{s}{1-t}\right| < 1$, d. h. unter allen Umständen, wenn t und s reell sind, innerhalb des Gebietes:

$$s < 0, \quad t > 1, \quad t+s > 1.$$

Da

$$t^{-\alpha-n} F\left(\alpha+n, \alpha+n+1-\gamma, \alpha+n+\beta+1-\gamma, \frac{t-1}{t}\right) = F(\alpha+n, \beta, \alpha+n+\beta+1-\gamma, 1-t)$$

hat man

$$v_{13} = v_5$$

und zwischen v_1, v_2 und v_{13} besteht folgende Relation:

$$(28) \qquad v_1 - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} v_2 = \frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} v_{13}.$$

Ersetzen wir jetzt in v_{13} α mit $\alpha+1-\gamma'$, β' mit $\beta'+1-\gamma'$, γ' mit $2-\gamma'$ und multiplizieren wir mit $s^{1-\gamma'}$, erhalten wir eine neue Lösung:

$$(29) \qquad v_{14} = s^{1-\gamma'} t^{\gamma'-\alpha-1} \left(\frac{t+s-1}{t-1}\right)^{1-\beta'} \cdot$$
$$\cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma', m)(\alpha+2-\gamma-\gamma', m)(2-\gamma', m+n)(1-\beta', n)}{(\alpha+\beta+2-\gamma-\gamma', m)(2-\gamma', m)(2-\gamma', n)(1, m)(1, n)} \left(\frac{t+s-1}{t}\right)^m \left(\frac{s}{1-t}\right)^n$$

die konvergent ist innerhalb desselben Gebietes wie v_{13}.

Man hat

$$v_{14} = v_6$$

und zwischen v_3, v_4 und v_{14} besteht folgende Relation:

$$(30) \qquad v_3 - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+2-\gamma-\gamma')\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma')\Gamma(\beta)} v_4 = \frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha+2-\gamma-\gamma')}{\Gamma(\alpha+\beta+2-\gamma-\gamma')\Gamma(1-\gamma)} v_{14}.$$

Weiter hat man

$$F(\alpha+n, \beta, \gamma, t) - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha-n)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha-n)} t^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma+n, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, t) =$$
$$= \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha-n)}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta-n+1)} t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\gamma-\alpha-n-\beta} F\left(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta-n, \frac{t-1}{t}\right).$$

Folglich hat man

$$v_1 - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} v_2 =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\gamma)} t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta} \, .$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta', n)\Gamma(1-\alpha-n)(\gamma-\beta, m)(1-\beta, m)}{(\gamma', n)(1, n)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta-n+1)(\gamma+1-\alpha-\beta-n, m)(1, n)} \left(\frac{t-1}{t}\right)^m \left(\frac{s}{1-t}\right)^n =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\gamma)} t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta} \, .$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sin\pi(\alpha+\beta-\gamma-m)(\beta', n)(\gamma-\beta, m)(1-\beta, m)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+n-m)}{\pi \, . \, (\gamma', n)(1, n)(1, m)} \left(\frac{t-1}{t}\right)^m \left(\frac{s}{1-t}\right)^n =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)} t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta} \, .$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\gamma-\beta, m)(1-\beta, m)}{(\gamma+1-\alpha-\beta, m)(1, m)} F\left(\alpha+\beta-\gamma-m, \beta', \gamma', \frac{s}{1-t}\right)\left(\frac{t-1}{t}\right)^m .$$

Aber jetzt ist

$$F\left(\alpha+\beta-\gamma-m, \beta', \gamma', \frac{s}{1-t}\right) =$$

$$= \left(\frac{t+s-1}{t-1}\right)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+m} F\left(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta+m, \gamma'-\beta', \gamma', \frac{s}{1-t}\right) \cdot$$

Wir erhalten daraus

$$(31) \qquad v_1 - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} v_2 = \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)} v_{15}$$

wobei

$$(32) \qquad v_{15} = t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta}\left(\frac{t+s-1}{t-1}\right)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'} .$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta, m+n)(\gamma-\beta, m)(1-\beta, m)(\gamma'-\beta', n)}{(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta, m)(\gamma+1-\alpha-\beta, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} \left(\frac{t+s-1}{t}\right)^m \left(\frac{s}{1-t}\right)^n .$$

Die Reihenentwicklung (32) ist konvergent, wenn

$$\left|\frac{s}{1-t}\right| + \left|\frac{t+s-1}{t}\right| < 1$$

d. h. für reelle t und s, jedenfalls wenn

$$t > 1, \quad s < 0, \quad t+s > 1.$$

Vergleichen wir (24) und (31), finden wir

$$v_{15} = v_7.$$

Ersetzen wir jetzt in v_{15} α mit $\alpha+1-\gamma'$, β' mit $\beta'+1-\gamma'$, γ' mit $2-\gamma'$ und multiplizieren wir mit $s^{1-\gamma'}$, erhalten wir diese Lösung:

$$(33) \quad v_{16} = t^{\beta-\gamma} s^{1-\gamma'} (1-t)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-1} \left(\frac{t+s-1}{t-1}\right)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'}$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\gamma+1-\alpha-\beta, m+n)(\gamma-\beta, m)(1-\beta, m)(1-\beta', n)}{(\gamma+1-\alpha-\beta, m)(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta, m)(2-\gamma', n)(1, m)(1, n)} \left(\frac{t+s-1}{t}\right)^m \left(\frac{s}{1-t}\right)^n.$$

Zwischen v_3, v_4 und v_{16} besteht folgende Relation:

$$(34) \quad v_3 - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma'-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-1)} v_4 = \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma'-\alpha)}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta)} v_{16}.$$

Weiter hat man

$$v_{16} = v_8.$$

Die Lösungen v_{13}, v_{14}, v_{15} und v_{16} sind für reelle t und s konvergent, jedenfalls wenn $t > 1$, $s < 0$ und $t+s > 1$.

Wenn wir in diesen Lösungen β und β', γ und γ', t und s permutieren, erhalten wir vier Lösungen:

$$v_{17}, \; v_{18}, \; v_{19} \text{ und } v_{20}$$

deren Reihenentwicklungen jedenfalls konvergent sind, wenn

$$s > 1, \quad t < 0 \text{ und } t+s > 1.$$

Im folgenden wird es nötig sein, die Konvergenzverhältnisse gewisser Reihen zu kennen.

Betrachten wir jetzt folgende Reihe:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}(m+n)^a m^b n^c \tag{35}$$

wobei a, b und c reelle Zahlen sind. Wir stellen uns folgende Frage: Für welche Werte von a, b und c ist Konvergenz vorhanden? Um dieses zu untersuchen, verteilen wir die Glieder der Reihe auf zwei:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}(m+n)^a m^b n^c = \sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=m}(m+n)^a m^b n^c + \sum_{n=2}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=n-1}(m+n)^a m^b n^c.$$

Aber jetzt hat man

$$\sum_{n=1}^{n=m}(m+n)^a n^c = m^a \sum_{n=1}^{n=m}\left(1+\frac{n}{m}\right)^a n^c < Cm^a \sum_{n=1}^{n=m} n^c$$

wobei C eine positive Konstante ist.

Aber weiter ist

$$\sum_{n=1}^{n=m} n^c = O(m^{c+1}) \qquad \text{wenn} \quad c > -1$$

$$\sum_{n=1}^{n=m} n^c = O(\log m) \qquad \text{wenn} \quad c = -1$$

$$\sum_{n=1}^{n=m} n^c = O(1) \qquad \text{wenn} \quad c < -1.$$

Die erste Reihe konvergiert folglich unter der Bedingung, dass

$$a+b+c < -2 \qquad \text{wenn} \quad c > -1$$

$$a+b < -1 \qquad \text{»} \quad c \leq -1.$$

Auf dieselbe Weise lässt sich die zweite Reihe behandeln. Die Reihe (35) konvergiert folglich unter der Bedingung, dass

$$
\begin{array}{lllll}
a+b+c<-2 & \text{wenn} & c>-1 & \text{und} & b>-1 \\
a+c<-1 & \text{»} & c>-1 & \text{»} & b\leqq -1 \\
a+b<-1 & \text{»} & c\leqq -1 & \text{»} & b>-1 \\
\begin{cases} a+b<-1 \\ a+c<-1 \end{cases} & \text{»} & c\leqq -1 & \text{»} & b\leqq -1.
\end{array}
$$

Jetzt ziehen wir folgende Reihe in die Untersuchung hinein

$$
\sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty}{}' |m-n|^a m^b n^c \tag{36}
$$

wobei $'$ angibt, dass $m=n$ wegzulassen ist. a, b und c gelten immer als reelle Zahlen.

