ÜBER QUASIANALYTISCHE FUNKTIONEN UND BESTIMMTHEIT ASYMPTOTISCHER ENTWICKELUNGEN.

VON

ALEXANDER OSTROWSKI

in BASEL.

Inhaltsübersicht:

Von BOREL und HADAMARD sind wiederholt Fragen aufgeworfen werden, in denen es sich um Verallgemeinerungen des Begriffes einer analytischen Funktion handelte. HADAMARD hat das Problem insbesondere folgendermassen explizite formuliert:

Man betrachte zu einer Folge positiver Zahlen m_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) die Klasse C_m der in einem Intervall $\langle a, b\rangle$ beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen $f(x)$ der reellen Variablen x, die den Ungleichungen genügen:

$$|f^{(\nu)}(x)| \leqq k^\nu m_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \qquad a \leqq x \leqq b \tag{1}$$

für eine geeignete (von $f(x)$ abhängige) Konstante k. Wie sollen die m_ν beschaffen sein, damit jede Funktion der Klasse C_m, die in einem Punkt von $\langle a, b\rangle$ mit ihren sämtlichen Ableitungen verschwindet, dann auch im ganzen Intervall $\langle a, b\rangle$ verschwinden muss?

Eine solche Funktionenklasse wird als *quasianalytisch* bezeichnet.

Der erste wesentliche Schritt zur Lösung dieses Problems wurde von DENJOY[1] vollzogen, der den folgenden schönen Satz aufstellte und unter gewissen weiteren Einschränkungen bewies: *Wenn* $\sum \frac{1}{\sqrt{m_\nu}}$ *divergiert, so ist die Klasse C_m quasianalytisch.* Einen in allen Fällen gültigen Beweis dieses Satzes hat allerdings erst CARLEMAN gegeben[2], der unmittelbar darauf noch eine weitergehende Vermutung von BOREL[3] beweisen konnte.[4] In weiteren Untersuchungen gelangte CARLEMAN zum folgenden abschliessenden Ergebnis:

Damit die Klasse C_m quasianalytisch ist, ist notwendig und hinreichend, dass das Integral

$$\int_1^\infty \lg \sum \frac{r^{2\nu}}{m_\nu^2} \frac{dr}{r^2} \tag{2}$$

divergiert.

Der Carlemansche Beweis dieses Satzes mit einer grossen Anzahl anderer damit im Zusammenhang stehender Ergebnisse hat in der vor zwei Jahren erschienenen ausserordentlich ideenreichen Schrift von CARLEMAN, Les fonctions quasianalytiques (Paris, 1926, Collection Borel) eine ausführliche Darstellung gefunden. Der Weg, den CARLEMAN dabei einschlägt, beruht auf der Aufdeckung eines Zusammenhangs des obigen Problems mit einer zuerst von G. N. WATSON

---

[1] A. DENJOY, C. R., t. 173 (1921), pp. 1329 ff.
[2] T. CARLEMAN, C. R., t. 174 (1922), pp. 373 ff.
[3] E. BOREL, C. R., t. 174 (1922), pp. 505 ff.
[4] T. CARLEMAN, C. R., t. 174 (1922), pp. 994 ff.

behandelten Fragestellung aus der Theorie der asymptotischen Reihen. WATSON hat nämlich bewiesen[5], dass, wenn für eine im Bereich

$$|z| < \varrho, \quad |\arg z| \leqq \frac{\pi}{2}$$

bis auf $z = 0$ reguläre Funktion $f(z)$ und eine Zahlenfolge c_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ die obere Grenze der Quotienten

$$\left| \frac{f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu z^\nu}{z^n} \right|, \quad 0 < |z| < \varrho, \quad |\arg z| \leqq \frac{\pi}{2}$$

mit m_n bezeichnet wird, es zur Zahlenfolge c_ν nur eine Funktion $f(z)$ geben kann, für die $m_n < k^n \Gamma((1-\varepsilon)n)$ gilt, unter k eine (von $f(z)$ abhängige) positive Konstante, unter ε eine beliebige positive Zahl verstanden.

Später hat FRITJOF NEVANLINNA[6] gezeigt, dass in diesem Satz $\Gamma((1-\varepsilon)n)$ durch $\Gamma(n)$ ersetzt werden kann. Hieran anknüpfend stellt nun CARLEMAN die folgende allgemeine Frage: Wenn ein Gebiet G und ein Randpunkt z_0 von G gegeben sind, welchen (notwendigen und hinreichenden) Bedingungen müssen die Konstanten $m_1, m_2, \ldots$ genügen, damit aus der Regularität von $f(z)$ in G und dem Bestehen der Ungleichungen

$$\frac{\left| f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu (z-z_0)^\nu \right|}{|z-z_0|^n} \leqq m_n, \quad z \text{ in } G,$$

die eindeutige Bestimmtheit von $f(z)$ folgt?