Wir verteilen die Reihe auf zwei, die eine mit Gliedern, wo $m>n$, die zweite mit Gliedern, wo $n>m$. In der ersteren setzen wir $m=n+p$, in der letzteren $n=m+q$, und erhalten so die zwei Reihen:

$$
\sum_{p=1}^{p=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} p^a (n+p)^b n^c, \quad \sum_{q=1}^{q=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} q^a (m+q)^c m^b.
$$

Aber jede von diesen Reihen ist von der Form (35). Folgendes Resultat ergibt sich nun:

Die Reihe (36) ist konvergent unter der Bedingung, dass:

$$
\begin{array}{lllll}
a+b+c<-2 & \text{wenn} & a>-1, & b>-1, & c>-1 \\
a+c<-1 & \text{»} & a>-1, & b\leqq -1, & c>-1 \\
a+b<-1 & \text{»} & a>-1, & b>-1, & c\leqq -1 \\
\begin{cases} a+b<-1 \\ a+c<-1 \end{cases} & \text{»} & a>-1, & b\leqq -1, & c\leqq -1 \\
b+c<-1 & \text{»} & a\leqq -1, & b>-1, & c>-1 \\
\begin{cases} a+b<-1 \\ b+c<-1 \end{cases} & \text{»} & a\leqq -1, & b>-1, & c\leqq -1 \\
\begin{cases} b+c<-1 \\ a+c<-1 \end{cases} & \text{»} & a\leqq -1, & b\leqq -1, & c>-1 \\
\text{immer} & \text{»} & a\leqq -1, & b\leqq -1, & c\leqq -1.
\end{array}
$$

2. Lösung der hypergeometrischen Differenzengleichungen mit zwei unabhängigen Variablen.

Wir betrachten jetzt folgendes Gleichungssystem:

$$(37)\quad \begin{aligned}
&(x+2-\beta)(x+y+2-\alpha)z(x+2,y)+(x+1-\beta)(x+y+2-\alpha)z(x+1,y+1)-\\
&\qquad -[(x+1-\beta)(x+y+1-\alpha)+(x+1)(x+2-\gamma)]z(x+1,y)-\\
&\qquad -x(x+1-\gamma)z(x,y+1)+x(x+1-\gamma)z(x,y)=0;\\
&(y+2-\beta')(x+y+2-\alpha)z(x,y+2)+(y+1-\beta')(x+y+2-\alpha)z(x+1,y+1)-\\
&\qquad -[(y+1-\beta')(x+y+1-\alpha)+(y+1)(y+2-\gamma')]z(x,y+1)-\\
&\qquad -y(y+1-\gamma')z(x+1,y)+y(y+1-\gamma')z(x,y)=0.
\end{aligned}$$

Wir setzen

$$(38)\qquad z(x,y)=\int\!\!\int t^{x-1}s^{y-1}v(t,s)\,dt\,ds$$

und behalten uns vor, später das Integrationsgebiet für unsere Zwecke zu gestalten.

Wir erhalten

$$(x+2)(x+3)z(x+2,y)=(x+2)(x+3)\int\!\!\int t^{x+1}s^{y-1}v(t,s)\,dt\,ds.$$

Durch teilweise Integration entsteht

$$\begin{aligned}(x+2)(x+3)z(x+2,y)=(x+3)\int t^{x+2}s^{y-1}v(t,s)\,ds-\int t^{x+3}s^{y-1}v'_t(t,s)\,ds+\\
+\int\!\!\int t^{x+3}s^{y-1}v''_{t^2}(t,s)\,dt\,ds.\end{aligned}$$

In die beiden ersten Integrale ist die Integrationsgrenze einzuführen.

Auf analoge Weise kann man die übrigen Glieder von (37) behandeln.

Das Endresultat wird folgendes:

$$\begin{aligned}
&(x+2-\beta)(x+y+2-\alpha)z(x+2,y)+(x+1-\beta)(x+y+2-\alpha)z(x+1,y+1)-\\
&\qquad -[(x+1-\beta)(x+y+1-\alpha)+(x+1)(x+2-\gamma)]z(x+1,y)-\\
&\qquad -x(x+1-\gamma)z(x,y+1)+x(x+1-\gamma)z(x,y)=V_1(x,y)-
\end{aligned}$$

$$-\int\int t^x s^{y-1}(t+s-1)\,[t(1-t)v''_{t^2}-tsv''_{ts}+$$
$$+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)t\}\,v'_t-\beta s v'_s-\alpha\beta v]\,dt\,ds;$$

(39)

$$(y+2-\beta')(x+y+2-\alpha)z(x,y+2)+(y+1-\beta')(x+y+2-\alpha)z(x+1,y+1)-$$
$$-[(y+1-\beta')(x+y+1-\alpha)+(y+1)(y+2-\gamma')]\,z(x,y+1)-$$
$$-y(y+1-\gamma')z(x+1,y)+y(y+1-\gamma')z(x,y)=V_2(x,y)-$$
$$-\int\int t^{x-1}s^y(t+s-1)\,[s(1-s)v''_{s^2}-tsv''_{ts}+$$
$$+\{\gamma'-(\alpha+\beta'+1)s\}\,v'_s-\beta' t v'_t-\alpha\beta' v]\,dt\,ds$$

wobei

$$V_1(x,y)=(x+2)\int t^{x+1}s^{y-1}(t+s-1)v(t,s)ds-\int t^{x+2}s^{y-1}(t+s-1)v'_t(t,s)ds+$$
$$+y\int t^{x+1}s^{y-1}(t+s-1)v(t,s)ds-\int t^{x+1}s^y(t+s-1)v'_t(t,s)dt-$$
$$-\beta\int t^x s^y(t+s-1)v(t,s)dt-(\alpha+\beta+1)\int t^{x+1}s^{y-1}(t+s-1)v(t,s)ds-$$
$$-(x+1)\int t^x s^{y-1}(t+s-1)v(t,s)ds+\int t^{x+1}s^{y-1}(t+s-1)v'_t(t,s)ds+$$
$$+\gamma\int t^x s^{y-1}(t+s-1)v(t,s)ds+\int t^{x+1}s^{y-1}(t+s-1)v(t,s)ds,$$

(40)

$$V_2(x,y)=(y+2)\int t^{x-1}s^{y+1}(t+s-1)v(t,s)dt-\int t^{x-1}s^{y+2}(t+s-1)v'_s(t,s)dt+$$
$$+x\int t^{x-1}s^{y+1}(t+s-1)v(t,s)dt-\int t^x s^{y+1}(t+s-1)v'_s(t,s)ds-$$
$$-\beta'\int t^x s^y(t+s-1)v(t,s)ds-(\alpha+\beta'+1)\int t^{x-1}s^{y+1}(t+s-1)v(t,s)dt-$$
$$-(y+1)\int t^{x-1}s^y(t+s-1)v(t,s)dt+\int t^{x-1}s^{y+1}(t+s-1)v'_s(t,s)dt+$$
$$+\gamma'\int t^{x-1}s^y(t+s-1)v(t,s)dt+\int t^{x-1}s^{y+1}(t+s-1)v(t,s)dt.$$

Wenn jetzt $v(t,s)$ dem Systeme

$$(41)\qquad \begin{aligned} &t(1-t)v''_{t^2}-tsv''_{ts}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)t]v'_t-\beta s v'_s-\alpha\beta v=0\\ &s(1-s)v''_{s^2}-tsv''_{ts}+[\gamma'-(\alpha+\beta'+1)s]v'_s-\beta' t v'_t-\alpha\beta' v=0 \end{aligned}$$

genügt, und weiter das Integrationsgebiet so gewählt ist, dass $V_1(x,y)=0$ und $V_2(x,y)=0$, dann genügt $z(x,y)$ dem Systeme (37).

Aber das System (41) ist identisch mit dem Systeme (15), dessen Lösungen oben untersucht worden sind. Diese lassen sich jetzt gebrauchen, um vermittelst (38) die Lösungen von (37) zu finden. Zunächst nehmen wir an, dass

$$v(t,s)=v_1$$

wobei

$$v_1=\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)}t^m s^n$$

die konvergent ist, wenn $|t|+|s|<1$. Wir gehen jetzt zu einer Untersuchung der Konvergenz der Reihe, wenn $s=1-t$ und $1\geq t\geq 0$. Wird das allgemeine Glied mit $A_{m,n}t^m(1-t)^n$ bezeichnet, so haben wir

$$|A_{m,n}t^m(1-t)^n|<C(m+n)^{\Re(\alpha)-1}m^{\Re(\beta-\gamma)}n^{\Re(\beta'-\gamma')}\frac{(m+n)!}{m!\,n!}t^m(1-t)^n$$

wobei C eine Konstante ist.

Möge jetzt ε die grösste von den Zahlen $\Re(\beta-\gamma)$ und $\Re(\beta'-\gamma')$ sein. Man hat nun

$$m^{\Re(\beta-\gamma)}n^{\Re(\beta'-\gamma')}<(m\,.\,n)^{\varepsilon}<\frac{(m+n)^{2\varepsilon}}{4^{\varepsilon}}$$

und erhält folglich

$$|A_{m,n}t^m(1-t)^n|<\frac{C}{4^{\varepsilon}}(m+n)^{2\varepsilon+\Re(\alpha-1)}\frac{(m+n)!}{m!\,n!}t^m(1-t)^n.$$

Aber ist $m+n=\mu$, haben wir

$$\sum_{m+n=\mu}\frac{m+n!}{m!\,n!}t^m(1-t)^n=1.$$

Wir schliessen dann, dass die Reihe v_1 innerhalb des Gebietes $t \geq 0$, $s \geq 0$, $t+s \leq 1$ absolut und gleichmässig konvergent ist, wenn $2\varepsilon + \Re(\alpha) < 0$. Es ist ersichtlich, dass die Konstanten α, β, β', γ und γ' sich immer so wählen lassen, dass, wenn $\Re(x)$ und $\Re(y)$ genügend gross sind, $V_1(x, y)$ und $V_2(x, y)$ Null sind, wenn wir als Integrationsgebiet von (38) das Gebiet:

$$t \geq 0, \quad s \geq 0, \quad t+s \leq 1$$

wählen. Nennen wir dieses Gebiet D.

Wir erhalten also folgende Lösung von (37)

$$z_1(x, y) = \iint\limits_D t^{x-1} s^{y-1} v_1(t, s)\, dt\, ds.$$

Aber die Reihenentwicklung von v_1 ist unter gewissen Bedingungen innerhalb des Gebietes D gleichmässig konvergent. Wir können gliedweise integrieren. Unter Beobachtung, dass man hat

$$\iint\limits_D t^{x-1} s^{y-1} t^m s^n\, dt\, ds = \frac{\Gamma(x+m)\,\Gamma(y+n)}{\Gamma(x+y+m+n+1)}$$

erhalten wir

$$z_1(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, m+n)\,(\beta, m)\,(\beta', n)\,(x, m)\,(y, n)}{(\gamma, m)\,(\gamma', n)\,(1, m)\,(1, n)\,(x+y+1, m+n)}.$$

Der absolute Betrag des allgemeinen Glieds ist kleiner als

$$C\,(m+n)^{\Re(\alpha-x-y-1)}\, m^{\Re(x+\beta-\gamma-1)}\, n^{\Re(y+\beta'-\gamma'-1)}$$

wobei C eine positive Konstante ist.

Aber eine Reihe mit diesem allgemeinen Glied ist von der Form (35). Wir können dann unmittelbar das Gebiet angeben, innerhalb dessen $z_1(x, y)$ absolut konvergiert. Wir finden, dass absolute Konvergenz vorhanden ist

für	$\Re(x+\beta-\gamma) > 0$	und	$\Re(y+\beta'-\gamma') > 0$,	wenn	$\Re(\alpha+\beta+\beta'-\gamma-\gamma') < 1$
»	$\Re(x+\beta-\gamma) > 0$	»	$\Re(y+\beta'-\gamma') \leq 0$,	»	$\Re(y) > \Re(\alpha+\beta-\gamma-1)$
»	$\Re(x+\beta-\gamma) \leq 0$	»	$\Re(y+\beta'-\gamma') > 0$,	»	$\Re(x) > \Re(\alpha+\beta'-\gamma'-1)$
»	$\Re(x+\beta-\gamma) \leq 0$	»	$\Re(y+\beta'-\gamma') \leq 0$,	»	$\Re(x) > \Re(\alpha+\beta'-\gamma'-1)$ und $\Re(y) > \Re(\alpha+\beta-\gamma-1)$.

Wenn wir anstatt v_1 die Lösungen v_2, v_3 und v_4 anwenden und immer über das Gebiet D integrieren, erhalten wir durch dieselbe Verfahrungsweise andere Lösungen: $z_2(x, y)$, $z_3(x, y)$, $z_4(x, y)$.

Wir erhalten somit folgende Lösungen von (37):

$$
(42)\quad
\begin{aligned}
z_1(x, y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)} \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)(x, m)(y, n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)(x+y+1, m+n)} \\
z_2(x, y) &= \frac{\Gamma(x+1-\gamma)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+2-\gamma)} \cdot \\
&\cdot \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma, m+n)(\beta+1-\gamma, m)(\beta', n)(x+1-\gamma, m)(y, n)}{(2-\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)(x+y+2-\gamma, m+n)} \\
z_3(x, y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y+1-\gamma')}{\Gamma(x+y+2-\gamma')} \cdot \\
&\cdot \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma', m+n)(\beta, m)(\beta'+1-\gamma', n)(x, m)(y+1-\gamma', n)}{(\gamma, m)(2-\gamma', n)(1, m)(1, n)(x+y+2-\gamma', m+n)} \\
z_4(x, y) &= \frac{\Gamma(x+1-\gamma)\Gamma(y+1-\gamma')}{\Gamma(x+y+3-\gamma-\gamma')} \cdot \\
&\cdot \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha+2-\gamma-\gamma', m+n)(\beta+1-\gamma, m)(\beta'+1-\gamma', n)(x+1-\gamma, m)(y+1-\gamma', n)}{(2-\gamma, m)(2-\gamma', n)(1, m)(1, n)(x+y+3-\gamma-\gamma', m+n)}.
\end{aligned}
$$

Die Konvergenzverhältnisse werden auf dieselbe Weise wie für $z_1(x, y)$ untersucht.

Diese vier Partikulärlösungen von (37) machen ein Fundamentalsystem von Lösungen aus. Um dies zu zeigen, wollen wir zunächst vier andere Partikulärlösungen heranziehen, die durch lineare Kombinationen mit konstanten Koeffizienten von den Lösungen (42) ausgedrückt werden können.

Wir setzen in (38) $v(t, s) = v_5$ und wählen wiederum das Integrationsgebiet D. Auch hier können wir die Konstanten α, β, β', γ und γ' so wählen, dass v_5 innerhalb des Gebietes D gleichmässig konvergent ist, und dass $V_1(x, y)$ und $V_2(x, y)$ Null werden. Wir können dann gliedweise integrieren, und weil

$$
\iint_D t^{x-1} s^{y-1} (1-t)^m s^n \, dt\, ds = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y+m+n+1)}{\Gamma(x+y+m+n+1)} \cdot \frac{1}{y+n}
$$

entspringt daraus

$$(43)\quad z_5(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+1)} \cdot$$

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)(\alpha+1-\gamma, n)(y+1, m+n)}{(\alpha+\beta-\gamma+1, m+n)(\gamma', n)(1, m)(1, n)(x+y+1, m+n)} \cdot \frac{1}{y+n} \cdot$$

Das Gebiet, innerhalb dessen (43) absolut konvergent ist, können wir durch Vergleich mit einer Reihe von der Form (35) bestimmen. Wir finden, dass wenn nur $\mathfrak{R}(x)$ genügend gross ist, und wenn y endlich und keine negative ganze Zahl ist, so ist die Reihe absolut konvergent.

Benutzen wir statt v_5 die Lösung v_6, erhalten wir

$$(44)\quad z_6(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y+2-\gamma')}{\Gamma(x+y+2-\gamma')} \cdot$$

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha+1-\gamma', m+n)(\beta, m)(\beta'+1-\gamma', n)(\alpha+2-\gamma-\gamma', n)(y+2-\gamma', m+n)}{(\alpha+\beta+2-\gamma-\gamma', m+n)(2-\gamma', n)(1, m)(1, n)(x+y+2-\gamma', m+n)} \cdot$$

$$\frac{1}{y+1-\gamma'+n} \cdot$$

Wir können auch v_7 gebrauchen, und erhalten in solchem Fall

$$(45)\quad z_7(x, y) = \frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)\Gamma(x)\Gamma(y+\gamma-\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(x+y+\gamma-\alpha-\beta+1)} \cdot$$

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha+1-\gamma, n)(\beta', n)(\gamma-\beta, m)\,\Gamma(\gamma-\alpha-n+m)\,(y+\gamma+1-\alpha-\beta, m)}{(\gamma', n)(1, n)(1, m)\,\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta-n+m)\,(x+y+1+\gamma-\alpha-\beta, m)} \cdot \frac{1}{y+n} \cdot$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir, wenn wir v_8 anwenden:

$$(46)\quad z_8(x, y) = \frac{\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta)\Gamma(x)\Gamma(y+\gamma-\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-1)\Gamma(x+y+\gamma-\alpha-\beta+1)}\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}$$

$$\frac{(\alpha+2-\gamma-\gamma', n)(\beta'+1-\gamma', n)(\gamma-\beta, m)\,\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-1-n+m)(y+\gamma-\alpha-\beta+1, m)}{(2-\gamma', n)(1, n)(1, m)\,\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta+2-n+m)(x+y+\gamma-\alpha-\beta+1, m)} \cdot$$

$$\frac{1}{y+n-\gamma'+1} \cdot$$

Die Konvergenzverhältnisse der Reihen (45) und (46) können wir durch Vergleich mit einer Reihe von der Form (36) untersuchen. Wir finden, dass wenn $\Re(x)$ genügend gross ist und die Konstanten α, β, β', γ und γ' gewisse Bedingungen erfüllen, die Reihen absolut konvergent sind, vorausgesetzt, dass y endlich und keine ganze negative Zahl und nicht von der Form $\gamma'-1-n$ ist.