Offenbar kann man die Frage auch in der einfacheren Form formulieren: *Unter welchen Bedingungen folgt für eine in G reguläre Funktion $f(z)$ aus*

$$(3) \qquad \left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} \right| \leqq m_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$f(z) \equiv 0$? (*Das W-Problem* oder *Bestimmtheitsproblem*). Eine Folge m_n, für die dies zutrifft, nennen wir eine *W*-Folge für das Gebiet G und den Punkt z_0.

[5] G. N. WATSON, Roy. Soc. Trans., London, A 211 (1911) pp. 279 ff.

[6] F. NEVANLINNA, Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen, Dissertation, Helsingfors, 1918, sowie die Fortsetzung dieser Arbeit in Annales academiae sc. Fennicae, A XVI, No. 8 (1921).

Es gelingt nun Carleman, diese Frage für den Fall, dass G ein Kreis ist, vollständig zu beantworten, und sein Ergebnis lautet: *Für die Bestimmtheit von* $f(z)$ in diesem Falle *ist notwendig und hinreichend, dass das Integral*

$$\int_1^\infty \lg \sum_{\nu=1}^\infty \frac{r^{2\nu}}{m_\nu^2} \frac{dr}{r^2} \tag{2}$$

divergiert.

Durch die Transformation $z = \frac{1}{z'}$ ergibt sich hieraus sofort, dass die Divergenz desselben Integrals notwendig und hinreichend ist, damit für eine für $\Re z \geqq a > 0$ reguläre Funktion $\Phi(z)$ aus

$$|\Phi(z)| < \frac{m_n}{|z|^n}, \quad \Re z \geqq a, \tag{4}$$

das identische Verschwinden von $\Phi(z)$ folgt.

Aus diesem Resultat kann Carleman die oben angegebene Lösung des Hauptproblems über quasianalytische Funktionen auf dem folgenden Wege gewinnen: Es ist offenbar gestattet anzunehmen, dass der Punkt, in dem $f(x)$ mit allen Ableitungen verschwindet, der Anfangspunkt $a = 0$ ist. Dann kann zunächst für ein *unendliches* Intervall $\langle 0, \infty)$ aus jeder dort stetigen und beliebig oft differenzierbaren Funktion $f(x)$ mit

$$f^{(\nu)}(0) = 0, \ |f^{(\nu)}(x)| \leqq k^\nu m_\nu, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \quad 0 \leqq x < \infty \tag{5}$$

vermöge der Laplaceschen Integraltransformation

$$\Phi(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\, dx \tag{6}$$

eine für $\Re z > 0$ reguläre Funktion gewonnen werden, für die für $\Re z \geqq 1$

$$|\Phi(z)| \leqq \frac{k^\nu . m_\nu}{|z|^\nu} \tag{7}$$

gilt, und die nur gleichzeitig mit $f(x)$ identisch verschwindet, wie aus der bekannten Mellinschen Umkehrformel zu (6) (siehe die Formel (8) weiter unten) folgt. Dann ergibt sich aus dem Obigen, dass aus $f(x) \not\equiv 0$ die Konvergenz von (2) folgt.

Umgekehrt kann man aus einer im Falle der Konvergenz von (2) existierenden für $\Re z \geqq a > 0$ regulären Funktion $\Phi(z) \neq 0$, für die (7) gilt, vermöge der Transformation

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a+1-i\infty}^{a+1+i\infty} e^{x(z-a-1)} \Phi(z) \frac{dz}{z^2} \tag{8}$$

eine für $0 \leqq x < \infty$ beliebig oft differenzierbare Funktion $f(x)$ erhalten, für die sich dann leicht das Bestehen von (5) ergibt, und die, wie durch Anwendung der (zu (6) analogen) Mellinschen Umkehrformel zu (8) folgt, nicht identisch verschwindet.

Im Falle eines endlichen Intervalles $\langle 0, a)$ kann man aus einer in diesem Intervall den obigen Bedingungen genügenden Funktion $f(x)$ durch die Transformation $x = a\frac{t}{1+t}$ eine Funktion gewinnen, die für $\langle 0, \infty)$ den obigen Bedingungen genügt, woraus dann wiederum die Konvergenz von (2) folgt. Wenn aber umgekehrt (2) konvergiert, kann aus der im Intervall $\langle 0, \infty)$ nicht identisch verschwindenden Funktion $f(x)$, die den obigen Bedingungen genügt, durch eine geeignete Verschiebung des Intervalls eine für $\langle 0, a)$ nicht identisch verschwindende Funktion $f(x)$ gewonnen werden.