Die Lösungen $z_5(x, y)$, $z_6(x, y)$, $z_7(x, y)$ und $z_8(x, y)$ können durch $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$, $z_3(x, y)$ und $z_4(x, y)$ ausgedrückt werden. Auf Grund der Relationen (20), (22), (24) und (26) gelten nämlich:

$$
(47)\quad
\begin{aligned}
z_1(x, y) - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z_2(x, y) &= \frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} z_5(x, y) \\
z_3(x, y) - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+2-\gamma-\gamma')\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma')\Gamma(\beta)} z_4(x, y) &= \frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha+2-\gamma-\gamma')}{\Gamma(\alpha+\beta+2-\gamma-\gamma')\Gamma(1-\gamma)} z_6(x, y) \\
z_1(x, y) - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} z_2(x, y) &= \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)} z_7(x, y) \\
z_3(x, y) - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma'-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-1)\Gamma(\gamma-\beta)} z_4(x, y) &= \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma'-\alpha)}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta)} z_8(x, y).
\end{aligned}
$$

Die Lösungen $z_5(x, y)$, $z_6(x, y)$, $z_7(x, y)$ und $z_8(x, y)$ sind in einer Form gegeben, die uns erlaubt, sie für grosse Werte von x zu untersuchen, wenn $\Re(x) > N$, wo N eine gewisse positive Zahl ist.

Wir legen zunächst folgendes Theorem dar: $\varkappa$ bezeichne eine positive Zahl so beschaffen, dass

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_{m,n}}{(\varkappa, m+n)}$$

absolut konvergent ist. Die Reihe

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_{m,n}}{(x+\delta, m+n)}$$

konvergiert dann gleichmässig, wenn $\Re(x+\delta) \geq \varkappa$. Man hat nämlich

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_{m,n}}{(x+\delta, m+n)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_{m,n}}{(\varkappa, m+n)} \cdot \frac{(\varkappa, m+n)}{(x+\delta, m+n)}.$$

Aber bei den gegebenen Voraussetzungen gilt

$$\left| \frac{\varkappa(\varkappa+1)\cdots(\varkappa+m+n-1)}{(x+\delta)(x+\delta+1)\cdots(x+\delta+m+n-1)} \right| \leq 1.$$

Wir erhalten

$$\left|\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{A_{m,n}}{(x+\delta, m+n)}\right| \leq \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{|A_{m,n}|}{(\varkappa, m+n)}.$$

Von hier aus gelangen wir zu der Gültigkeit des Theorems.

Weiter erinnern wir an folgendes Theorem[1]: Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{A_n}{(x, n)}$$

konvergiert gleichmässig innerhalb des Gebietes $\Re(x) \geq \varkappa$, wobei $\varkappa$ eine positive Zahl grösser als die Konvergenzabscisse ist.

Auf Grund dieser Theoreme können wir aus (43), (44), (45) und (46) schliessen, dass

$$\lim_{x\to\infty} z_5(x, y)\frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(x)\Gamma(y)} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} z_6(x, y)\frac{\Gamma(x+y+2-\gamma')}{\Gamma(x)\Gamma(y+1-\gamma')} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} z_7(x, y)\frac{\Gamma(x+y+\gamma-\alpha-\beta+1)}{\Gamma(x)\Gamma(y+\gamma-\alpha-\beta+1)} =$$

$$(48)\qquad = \frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha+1-\gamma, n)(\beta', n)\Gamma(\gamma-\alpha-n)}{(\gamma', n)(1, n)\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta-n)}\cdot\frac{1}{y+n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha+\beta-\gamma, n)(\beta', n)}{(\gamma', n)(1, n)}\frac{1}{y+n} = u_1(y)$$

$$\lim_{x\to\infty} z_8(x, y)\frac{\Gamma(x+y+\gamma-\alpha-\beta+1)}{\Gamma(x)\Gamma(y+\gamma-\alpha-\beta+1)} =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-1)}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha+2-\gamma-\gamma', n)(\beta'+1-\gamma', n)\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-n-1)}{(2-\gamma', n)(1, n)\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta+2-n)}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{y+n-\gamma'+1} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha+\beta+1-\gamma-\gamma', n)(\beta'+1-\gamma', n)}{(2-\gamma', n)(1, n)}\cdot\frac{1}{y+n-\gamma'+1} = u_2(y).$$

Wir setzen hier voraus, dass x gegen die Unendlichkeit wächst, in einer Halbebene $\Re(x) > N$ verbleibend, wobei N eine gewisse positive Zahl ist.

---

[1] Siehe Nörlund: Sur les séries de facultés p. 346. Acta Math. 37 (1914).

Aus diesen Eigenschaften können wir feststellen, dass $z_5(x, y)$, $z_6(x, y)$, $z_7(x, y)$ und $z_8(x, y)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen ausmachen.

Nehmen wir nämlich an, dass zwischen diesen Lösungen eine Relation bestände

$$\Pi_1(x, y) z_5(x, y) + \Pi_2(x, y) z_6(x, y) + \Pi_3(x, y) z_7(x, y) + \Pi_4(x, y) z_8(x, y) = 0 \tag{49}$$

wobei $\Pi_i(x, y)$ periodische Funktionen mit Perioden 1 sind.

Wir betrachten dann die Zahlen

$$1, \quad \Re(2-\gamma') \quad \text{und} \quad \Re(\gamma-\alpha-\beta+1)$$

und ordnen sie nach Grösse. Nehmen wir beispielsweise an:

$$\Re(\gamma-\alpha-\beta+1) > \Re(2-\gamma') > 1.$$

Wenn wir jetzt (49) mit

$$\frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(x)\Gamma(y)}$$

multiplizieren und x die Werte $x, x+1, x+2, \ldots x+n, \ldots$ durchlaufen lassen, können wir aus (48) den Schluss ziehen, dass $\Pi_1(x, y)$ identisch verschwindet. Wenn wir darauf mit

$$\frac{\Gamma(x+y+2-\gamma')}{\Gamma(x)\Gamma(y+1-\gamma')}$$

multiplizieren und auf dieselbe Weise verfahren, sehen wir, dass auch $\Pi_2(x, y)$ identisch verschwindet. Wenn wir schliesslich mit

$$\frac{\Gamma(x+y+\gamma-\alpha-\beta+1)}{\Gamma(x)\Gamma(y+1-\gamma')}$$

multiplizieren und auf dieselbe Weise verfahren, erhalten wir eine Relation

$$\Pi_3(x, y) u_1(y) + \Pi_4(x, y) u_2(y) = 0.$$

Aber eine solche Relation kann unmöglicherweise bestehen bleiben, ohne dass $\Pi_3(x, y)$ und $\Pi_4(x, y)$ identisch verschwinden, da $u_1(y)$ und $u_2(y)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung sind[1]:

[1] Nörlund: Differenzenrechnung p. 346.

$$(y-\alpha-\beta+\gamma+2)(y-\beta'+2)u(y+2)-[(\alpha+\beta-\gamma)\beta'-(\alpha+\beta-\gamma+\beta'+\gamma'+1)(y+1)+$$
$$+2(y+1)(y+2)]u(y+1)+y(y-\gamma'+1)u(y)=0.$$

Die Funktionen $z_5(x,y)$, $z_6(x,y)$, $z_7(x,y)$ und $z_8(x,y)$ machen also ein Fundamentalsystem von Lösungen aus. Auf Grund der Relationen (47) schliessen wir, dass auch $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$, $z_3(x,y)$ und $z_4(x,y)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen ausmachen.

Jetzt zeigen wir, dass $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$, $z_3(x,y)$ und $z_4(x,y)$ durch definite Integrale ausgedrückt werden können, die uns erlauben werden, die analytischen Fortsetzungen dieser Lösungen zu geben.

Wir schreiben $z_1(x,y)$ auf folgende Weise:

$$z_1(x,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha,n)\,(\beta',n)\,(y,n)}{(\gamma',n)(1,n)(x+y+1,n)}\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(\alpha+n,m)\,(\beta,m)\,(x,m)}{(\gamma,m)(1,m)\,(x+y+1+n,m)}\,.$$

Aber es lässt sich leicht feststellen, dass

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(\alpha+n,m)\,(\beta,m)\,(x,m)}{(\gamma,m)(1,m)(x+y+1+n,m)}=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(x+y+1+n)}{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(x+y+1-\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\,.$$
$$\int_0^1\!\!\int_0^1 u_1^{\alpha+n-1}(1-u_1)^{x+y-\alpha}u_2^{\beta-1}(1-u_2)^{\gamma-\beta-1}(1-u_1u_2)^{-x}\,du_1\,du_2\,.$$

Wenn wir obenstehendes in $z_1(x,y)$ einführen und die Integrationsordnung und die Summationsordnung permutieren, was unter gewissen Bedingungen erlaubt ist, und dann die Summation in Bezug auf n ausführen, wird erhalten:

$$z_1(x,y)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(x+y+1-\alpha)}\,.$$
$$\int_0^1\!\!\int_0^1 u_1^{\alpha-1}(1-u_1)^{x+y-\alpha}u_2^{\beta-1}(1-u_2)^{\gamma-\beta-1}(1-u_1u_2)^{-x}F(y,\beta',\gamma',u_1)\,du_1\,du_2=$$
$$=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(x+y+1-\alpha)}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{x+y-\alpha}F(x,\beta,\gamma,u)\,F(y,\beta',\gamma',u)\,du\,.$$

Dieses Integral hat einen Sinn, wenn $\Re(\alpha)>0$, $\Re(x+y-\alpha)>-1$, $\Re(y+\gamma-\beta-\alpha)>-1$, $\Re(x+\gamma'-\beta'-\alpha)>-1$ und $\Re(\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha)>-1$.

Auf analoge Weise erhalten wir Integrale für $z_2(x, y)$, $z_3(x, y)$ und $z_4(x, y)$. Wir haben somit folgende Integrale gefunden:

$$z_1(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(x+y+1-\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{x+y-\alpha} F(x, \beta, \gamma, u) F(y, \beta', \gamma', u)\, du$$

(50)

$$z_2(x, y) = \frac{\Gamma(x+1-\gamma)\,\Gamma(y)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\,\Gamma(x+y+1-\alpha)} \cdot$$

$$\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{x+y-\alpha} F(x+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, u) F(y, \beta', \gamma', u)\, du$$

$$z_3(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y+1-\gamma')}{\Gamma(\alpha+1-\gamma')\,\Gamma(x+y+1-\alpha)} \cdot$$

$$\int_0^1 u^{\alpha-\gamma'}(1-u)^{x+y-\alpha} F(x, \beta, \gamma, u) F(y+1-\gamma', \beta'+1-\gamma', 2-\gamma', u)\, du$$

$$z_4(x, y) = \frac{\Gamma(x+1-\gamma)\,\Gamma(y+1-\gamma')}{\Gamma(\alpha+2-\gamma-\gamma')\,\Gamma(x+y+1-\alpha)} \cdot$$

$$\int_0^1 u^{\alpha+1-\gamma-\gamma'}(1-u)^{x+y-\alpha} F(x+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, u) \cdot$$

$$\cdot F(y+1-\gamma', \beta'+1-\gamma', 2-\gamma', u)\, du.$$

Möge h eine positive Zahl bezeichnen, und zwar so beschaffen, dass $0 < h < 1$. Wir setzen dann

$$z_1(x, y) = z_1^{(1)}(x, y) + z_1^{(2)}(x, y)$$

wobei

$$z_1^{(1)}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(x+y+1-\alpha)} \int_0^h u^{\alpha-1}(1-u)^{x+y-\alpha} F(x, \beta, \gamma, u) F(y, \beta', \gamma', u)\, du$$

und

$$z_1^{(2)}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(x+y+1-\alpha)} \int_h^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{x+y-\alpha} F(x, \beta, \gamma, u) F(y, \beta', \gamma', u)\, du.$$

Jetzt kann geschrieben werden

$$(51)\qquad z_1^{(1)}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(x+y+1-\alpha)} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{e^{2\pi i\alpha}-1} \int\limits_C u^{\alpha-1}(1-u)^{x+y-\alpha} F(x, \beta, \gamma, u)\, F(y, \beta', \gamma', u)\, du,$$

wobei C eine Schleife ist, die von h ausgeht, den Nullpunkt in der positiven Richtung umschliesst, und wieder in h zurückkehrt. Hieraus ergibt sich, dass $z_1^{(1)}(x, y)$ eine meromorfe Funktion von x und y ist mit einfachen Polen in den Punkten $x = -n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ und in $y = -n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, und dass sie für alle Werte der Parameter existiert, jedoch ausgenommen, wenn γ oder γ' Null oder ganze negative Zahlen sind.

Betrachten wir weiter $z_1^{(2)}(x, y)$ und nehmen wir zunächst an, dass $x+\beta-\gamma$ und $y+\beta'-\gamma'$ nicht Null oder ganze Zahlen sind.

Man hat dann

$$F(x, \beta, \gamma, u) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\beta-x)}{\Gamma(\gamma-x)\,\Gamma(\gamma-\beta)} F(x, \beta, x+\beta+1-\gamma, 1-u) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(x+\beta-\gamma)}{\Gamma(x)\,\Gamma(\beta)} (1-u)^{\gamma-x-\beta} F(\gamma-x, \gamma-\beta, \gamma-\beta+1-x, 1-u)$$

und

$$F(y, \beta', \gamma', u) = \frac{\Gamma(\gamma')\,\Gamma(\gamma'-\beta'-y)}{\Gamma(\gamma'-y)\,\Gamma(\gamma'-\beta')} F(y, \beta', y+\beta'+1-\gamma', 1-u) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma')\,\Gamma(y+\beta'-\gamma')}{\Gamma(y)\,\Gamma(\beta')} (1-u)^{\gamma'-\beta'-y} F(\gamma'-y, \gamma'-\beta', \gamma'-\beta'+1-y, 1-u).$$

Führen wir diese Ausdrücke in $z_1^{(2)}(x, y)$ ein, erhalten wir vier Integrale, und wenn wir schliesslich Schleifenintegrale introduzieren, erhalten wir, wenn C eine Schleife ist, die von $u = h$ ausgeht, den Punkt $u = 1$ in positiver Richtung umschliesst, und in $u = h$ zurückkehrt:

$$z_1^{(2)}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(x+y+1-\alpha)} \left\{ \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\beta-x)\,\Gamma(\gamma')\,\Gamma(\gamma'-\beta'-y)}{\Gamma(\gamma-x)\,\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\gamma'-y)\,\Gamma(\gamma'-\beta')} \cdot \right.$$

$$\cdot \frac{1}{1-e^{2\pi i(x+y-\alpha)}} \int\limits_C u^{\alpha-1}(1-u)^{x+y-\alpha} F(x, \beta, x+\beta+1-\gamma, 1-u) \cdot$$

$$\cdot F(y, \beta', y+\beta'+1-\gamma', 1-u)\, du +$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta-x)\Gamma(\gamma')\Gamma(y+\beta'-\gamma')}{\Gamma(\gamma-x)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(y)\Gamma(\beta')}\cdot\frac{1}{1-e^{2\pi i(x+\gamma'-\beta'-\alpha)}}\cdot$$

$$\int\limits_C u^{\alpha-1}(1-u)^{x+\gamma'-\beta'-\alpha}F(x,\beta,x+\beta+1-\gamma,1-u)\cdot$$

$$\cdot F(\gamma'-y,\gamma'-\beta',\gamma'-\beta'+1-y,1-u)\,du+$$

(52) $$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(x+\beta-\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma(\gamma-\beta'-y)}{\Gamma(x)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma'-y)\Gamma(\gamma'-\beta')}\cdot\frac{1}{1-e^{2\pi i(y+\gamma-\beta-\alpha)}}\cdot$$

$$\int\limits_C u^{\alpha-1}(1-u)^{y+\gamma-\beta-\alpha}F(\gamma-x,\gamma-\beta,\gamma-\beta+1-x,1-u)\cdot$$

$$\cdot F(y,\beta',y+\beta'+1-\gamma',1-u)\,du+$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(x+\beta-\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma(y+\beta'-\gamma')}{\Gamma(x)\Gamma(\beta)\Gamma(y)\Gamma(\beta')}\cdot\frac{1}{1-e^{2\pi i(\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha)}}\cdot$$

$$\int\limits_C u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha}F(\gamma-x,\gamma-\beta,\gamma-\beta+1-x;1-u)\cdot$$

$$\left.\cdot F(\gamma'-y,\gamma'-\beta',\gamma'-\beta'+1-y,1-u)\,du\right\}\cdot$$

Hieraus sieht man, dass wenn γ, γ' und $\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha$ nicht Null und keine negativen ganzen Zahlen sind, $z_1^{(2)}(x,y)$ eine meromorfe Funktion von x und y ist mit einfachen Polen in den Stellen $x=\alpha+\beta'-\gamma'-1-n$, $y=\alpha+\beta-\gamma-1-n$, $x=-n$, $y=-n$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

Möglicherweise könnten auch $x=\gamma-\beta+m$ oder $y=\gamma'-\beta'+m$, wobei m eine ganze Zahl oder Null ist, Pole sein. Man kann indessen zeigen, dass so nicht der Fall ist. Durch die Relationen (47) kann $z_1(x,y)$ durch $z_5(x,y)$ und $z_7(x,y)$ linear mit konstanten Koeffizienten ausgedrückt werden. Aber wie aus den Reihenentwicklungen von $z_5(x,y)$ und $z_7(x,y)$, die für endliche Werte von y, Pole ausgenommen, konvergieren, hervorgeht, ist $y=\gamma'-\beta'+m$ keine singuläre Stelle der Funktionen $z_5(x,y)$ und $z_7(x,y)$. $y=\gamma'-\beta'+m$ kann also kein Pol für $z_1(x,y)$ sein. Auf Grund der symmetrischen Stellung von x und y in $z_1(x,y)$ kann auch $x=\gamma-\beta+m$ kein Pol für $z_1(x,y)$ sein.

Durch dieselbe Verfahrungsweise kann man auch die analytischen Fortsetzungen der Funktionen $z_2(x,y)$, $z_3(x,y)$ und $z_4(x,y)$ vornehmen.