Die oben angegebene Lösung des auf einen Kreis bezüglichen Bestimmtheitsproblems (es genügt dann, für G $|z| < 1$, für z_0 $z = 1$ zu setzen) gelingt CARLEMAN durch Betrachtung des Variationsproblems

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{m_\nu^2} \int_{|z|=1} \left| \frac{f(z)}{(1-z)^\nu} \right|^2 |dz| = \text{Min.}, \tag{9}$$

dessen vollständige Lösung er in äusserst eleganter Weise mit Hilfe des Schwarzschen Spiegelungsprinzips gewinnt. Durch die Diskussion dieser Lösung kann man im Falle der Existenz einer nicht identisch verschwindenden Funktion $f(x)$, die (4) genügt, die Konvergenz von (2) beweisen, und umgekehrt im Falle der Konvergenz von (2) aus den Lösungen von (9) für verschiedene n durch eine geeignete Auswahl eine Funktion $f(x)$ erhalten, die (4) befriedigt.[7]

[7] $f(z)$ wird dabei als für $|z| \leqq 1$ regulär vorausgesetzt — bis eventuell auf $z = 1$.

Die ersten zwei Paragraphen der vorliegenden Abhandlung[8] sind der Darstellung eines neuen und wesentlich einfacheren Beweises der beiden Carlemanschen Hauptsätze gewidmet.

Die Betrachtung des Variationsproblems (9) hat im Carlemanschen Beweisansatz den Zweck, die verschiedenen Bedingungen (3) zusammenzufassen, da ja in verschiedenen Punkten z verschiedene m_n die schärfste Schranke in (3) liefern. Nun kann man dieser Tatsache viel direkter Rechnung tragen, indem man formal die Ungleichungen (3) in eine Ungleichung zusammenfasst:

$$(10) \qquad |f(z)| \leqq \operatorname*{Min}_n m_n |z-z_0|^n = \frac{1}{T\left(\frac{1}{|z-z_0|}\right)},$$

unter $T(r)$ das Maximum von $\frac{r^n}{m_n}$ für alle n verstanden. Die explicite Einführung der Funktion $T(r)$ erweist sich nun in der Tat nicht nur formal sondern auch sachlich als ausserordentlich zweckmässig, da man auf diese Weise den Anschluss an den Borel-Wimannschen Begriff des absolut grössten Gliedes einer Potenzreihe erhält und andererseits die Ungleichung (10) nunmehr direkt mit dem Poissonschen Integral behandeln kann. Die zu $T(r)$ gehörende Potenzreihe ist aber gerade $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{m_n}$ oder allgemeiner $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{kn}}{m_n^k}$ für ein ganzes $k \geqq 1$. So ergibt sich ein ausserordentlich kurzer und natürlicher Beweis des Carlemanschen Satzes über das Bestimmtheitsproblem beim Kreis, wobei die Carlemansche Bedingung der Divergenz von (2) in der allgemeineren Form der Divergenz von $\int_1^{\infty} \lg \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{kn}}{m_n^k} \frac{dr}{r^2}$ erscheint ($k \geqq 1$), die für $k=2$ die Carlemansche liefert, die einfachste Gestalt indessen für $k=1$ erhält.[9] Die von unserem Standpunkt natürlichste Bedingung ist diejenige der Divergenz von

$$(11) \qquad \int_1^{\infty} \lg T(r) \frac{dr}{r^2},$$

---

[8] Diese Abhandlung ist im Anschluss an ein Seminar entstanden, das ich im W. S. 1926/27 in Göttingen über das Carlemansche Buch abhielt. Die vorliegende endgültige Gestalt hat sie indessen erst im W. S. 1928/29 erhalten.

[9] Man könnte übrigens die Äquivalenz dieser Bedingungen für verschiedene k auch direkt einsehen, indem man die Überlegungen der pp. 50—54 des Carlemanschen Buches in geeigneter Weise modifiziert. Vgl. auch Nrr. 4, 14 weiter unten.