Als Resultat ergibt sich:

Die Lösungen $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$, $z_3(x,y)$ und $z_4(x,y)$ sind meromorfe Funktionen von x und y in der ganzen x-Ebene und in der ganzen y-Ebene. Die Pole sind gelegen:

für $z_1(x, y)$ in den Stellen: $x=-n,\ y=-n,\ x=\alpha+\beta'-\gamma'-1-n,\ y=\alpha+\beta-\gamma-1-n$

» $z_2(x, y)$ » » » $x=\gamma-1-n,\ y=-n,\ x=\alpha+\beta'-\gamma'-1-n,\ y=\alpha+\beta-\gamma-1-n$

» $z_3(x, y)$ » » » $x=-n,\ y=\gamma'-1-n,\ x=\alpha+\beta'-\gamma'-1-n,\ y=\alpha+\beta-\gamma-1-n$

» $z_4(x, y)$ » » » $x=\gamma-1-n,\ y=\gamma'-1-n,\ x=\alpha+\beta'-\gamma'-1-n,\ y=\alpha+\beta-\gamma-1-n$

wobei $n=0, 1, 2, \ldots$

Auf Grund der Relationen (47) können wir auch schliessen, dass die Funktionen $z_5(x, y)$, $z_6(x, y)$, $z_7(x, y)$ und $z_8(x, y)$ über die ganze x-Ebene und über die ganze y-Ebene analytisch fortgesetzt werden können, und dass sie meromorfe Funktionen von x und y sind, deren Pole sein können:

$$x=-n,\ x=\gamma-1-n,\ x=\alpha+\beta'-\gamma'-1-n,\ y=-n,\ y=\gamma'-1-n,\ y=\alpha+\beta-\gamma-1-n$$

wobei $n=0, 1, 2, \ldots$

Die Lösungen $z_5(x, y)$, $z_6(x, y)$, $z_7(x, y)$ und $z_8(x, y)$, die die genannten Eigenschaften besitzen, und ausserdem durch die asymptotischen Gleichungen (48) gekennzeichnet sind, wenn x an die Unendlichkeit, in dem Winkelraum $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arc} x \leq \frac{\pi}{2}$ verbleibend, heranrückt, wollen wir als das erste System, *kanonisch in Bezug auf* x, bezeichnen.

Durch Permutation von x und y und den Parametern β und β', γ und γ' erhalten wir die Lösungen:

$$z_9(x, y),\ z_{10}(x, y),\ z_{11}(x, y) \text{ und } z_{12}(x, y)$$

die wir als das erste System, kanonisch in Bezug auf y, bezeichnen wollen.

Vermittelst der Integrale (50) können wir eine grosse Anzahl Transformationsformeln erhalten.

Hier einige Beispiele:

Wenn wir die Formeln:

$$F(x, \beta, \gamma, u) = (1-u)^{\gamma-\beta-x} F(\gamma-x, \gamma-\beta, \gamma, u)$$

und

$$F(y, \beta', \gamma', u) = (1-u)^{\gamma'-\beta'-y} F(\gamma'-y, \gamma'-\beta', \gamma', u)$$

beachten und diese Ausdrücke in $z_1(x, y)$ einführen, analoge Transformationen für $z_2(x, y)$, $z_3(x, y)$ und $z_4(x, y)$ ausführen und dann hypergeometrische Reihen einführen, erhalten wir Lösungen, in Binomialkoeffizientenreihen entwickelt.

$$z_1(x, y) = \frac{\Gamma(\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha+1)\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(\gamma+\gamma'-\beta-\beta'+1)\Gamma(x+y+1-\alpha)} \cdot \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\gamma-\beta, m)(\gamma'-\beta', n)(\gamma-x, m)(\gamma'-y, n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(\gamma+\gamma'-\beta-\beta'+1, m+n)(1, m)(1, n)}$$

(53)

$$z_2(x, y) = \frac{\Gamma(\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha+1)\Gamma(x+1-\gamma)\Gamma(y)}{\Gamma(\gamma'-\beta-\beta'+2)\Gamma(x+y+1-\alpha)} \cdot \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma, m+n)(1-\beta, m)(\gamma'-\beta', n)(1-x, m)(\gamma'-y, n)}{(2-\gamma, m)(\gamma', n)(\gamma'-\beta-\beta'+2, m+n)(1, m)(1, n)}$$

$$z_3(x, y) = \frac{\Gamma(\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha+1)\Gamma(x)\Gamma(y+1-\gamma')}{\Gamma(\gamma-\beta-\beta'+2)\Gamma(x+y+1-\alpha)} \cdot \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma', m+n)(\gamma-\beta, m)(1-\beta', n)(\gamma-x, m)(1-y, n)}{(\gamma, m)(2-\gamma', n)(\gamma-\beta-\beta'+2, m+n)(1, m)(1, n)}$$

$$z_4(x, y) = \frac{\Gamma(\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha+1)\Gamma(x+1-\gamma)\Gamma(y+1-\gamma')}{\Gamma(3-\beta-\beta')\Gamma(x+y+1-\alpha)} \cdot \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha+2-\gamma-\gamma', m+n)(1-\beta, m)(1-\beta', n)(1-x, m)(1-y, n)}{(2-\gamma, m)(2-\gamma', n)(3-\beta-\beta', m+n)(1, m)(1, n)}.$$

Wir wollen auch zeigen, dass das System (37) eine Partikulärlösung besitzt, die durch Gammafunktionen ausgedrückt werden kann. Die Formeln (50) können folgendermassen geschrieben werden:

$$(e^{2\pi i\alpha}-1)\Gamma(\alpha)z_1(x, y) = \\ = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1-\alpha)} \int\limits_C u^{\alpha-1}(1-u)^{x+y-\alpha} F(x, \beta, \gamma, u) F(y, \beta', \gamma', u)\, du$$

$$(e^{2\pi i(\alpha-\gamma)}-1)\Gamma(\alpha+1-\gamma)z_2(x,y)=$$
$$=\frac{\Gamma(x+1-\gamma)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1-\alpha)}\int_C u^{\alpha-1}(1-u)^{x+y-\alpha}u^{1-\gamma}F(x+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,u)\cdot$$
$$\cdot F(y,\beta',\gamma',u)du \tag{54}$$
$$(e^{2\pi i(\alpha-\gamma')}-1)\Gamma(\alpha+1-\gamma')z_3(x,y)=$$
$$=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y+1-\gamma')}{\Gamma(x+y+1-\alpha)}\int_C u^{\alpha-1}(1-u)^{x+y-\alpha}F(x,\beta,\gamma,u)\cdot$$
$$\cdot u^{1-\gamma'}F(y+1-\gamma',\beta'+1-\gamma',2-\gamma',u)du$$
$$(e^{2\pi i(\alpha-\gamma-\gamma')}-1)\Gamma(\alpha+2-\gamma-\gamma')z_4(x,y)=$$
$$=\frac{\Gamma(x+1-\gamma)\Gamma(y+1-\gamma')}{\Gamma(x+y+1-\alpha)}\int_C u^{\alpha-1}(1-u)^{x+y-\alpha}u^{1-\gamma}F(x+1-\gamma,\beta+1-\gamma,$$
$$2-\gamma,u)u^{1-\gamma'}F(y+1-\gamma',\beta'+1-\gamma',2-\gamma',u)du$$

wobei C eine Schleife ist, die von $u=1$ ausgeht und den Nullpunkt umschliesst. Aber jetzt haben wir folgende Transformationsformeln:

$$F(x,\beta,\gamma,u)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(x-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(x)\Gamma(\gamma-\beta)}u^{1-\gamma}F(x+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,u)+$$
$$+\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(x+1-\gamma)}{\Gamma(x+1-\beta)\Gamma(1-\gamma)}u^{\beta-\gamma}(1-u)^{\gamma-x-\beta}F\left(1-\beta,\gamma-\beta,x-\beta+1,\frac{1}{u}\right)$$
$$F(y,\beta',\gamma',u)=\frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(y-\gamma'+1)\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(2-\gamma')\Gamma(y)\Gamma(\gamma'-\beta')}u^{1-\gamma'}F(y+1-\gamma',\beta'+1-\gamma',2-\gamma',u)+$$
$$+\frac{\Gamma(1-\beta')\Gamma(y+1-\gamma')}{\Gamma(y+1-\beta')\Gamma(1-\gamma')}u^{\beta'-\gamma'}(1-u)^{\gamma'-y-\beta'}F\left(1-\beta',\gamma'-\beta',y-\beta'+1,\frac{1}{u}\right).$$

Wir erhalten durch Kombinationen von (54)

$$\Gamma(\alpha)(e^{2\pi i\alpha}-1)z_1(x,y)-(e^{2\pi i(\alpha-\gamma)}-1)\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}z_2(x,y)-$$
$$-(e^{2\pi i(\alpha-\gamma')}-1)\frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(1-\beta')\Gamma(\alpha+1-\gamma')}{\Gamma(2-\gamma')\Gamma(\gamma'-\beta')}z_3(x,y)+$$
$$+(e^{2\pi i(\alpha-\gamma-\gamma')}-1)\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma')\Gamma(1-\beta')\Gamma(\alpha+2-\gamma-\gamma')}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(2-\gamma')\Gamma(\gamma'-\beta')}z_4(x,y)=$$

$$= \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-\gamma')} \cdot \frac{\Gamma(x)\Gamma(x+1-\gamma)\Gamma(y)\Gamma(y+1-\gamma')}{\Gamma(x+1-\beta)\Gamma(y+1-\beta')\Gamma(x+y+1-\alpha)} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_C u^{\alpha+\beta+\beta'-\gamma-\gamma'-1}(1-u)^{\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha} F\left(1-\beta, \gamma-\beta, x-\beta+1, \frac{1}{u}\right) \cdot$$

$$\cdot F\left(1-\beta', \gamma'-\beta', y-\beta'+1, \frac{1}{u}\right) du.$$

Wir können jetzt die Schleife C so deformieren, dass sie von $u=1$ ausgehend an einen Punkt $u=a$, wobei $a>1$ ist, gelangt, sich weiter in einem Kreis mit $u=0$ als Centrum bewegt, und an $u=a$ wieder zurückkehrt, um dann von $u=a$ an $u=1$ weiterzugehen. Wir machen dann die Substitution $u=\frac{1}{v}$ und erhalten das Integral

$$-\int\limits_{C_1} v^{-1}(v-1)^{\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha} F(1-\beta, \gamma-\beta, x-\beta+1, v)\, F(1-\beta', \gamma'-\beta', y-\beta'+1, v)\, dv$$

wobei C_1 eine Schleife ist, die von $v=1$ ausgeht, $v=0$ umschliesst und in $v=1$ zurückkehrt. Aber der Integrand ist innerhalb dieses Umrisses eine analytische Funktion von v mit Ausnahme für den Punkt $v=0$, der ein einfacher Pol ist. Wir erhalten den Wert des Integrals durch die Cauchysche Integralformel:

$$2\pi i e^{\pi i(\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha+1)}$$

$$z(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(x+1-\gamma)\Gamma(y)\Gamma(y+1-\gamma')}{\Gamma(x+1-\beta)\Gamma(y+1-\beta')\Gamma(x+y+1-\alpha)}$$

ist also eine Partikulärlösung von (37).

Schliesslich wollen wir ein zweites kanonisches Fundamentalsystem kurz andeuten. Um dieses zu erhalten, wollen wir die Entwicklungen v_{13}, v_{14}, v_{15} und v_{16} anwenden. Wir kehren zu (38) zurück. Wir setzen hier $v(t, s) = v_{13}$ und nehmen das Gebiet

$$t \geq 1, \quad s \leq 0, \quad t+s \geq 1$$

als Integrationsgebiet. Wenn wir hier die Parameter α, β, β', γ und γ', und x und y gewissen Bedingungen unterwerfen, können wir gliedweise integrieren. Wir werden dann veranlasst, das Integral

$$\int_1^{\infty}\int_0^{1-t} t^{x-\alpha-1} s^{y-1} \left(\frac{t+s-1}{t-1}\right)^{\gamma'-\beta'} \left(\frac{t+s-1}{t}\right)^m \left(\frac{s}{1-t}\right)^n dt\,ds$$

zu betrachten. Machen wir hier die Substitution $s=(1-t)\omega$ und dann $t=\frac{1}{t_1}$, finden wir, dass dieses ist

$$e^{\pi i y}\int_0^1\int_0^1 t_1^{\alpha-x-y-1}(1-t_1)^{m+y}(1-\omega)^{\gamma'-\beta'+m}\omega^{y+n-1}\,dt_1\,d\omega =$$

$$= e^{\pi i y}\frac{\Gamma(\alpha-x-y)\Gamma(m+y+1)\Gamma(\gamma'-\beta'+m+1)\Gamma(y+n)}{\Gamma(\alpha-x+m+1)\Gamma(y+\gamma'-\beta'+m+n+1)}.$$

Wir erhalten somit die Lösung:

$$(55)\quad z_{13}(x,y) = e^{\pi i y}\frac{\Gamma(\alpha-x-y)\Gamma(y+1)\Gamma(y)\Gamma(\gamma'-\beta'+1)}{\Gamma(\alpha-x+1)\Gamma(y+\gamma'-\beta'+1)}\cdot$$

$$\cdot\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha,m)(\alpha+1-\gamma,m)(\gamma'-\beta'+1,m)(\gamma',m+n)(\gamma'-\beta',n)(y+1,m)(y,n)}{(\alpha+\beta+1-\gamma,m)(\gamma',m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)(\alpha+1-x,m)(y+\gamma'-\beta'+1,m+n)}.$$

Um die Konvergenzverhältnisse zu untersuchen, können wir die Reihe mit der Reihe (35) vergleichen. Wir stellen fest, dass wenn y endlich ist, Konvergenz vorhanden ist, vorausgesetzt dass $\Re(x)<\Re(\beta)$.

Auf dieselbe Weise können wir aus v_{14} eine Lösung erhalten:

$$z_{14}(x,y)=e^{\pi i(y+1-\gamma')}\frac{\Gamma(\alpha-x-y)\Gamma(y+2-\gamma')\Gamma(y+1-\gamma')\Gamma(2-\beta')}{\Gamma(\alpha-x+2-\gamma')\Gamma(y-\gamma'-\beta'+3)}\cdot$$

$$\cdot\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha+1-\gamma',m)(\alpha+2-\gamma-\gamma',m)(2-\beta',m)(2-\gamma',m+n)(1-\beta',n)}{(\alpha+\beta+2-\gamma-\gamma',m)(2-\gamma',m)(2-\gamma',n)(1,m)(1,n)}\cdot$$

$$(56)\qquad\cdot\frac{(y+2-\gamma',m)(y+1-\gamma',n)}{(\alpha-x+2-\gamma',m)(y+3-\gamma'-\beta',m+n)}.$$

Ebenso erhalten wir aus v_{15} die Lösung:

$$z_{15}(x,y)=e^{\pi i(y+\gamma-\alpha-\beta+1)}\frac{\Gamma(\alpha-x-y)\Gamma(y+\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(y)\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1)}{\Gamma(\gamma+1-\beta-x)\Gamma(y+\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1)}.$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta, m+n)(\gamma-\beta, m)(1-\beta, m)(\gamma'-\beta', n)(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1, m)}{(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta, m)(\gamma+1-\alpha-\beta, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)(\gamma-\beta+1-x, m)} \cdot$$

$$\cdot \frac{(y+\gamma-\alpha-\beta+1, m)(y, n)}{(y+\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1, m+n)}. \tag{57}$$

Aus v_{16} erhalten wir die Lösung:

$$z_{16}(x, y) =$$

$$= e^{\pi i(y+\gamma-\alpha-\beta+1)} \frac{\Gamma(\alpha-x-y)\Gamma(y+\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(y+1-\gamma')\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1)}{\Gamma(\gamma-\beta+1-x)\Gamma(y+\gamma-\alpha-\beta-\beta'+2)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\gamma-\alpha-\beta+1, m+n)(\gamma-\beta, m)(1-\beta, m)(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1, m)(1-\beta', n)}{(\gamma+1-\alpha-\beta, m)(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta, m)(2-\gamma', n)(1, m)(1, n)(\gamma-\beta+1-x, m)} \cdot$$

$$\cdot \frac{(y+\gamma+1-\alpha-\beta, m)(y+1-\gamma', n)}{(y+\gamma-\alpha-\beta-\beta'+2, m+n)}. \tag{58}$$

Gleich wie wir es für $z_{13}(x, y)$ getan haben, stellen wir fest, dass die Reihen konvergent sind, wenn y endlich ist, und $\Re(x) < \Re(\beta)$.

Auf analoge Weise wie für das erste System, kanonisch in Bezug auf x, erhalten wir die asymptotischen Gleichungen:

$$\lim_{x\to\infty} z_{13}(x, y) \frac{\Gamma(\alpha-x+1)}{\Gamma(\alpha-x-y)} = e^{\pi i y} \frac{\Gamma(y+1)\Gamma(y)\Gamma(\gamma'-\beta'+1)}{\Gamma(y+\gamma'-\beta'+1)} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\gamma'-\beta', n)(y, n)}{(1, n)(y+\gamma'-\beta'+1, n)}$$

$$\lim_{x\to\infty} z_{14}(x, y) \frac{\Gamma(\alpha-x+2-\gamma')}{\Gamma(\alpha-x-y)} =$$

$$= e^{\pi i(y+1-\gamma')} \frac{\Gamma(y+2-\gamma')\Gamma(y+1-\gamma')\Gamma(2-\beta')}{\Gamma(y-\gamma'-\beta'+3)} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(1-\beta', n)(y+1-\gamma', n)}{(1, n)(y-\gamma'-\beta'+3, n)}$$

$$\lim_{x\to\infty} z_{15}(x, y) \frac{\Gamma(\gamma-\beta+1-x)}{\Gamma(\alpha-x-y)} =$$

$$= e^{\pi i(y+\gamma-\alpha-\beta+1)} \frac{\Gamma(y+\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(y)\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1)}{\Gamma(y+\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta, n)(\gamma'-\beta', n)(y, n)}{(1, n)(\gamma', n)(y+\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1, n)}$$

$$\lim_{x\to\infty} z_{16}(x, y) \frac{\Gamma(\gamma-\beta+1-x)}{\Gamma(\alpha-x-y)} =$$

$$= e^{\pi i(y+\gamma-\alpha-\beta+1)} \frac{\Gamma(y+\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(y+1-\gamma')\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1)}{\Gamma(y+\gamma-\alpha-\beta-\beta'+2)} \cdot$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\gamma-\alpha-\beta+1, n)(1-\beta', n)(y+1-\gamma', n)}{(1, n)(y+\gamma-\alpha-\beta-\beta'+2, n)(2-\gamma', n)} .$$