woraus die oben angegebenen leicht folgen. — Diesen Beweis stellen wir im § 1 (Nrr. 1—3) der vorliegenden Abhandlung dar. Es lässt sich dabei im Falle der Konvergenz von (2) sogar beweisen, dass es eine im Kreise G samt seiner Peripherie bis auf z_0 reguläre nirgends verschwindende Lösung $f(z)$ von (3) gibt, für die $|z-z_0| \lg |f(z)| \to 0$ für $z \to z_0$ gilt, was für Anwendungen auf die Theorie der quasianalytischen Funktionen im § 2 von Bedeutung ist (vgl. Nr. 7). In der Nr. 4 des § 1 zeigen wir sodann, dass die Carlemansche und unsere Bedingungen für beliebige k mit der Bedingung der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^*}$ für $\beta_n^* = \underset{\nu \geqq n}{\mathrm{Min}} \sqrt[\nu]{m_\nu}$ äquivalent ist. Dem Nachweis der Äquivalenz dieser Bedingungen mit derjenigen der Divergenz von (2) sind die Betrachtungen der pp. 50—54 des Carlemanschen Buches gewidmet. Wir schlagen einen vielleicht systematischeren Weg ein, der zugleich auf die tiefer eindringenden Betrachtungen des § 3 vorbereitet. Unser Beweis ist wohl auch deshalb von Interesse, weil bei ihm ein neuer Beweis des bekannten Konvergenzsatzes von CARLEMAN (mit Σa_n, $a_n > 0$, zugleich konvergiert auch $\Sigma \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$[10]) als einfaches Korrolar herausfällt. Diese Betrachtungen knüpfen an die Umformungen des Ausdrucks $V(r) = \int_0^r \frac{n(r)}{r} dr$ an, die in der Theorie der ganzen Funktionen seit den Arbeiten von Hrn. VALIRON geläufig sind.[11]

Im § 2 (Nrr. 6—10) gehen wir auf den Beweis des Carlemanschen Hauptsatzes über quasianalytische Funktionen ein, wobei unsere Darstellung in einem Punkte von der Carlemanschen abweicht. Die bereits oben erwähnte Konstruktion einer Lösung von (3) mit $|z-z_0| \lg |f(z)| \to 0$ für $z \to z_0$ gesattet nämlich im Falle der Konvergenz von $\int_1^{\infty} \lg T(r) \frac{dr}{r^2}$ *direkt* eine im Intervall $\langle 0, a \rangle$, $a > 0$, nicht identisch verschwindende Funktion $f(x)$ zu konstruieren, die in diesem Intervall den Bedingungen (5) (mit $k = 1$) genügt. Will man zu diesem Zwecke die von CARLEMAN konstruierte Funktion $f^*(x)$ benützen, die das Problem für das Inter-

[10] T. CARLEMAN, p. 112 des oben zitierten Buches. Vgl. den besonders einfachen von Hrn. LITTLEWOOD herrührenden Beweis in dem in der Fussnote 11 zitierten Buch von VALIRON, p. 186.

[11] Vgl. das zusammenfassende Buch von Hrn. VALIRON, Lectures on the General Theory of Integral Functions, Toulouse, 1923, insbesondere pp. 30, 50.

vall $\langle 0, \infty)$ löst, so muss zuerst das grösste ξ gefunden werden, für das $f^*(x)$ im Intervall $\langle 0, \xi\rangle$ durchweg verschwindet. Erst die Funktion $f^*(\xi + x)$ löst das Problem für ein beliebiges, endliches Intervall. Für das Carlemansche $f^*(x)$ steht nur die *Existenz* eines $\xi < \infty$ fest, während bei uns $\xi = 0$ ist.

Übrigens beweisen wir direkt die Existenz von $f(x)$, das (5) mit $k = 1$ erfüllt. Dies legt den Gedanken nahe, als eine Klasse (m_ν) von quasianalytischen Funktionen die Gesamtheit aller im Intervalle $\langle 0, a\rangle$ beliebig oft differenzierbaren Funktionen zu definieren, für die allgemein $|f^{(\nu)}(x)| < Cm_\nu$ gilt, wo C eine (von f abhängige) Konstante ist, sofern eine Funktion dieser Klasse, die in einem Punkt mit allen Ableitungen verschwindet, im ganzen Intervall identisch verschwinden muss. Aus unseren Betrachtungen folgt, dass die Bedingung der Divergenz von $\int_1^\infty \lg T(r) \frac{dr}{r^2}$ auch für diesen engeren Klassenbegriff nicht nur hinreichend, sondern auch *notwendig* ist. Es ergibt sich daher aus unserem Resultat, dass man so nur Unterklassen der nach HADAMARD quasianalytischen Klassen erhält und man sich also auf diese letzteren, umfangreicheren beschränken kann.

Mit dem allgemeinen Satz von CARLEMAN ist auch das oben angegebene von DENJOY herrührende spezielle Resultat mitbewiesen. Dagegen gehen wir nicht auf den Beweis des schärferen Satzes von BOREL[12] ein, wonach für eine im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ mit ihren n ersten Ableitungen stetige Funktion $f(s)$, für die $f^{(\nu)}(0) = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ gilt und die durch $f(1) = 1$ normiert ist, stets

$$\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\sqrt{M_2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{M_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} < k, \quad M_\nu = \operatorname*{Max}_{0 \leq s \leq 1} |f^{(\nu)}(s)|,$$

gilt, wo k eine absolute, von $f(s)$ und n unabhängige Konstante ist. In der Tat würden unsere Methoden keine wesentliche Vereinfachung gegenüber den Carlemanschen Beweisen dieses Satzes ermöglichen, und wir verweisen daher auf das Carlemansche Buch, pp. 24—27, 87—91. (Bei CARLEMAN ergibt sich für k der Wert $8\left(\frac{1}{2} + \pi e + 2\sqrt{\pi e}\right)$).

[12] Vgl. Fussnote 3.

Der Borelsche Satz legt das folgende Analogon beim Bestimmtheitsproblem nahe: Ist $f(z)$ für $|z| \leqq 1$ bis auf $z=1$ regulär und ist $\operatorname{Max} \frac{|f(z)|}{|z-1|^\nu} = m_\nu$, so gilt, wenn $f(z)$ durch $f(0)=1$ normiert wird,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{m_\nu}} < k, \quad k \text{ absolute Konstante.}$$

Es ist daher von Interesse, bereits hier zu bemerken, dass, wie wir im § 7 (Nr. 27) an einem Beispiel zeigen, dieser Satz nicht richtig ist.

Die Untersuchungen der weiteren Paragraphen der Arbeit sind aus den Versuchen entstanden, das W-Problem für möglichst allgemeine Gebiete zu lösen. In der Tat ist es uns gelungen, das W-Problem für das allgemeinste einfach zusammenhängende Gebiet G zu lösen, sofern der Randpunkt z_0, falls er ein mehrfacher Randpunkt ist, von höchstens abzählbarer Mehrfachheit ist, und dasselbe für $z=\infty$ gilt, wenn $z=\infty$ auf dem Rande von G liegt. Darüber hinaus gestattet unsere Methode, das Problem auch z. B. für ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet zu erledigen, sofern die z_0 enthaltende Randkomponente von der Gesamtheit der übrigen Randkomponenten isoliert verläuft und z_0 auf jener Randkomponente von höchstens abzählbarer Mehrfachheit ist, und ebenso $z=\infty$, wenn der unendlich ferne Punkt in derselben Randkomponente wie z_0 enthalten ist. Übrigens wird dabei das Problem in einer insofern allgemeineren Fassung behandelt, als anstatt der Ungleichungen (3) die allgemeinere Ungleichung

$$(12) \qquad \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^\lambda} \leqq m(\lambda), \qquad 0 \leqq \lambda < \infty,$$

zu Grunde gelegt wird, wobei $m(\lambda)$ auch den Wert $+\infty$ haben darf. Wenn $m(\lambda)$ für alle nicht ganzen λ gleich $+\infty$ gesetzt wird, erhält man speziell die Bedingungen (3). Das im § 6, Nr. 26 bewiesene Resultat (Satz VII) besagt (wenn G einfach zusammenhängend ist), dass aus (12) dann und nur dann das identische Verschwinden von $f(z)$ folgt, wenn entweder die untere Grenze von $m(\lambda)$ nicht positiv ist, oder $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \frac{\lg m(\lambda)}{\lambda} < \infty$ ist, oder das Integral

$$\int_0^{2\pi} \lg T_m\left(\frac{1}{|\omega(1-e^{i\theta})|}\right) d\theta$$

divergiert, wo $\omega(u)$ den Kreis $|u-1|<1$ auf G konform abbildet. Dabei wird unter $T_m(r)$ $\operatorname{Sup}_{\lambda\geqq 0}\frac{r^\lambda}{m(\lambda)}$[13] verstanden. Für spezielle Annahmen über die Beschaffenheit des Randes von G in der Nähe von z_0 lässt sich diese Integralbedingung wesentlich vereinfachen, und in dem wohl hinreichend allgemeinen Falle, dass der Rand in z_0 eine, wie wir sagen, »konforme Ecke mit der Öffnung $\pi\alpha$« bildet (vgl. Nrr. 19, 24)[14], reduziert sie sich auf die Bedingung der Konvergenz von

$$\int_1^\infty \lg T_m(r)\frac{dr}{r^{1+\frac{1}{\alpha}}},$$

worin insbesondere der Carlemansche Satz als ein spezieller Fall enthalten ist. Einige solche Resultate können wir übrigens bereits aus dem Carlemanschen Satz mit Hilfe geeigneter konformer Abbildungen direkt herleiten, worauf in Nr. 5 von § 1 eingegangen wird. —