Aber:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\gamma'-\beta', n)(y, n)}{(1, n)(y+\gamma'-\beta'+1, n)} = F(y, \gamma'-\beta', y+\gamma'-\beta'+1, 1) = \frac{\Gamma(y+\gamma'-\beta'+1)\Gamma(1)}{\Gamma(\gamma'-\beta'+1)\Gamma(y+1)} .$$

Ebenso:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(1-\beta', n)(y+1-\gamma', n)}{(1, n)(y-\gamma'-\beta'+3, n)} = \frac{\Gamma(y-\gamma'-\beta'+3)\Gamma(1)}{\Gamma(2-\beta')\Gamma(y+2-\gamma')} .$$

Weiter lässt sich leicht feststellen, dass:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta, n)(\gamma'-\beta', n)(y, n)}{(\gamma', n)(y+\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1, n)(1, n)} =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(y+\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1)}{\Gamma(y)\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1)\Gamma(\gamma'-\beta')\Gamma(\beta')} \cdot$$

$$\cdot \int_0^1\int_0^1 t_1^{y-1}(1-t_1)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'} t_2^{\gamma'-\beta'-1}(1-t_2)^{\beta'-1}(1-t_1 t_2)^{\alpha+\beta-\gamma-\gamma'} dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{\Gamma(y+\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1)}{\Gamma(y)\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1)} \cdot$$

$$\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'} F(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta, \gamma'-\beta', \gamma', t)\, dt.$$

Aber jetzt ist

$$(1-t)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'} F(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta, \gamma'-\beta', \gamma', t) = F(\alpha+\beta-\gamma, \beta', \gamma', t)$$

und

$$\int_0^1 t^{y-1} F(\alpha+\beta-\gamma, \beta', \gamma', t)\, dt = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha+\beta-\gamma, n)(\beta', n)}{(\gamma', n)(1, n)} \cdot \frac{1}{y+n} = u_1(y)$$

wobei $u_1(y)$ die Funktion ist, die in den asymptotischen Gleichungen auf Seite 165 sich findet.

Ebenso haben wir:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\gamma-\alpha-\beta+1, n)(1-\beta', n)(y+1-\gamma', n)}{(1, n)(y+\gamma-\alpha-\beta-\beta'+2, n)(2-\gamma', n)} =$$

$$= \frac{\Gamma(y+\gamma-\alpha-\beta-\beta'+2)}{\Gamma(y+1-\gamma')\Gamma(\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'+1)} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha+1+\beta-\gamma-\gamma', n)(\beta'+1-\gamma', n)}{(2-\gamma', n)(1, n)} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{y+n+1-\gamma'} = u_2(y).$$

Wir erhalten somit folgende asymptotische Gleichungen:

$$(59) \quad \begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} z_{13}(x, y) \frac{\Gamma(\alpha-x+1)}{\Gamma(\alpha-x-y)\Gamma(y)} = e^{\pi i y} \\
&\lim_{x\to\infty} z_{14}(x, y) \frac{\Gamma(\alpha-x+2-\gamma')}{\Gamma(\alpha-x-y)\Gamma(y+1-\gamma')} = e^{\pi i (y+1-\gamma')} \\
&\lim_{x\to\infty} z_{15}(x, y) \frac{\Gamma(\gamma-\beta+1-x)}{\Gamma(\alpha-x-y)\Gamma(y+\gamma-\alpha-\beta+1)} = e^{\pi i (y+\gamma-\alpha-\beta+1)} \cdot u_1(y) \\
&\lim_{x\to\infty} z_{16}(x, y) \frac{\Gamma(\gamma-\beta+1-x)}{\Gamma(\alpha-x-y)\Gamma(y+\gamma-\alpha-\beta+1)} = e^{\pi i (y+\gamma-\alpha-\beta+1)} \cdot u_2(y).
\end{aligned}$$

Diese asymptotischen Gleichungen gelten, wenn y endlich ist und $\Re(-x) > N$, wo N eine gewisse positive Zahl ist.

Aus diesen asymptotischen Gleichungen kann man durch die gleiche Verfahrungsweise, wie die gelegentlich des ersten kanonischen Systems angewandte, schliessen, dass $z_{13}(x, y)$, $z_{14}(x, y)$, $z_{15}(x, y)$ und $z_{16}(x, y)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems (37) ausmachen. Dieses Fundamentalsystem wollen wir das zweite System, kanonisch in Bezug auf x, nennen.

Wir können auch hier zeigen, dass die Lösungen $z_{13}(x, y)$, $z_{14}(x, y)$, $z_{15}(x, y)$ und $z_{16}(x, y)$ meromorfe Funktionen von x und y sind. Die entsprechenden Reihenentwicklungen konvergieren für endliche Werte von y mit Ausnahme für Pole, wenn $\Re(x) < \Re(\beta)$. Wir können jetzt die analytische Fortsetzung über die ganze x-Ebene hinausstrecken, unter Beobachtung dass die Lösungen der Gleichung:

$$(x+2-\beta)(x+y+2-\alpha)z(x+2,y)+(x+1-\beta)(x+y+2-\alpha)z(x+1,y+1)-$$
$$-[(x+1-\beta)(x+y+1-\alpha)+(x+1)(x+2-\gamma)]z(x+1,y)-$$
$$-x(x+1-\gamma)z(x,y+1)+x(x+1-\gamma)z(x,y)=0$$

genügen müssen. Dann lassen sich die Lösungen immer um einen Streifen von der Breite 1 nach rechts und so allmählich über die ganze Ebene hin fortsetzen.

Singuläre Stellen treten dabei in den Stellen

$$x=\beta+n \text{ und } x+y=\alpha+n, \quad n=0,1,2,\ldots$$

die einfache Pole sind, auf.

Die Funktionen des zweiten Systems, kanonisch in Bezug auf x, sind somit meromorfe Funktionen von x und y. Die Pole sind gelegen in den Stellen:

$$x=\beta+n,\ x+y-\alpha=n,\ y=-n,\ y=\gamma'-1-n,\ y=\alpha+\beta-\gamma-1-n$$

wobei n die Werte 0, 1, 2,... annimmt.

Wenn wir im zweiten System x und y, β und β', γ und γ' permutieren, erhalten wir ein neues Fundamentalsystem von Lösungen:

$$z_{17}(x,y),\ z_{18}(x,y),\ z_{19}(x,y) \text{ und } z_{20}(x,y)$$

die wir das zweite System, kanonisch in Bezug auf y, nennen wollen.

Zusammenfassend erhalten wir:

Das System (37) *bietet vier Lösungen, die ein Fundamentalsystem, kanonisch in Bezug auf x, ausmachen, und die durch die asymptotischen Gleichungen* (48) *gekennzeichnet sind, wenn*

$$-\frac{\pi}{2}\leq \operatorname{arc} x \leq \frac{\pi}{2}\cdot$$

Diese Lösungen sind meromorfe Funktionen von x und y mit einfachen Polen in den Stellen:

$$x=-n,\ x=\gamma-1-n,\ x=\alpha+\beta'-\gamma'-1-n,\ y=-n,\ y=\gamma'-1-n,$$
$$y=\alpha+\beta-\gamma-1-n$$

wobei n Null oder eine ganze positive Zahl ist.

Weiter bietet es vier Lösungen, die auch ein Fundamentalsystem, kanonisch in Bezug auf x, ausmachen, und die durch die asymptotischen Gleichungen (59) *gekennzeichnet sind, wenn*

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \operatorname{arc} x \leq -\frac{\pi}{2} \cdot$$

Auch diese Lösungen sind meromorfe Funktionen von x und y mit einfachen Polen in den Stellen:

$$x=\beta+n, \quad x+y-\alpha=n, \quad y=-n, \quad y=\gamma'-1-n, \quad y=\alpha+\beta-\gamma-1-n$$

wobei n Null oder eine ganze positive Zahl ist.

Durch Permutation von x und y, β und β', γ und γ' erhalten wir ferner zwei Fundamentalsysteme von Lösungen, kanonisch in Bezug auf y, mit analogen Eigenschaften.

Die Funktionen des ersten kanonischen Systems können durch lineare Relationen, deren Koeffizienten periodische Funktionen von x und y mit Perioden 1 sind, in den Funktionen des zweiten kanonischen Systems ausgedrückt werden. Diese periodischen Funktionen einmal gefunden, wird es möglich sein, die asymptotischen Eigenschaften auf beliebigen Radienvektoren zu überblicken. Ich gehe indessen jetzt nicht auf dieses Problem ein.