Diese Lösung des W-Problems ergibt sich als einfaches Korrollar aus einer wesentlich tiefer eindringenden Untersuchung, die in den §§ 3—5 durchgeführt wird. Die Form (12), zu der wir (3) verallgemeinerten, legt nämlich die allgemeinere Frage nach den Eigenschaften der Funktion

$$\mu(\lambda)=\operatorname{Sup}_{z \text{ in } G}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^\lambda}$$

einer nicht negativen Zahl λ nahe. Wir bezeichnen eine solche Funktion als eine μ-Funktion des Gebietes G für den Punkt z_0. Und unsere Formulierung des W-Problems läuft offenbar auf die Frage hinaus, wann ein $m(\lambda)$ die Majorante einer μ-Funktion von G sein kann. — Es ist uns nun gelungen, eine vollständige Charakterisierung der μ-Funktionen für alle einfach zusammenhängenden Gebiete zu finden, für die z_0 (und $z=\infty$, wenn der unendlich ferne Punkt ein Randpunkt ist) kein Randpunkt von überabzählbarer Mehrfachheit ist, — und darüber hinaus für sehr allgemeine mehrfach zusammenhängende Gebiete.

---

[13] Wir benutzen in dieser Abhandlung durchgehend die Hausdorffsche Bezeichnung *Sup* für die obere und *Inf* für die untere Grenze. Ferner bezeichnen wir das monotone Zunehmen bzw. Abnehmen gegen α mit $\uparrow\alpha$ bzw. $\downarrow\alpha$. Ich benutze diese Bezeichnung seit Jahren in meinen Vorlesungen.

[14] Dieser bei uns mit Hilfe der konformen Abbildung definierte Begriff lässt sich auch, wie wir zeigen, geometrisch charakterisieren mit Hilfe einiger Ergebnisse von O. D. KELLOGG und S. WARSCHAWSKI.

Als charakteristische Eigenschaften einer μ-Funktion eines einfach zusammenhängenden Gebietes G für den Randpunkt z_0, der, ebenso wie der unendlich ferne Punkt, wenn er auf dem Rande von G liegt, höchstens von abzählbarer Mehrfachheit ist, ergaben sich:

Erstens: eine Eigenschaft, die weder von G noch von z_0 abhängig ist: $\lg \mu(\lambda)$ ist eine konvexe Funktion von λ, deren Endlichkeitsintervall die Form hat: $0 \leqq \lambda \leqq \lambda'$, wobei für $\lambda' < \infty$ $\mu(\lambda')$ sowohl endlich als auch unendlich sein kann, und $\mu(0) = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \mu(\lambda)$, $\mu(\lambda') = \mu(\lambda' - 0)$ ist.

Zweitens: eine Eigenschaft, die den Zusammenhang von $\mu(\lambda)$ für hinreichend grosse λ mit dem Verhalten des Randes von G in der Nähe von z_0 zum Ausdruck bringt: Bildet $z = \omega(u)$ $|u - 1| < 1$ konform auf G ab, so konvergiert das Integral

$$\int_0^{2\pi} \lg T_\mu\left(\frac{1}{|\omega(1 - e^{i\theta})|}\right) d\theta, \quad T_\mu = \operatorname*{Sup}_{\lambda \geqq 0} \frac{r^\lambda}{\mu(\lambda)}.$$

Eine Funktion $\mu(\lambda)$, die diesen beiden Bedingungen genügt, ist *von einem* λ an stets eine μ-Funktion von G für z_0. Soll dies aber für alle $\lambda \geqq 0$ gelten, so muss $\mu(\lambda)$ noch eine *dritte* Bedingung erfüllen, die sich auf die Ausdehnung von G bezieht: Ist $R = \operatorname{Max} |z - z_0|$ für z auf dem Rand von G, so ist $\frac{d \lg \mu(\lambda)}{d\lambda} \geqq \lg \frac{1}{R}$ für alle $\lambda \geqq 0$ — wegen der Monotonie von $\frac{d \lg \mu(\lambda)}{d\lambda}$ kommt es nur auf die Ableitung im Punkte 0 an —. Der Beweis dieses Hauptsatzes (Satz VI) wird im § 4 (Nrr. 15—18) erbracht, woran sich im § 5 Betrachtungen über die geometrischen Bedingungen dieses Satzes anschliessen, deren Ziel erstens die Diskussion und Vereinfachung der obigen Integralbedingung (Nrr. 19—21, 24), zweitens die Verallgemeinerung auf gewisse mehrfach zusammenhängende Gebiete (Nrr. 22—23) ist.

Der Beweis des Hauptsatzes beruht auf einer Reihe von Hilfssätzen, die in den §§ 3, 8, 9 bewiesen werden und unabhängig von ihrer Bedeutung für das W-Problem von selbständigem Interesse sind. Vor allem war es nötig, die Eigenschaften des für eine beliebige positive Funktion $\mu(\lambda)$ definierten $T_m(r)$ zu diskutieren. Wir führen dies im § 3 durch, indem wir jeder positiven Funktion $m(\lambda)$ eine dazugehörige Funktion $m^*(\lambda)$ mit demselben $T_m(r)$ und konvexem $\lg m^*(\lambda)$ zu-ordnen, die wir als die Wimansche Minorante von $m(\lambda)$ bezeichnen.[15] Daneben ist auch der Begriff der Faberschen Minorante[16] von Interesse, mit dessen Hilfe die Carlemanschen auf die Reihe $\sum \frac{1}{\beta_n^*}$ bezüglichen Formulierungen verallgemeinert werden können.

Bei diesen Betrachtungen spielt der Hilfssatz 4 in Nr. 11 eine wichtige Rolle, der die Transformation eines Stieltjesintegrals $\int f(\eta)\,dx(\eta)$ mit monotoner Belegung $x(\eta)$ auf ein Riemannsches Integral $\int f(y(x))\,dx$ sichert, wo $x(\eta)$ eine »Umkehrung» von $y(x)$ ist. Dieser Hilfssatz ist, wie man leicht erkennt, identisch mit der auf monotone Funktionen bezüglichen Spezialisierung eines Satzes von LEBESGUE[17] über Stieltjesintegrale relativ zu einer Funktion von beschränkter Variation. Wir haben es vorgezogen, einen sehr kurzen direkten Beweis dieses Hilfssatzes zu geben. Eine weitere Diskussion des Begriffes der Umkehrung einer monotonen Funktion wird erst im § 10 nachgetragen, da sie in dieser Arbeit nicht explizite benutzt wird.

Sodann handelt es sich um einen Satz aus der Theorie der konformen Abbildung, der einen Beitrag zur Frage liefert, inwiefern metrischer Zusammenhang der Elemente des Randes bei konformer Abbildung des Inneren eines einfach zusammenhängenden Gebietes auf das Innere eines Kreises gewahrt wird. Während die bisherigen Ergebnisse der Theorie der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung in dieser Richtung unter ganz allgemeinen Voraussetzungen mehr negative Resultate liefern, zeigen wir (Satz A), dass die Gesamtheit der erreichbaren Randpunkte, die in einer ϱ-Umgebung eines Randpunktes liegen, sich bei der Abbildung auf eine messbare Punktmenge der Kreisperipherie *von positivem Mass* abbildet, ein Ergebnis, das wohl kaum überraschend erscheint, aber aus den

---

[15] Eine mit diesem Begriff zusammenhängende Vergleichsmethode zur Untersuchung des Anwachsens ganzer Funktionen, die sich im Keime bereits bei BOREL und HADAMARD findet, hat durch WIMAN besonders weittragende Anwendungen gefunden. Später hat VALIRON diese Methode weiter ausgebaut und mit ihrer Hilfe eine Reihe wichtiger Ergebnisse hergeleitet. Vgl. WIMAN, Acta math., Bd. 37 (1914), pp. 305 ff. und Bd. 41 (1916) pp. 1 ff. Vgl. ferner VALIRONS oben zitiertes Buch.

[16] So bezeichne ich eine Begriffsbildung, die meines Wissens zum ersten Mal in der Arbeit von G. FABER, Beitrag zur Theorie der ganzen Funktionen, Math. Ann., Bd. 70 (1911), p. 51 benutzt wird.

[17] H. LEBESGUE, C. R. 150 (1910) pp. 86 ff.; Leçons sur l'intégration, 2. éd., Paris, 1928, pp. 258—260.

bisherigen Resultaten in der Theorie der konformen Abbildung nicht direkt zu folgen scheint, und zu dessen übrigens sehr kurzem Beweis wir den allgemeinen Lebesgueschen Satz über die Lösung der Randwertaufgabe für das logarithmische Potential heranziehen müssen. Aus diesem Ergebnis folgt als ein einfaches Korrolar ein Satz von Hrn. RADO, mit dessen Verschärfung sich kürzlich Herr SAKS beschäftigt hat. Das Sakssche Ergebnis ist aber wesentlich spezieller als das unsrige, da es z. B. in dem Fall eines mit einem Einschnitt versehenen Kreises nichts liefert. Hierüber sowie über weitere Anwendungen des Satzes A vergleiche man den § 8.

Im § 9 behandeln wir endlich die Frage, wann sich der Logarithmus der Abbildungsfunktion $\omega(z)$ eines einfach zusammenhängenden schlichten den Nullpunkt nicht enthaltenden Gebietes G auf den Einheitskreis der z-Ebene im Einheitskreis durch das Poissonsche Integral darstellen lässt. Es ergibt sich (Satz B), dass hierzu im wesentlichen hinreichend ist, dass der Nullpunkt, falls er am Rande von G liegt, dort nur von höchstens abzählbarer Mehrfachheit ist. Zum Beweis dieses Satzes leiten wir ein allgemeines Kriterium für die Darstellbarkeit einer im Einheitskreise regulären Potentialfunktion durch das Poissonsche Integral her, das auch für andere Zwecke brauchbar sein dürfte. Unter der Voraussetzung nämlich, dass ein im Einheitskreise reguläres Potential $P(z)$ am Rande nur abzählbar viele »Unbeschränktheitspunkte» besitzt, in deren beliebiger Nähe es nicht beschränkt bleibt, zeigen wir, dass für die Darstellbarkeit von $P(z)$ durch das Poissonsche Integral notwendig und hinreichend ist, dass erstens $(1-|z|)\,P(z)\to 0$ für $|z|\uparrow 1$, und zweitens der Mittelwert

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta < C, \qquad 0 \leqq r < 1,$$

d. h. gleichmässig beschränkt ist. Der Beweis beruht auf dem Satze, dass die zweite Bedingung allein bereits für die Darstellbarkeit von $P(z)$ durch das Stieltjes-Poissonsche Integral notwendig und hinreichend ist. Diesen Satz habe ich vor mehreren Jahren aufgestellt[18], wenn auch der Beweis an der zitierten Stelle nur skizziert ist. Derselbe Satz ist gleichzeitig mit mir von PLESS-

[18] A. OSTROWSKI, Über die Bedeutung der Jensenschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie, Acta Szeged, Bd. 1 (1923), pp. 80 ff.

NER[19] und EVANS[20] bewiesen worden. Da ich indessen einen weiteren Zusatz zu diesem Satze brauche, habe ich diese Gelegenheit benutzt, um meinen Beweis ausführlich darzustellen.

§ 1. Der Carlemansche Satz über W-Folgen.

1. Für eine für $|z| \leqq R$ reguläre und im Nullpunkt nicht verschwindende Funktion $g(z)$ lautet bekanntlich die Jensensche Ungleichung:

$$\lg|g(0)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg|g(Re^{i\theta})|\,d\theta. \tag{1, 1}$$

Ist nun $f(z)$ in $|z| \leqq R$ regulär und ist $\zeta = re^{i\vartheta}$ ein Punkt in $|z| < R$ mit $f(\zeta) \neq 0$, so nehmen wir eine lineare Abbildung des Kreises $|z| < R$ auf sich selbst vor, die den Nullpunkt in ζ überführt:

$$w(z) = \frac{R^2(z+\zeta)}{R^2 + z\bar{\zeta}}.$$

Wir wenden dann (1, 1) auf $g(z) = f(w(z))$ an und führen φ in $Re^{i\varphi} = w(Re^{i\theta})$ als neue Integrationsvariable anstelle von θ ein. Dann folgt

$$\lg|f(\zeta)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg\left|f\left(\frac{R^2(Re^{i\theta}+\zeta)}{R^2 + Re^{i\theta}\bar{\zeta}}\right)\right| d\theta$$

oder, wegen

$$\frac{R(Re^{i\theta}+\zeta)}{R+e^{i\theta}\bar{\zeta}} = Re^{i\varphi}, \quad Re^{i\theta} = \frac{R(Re^{i\varphi}-\zeta)}{R-e^{i\varphi}\bar{\zeta}},$$

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{R^2-|\zeta|^2}{|R-e^{i\varphi}\bar{\zeta}|^2} = \Re\frac{Re^{i\varphi}+\zeta}{Re^{i\varphi}-\zeta} = \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\vartheta-\varphi)+r^2} = K\left(\frac{r}{R}, \vartheta-\varphi\right):$$

---

[19] A. PLESSNER, Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen. Inauguraldissertation, Giessen (1923), Mitteilungen des Math. Sem. Giessen, Heft 10.

[20] G. C. EVANS und H. E. BRAY, C. R. 176 (1923), pp. 1042 ff., wo ein schwächerer Satz bewiesen wird, und G. C. EVANS, C. R. 177 (1923), pp. 241 ff., wo gerade die obige Fassung formuliert und ein dem in [18] gegebenen ganz analoger Beweis angedeutet wird. Vgl. ferner die Monographie von G. C. EVANS, The Logarithmic Potential, New York, 1927.

$$(1,2)\quad \lg|f(\zeta)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg|f(Re^{i\varphi})|\,\Re\frac{Re^{i\varphi}+\zeta}{Re^{i\varphi}-\zeta}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg|f(Re^{i\varphi})|\,K\left(\frac{r}{R},\,\vartheta-\varphi\right)d\varphi.$$

Hat insbesondere $f(z)$ keine Nullstelle für $|z|<R$, so gilt in (1, 1) und daher auch in (1, 2) das Gleichheitszeichen. Hieraus folgen insbesondere die Gleichungen

$$(1,3)\qquad \lg|z| = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta-1|=1} \lg|\zeta|\,\Re\frac{\zeta+z-2}{\zeta-z}\,|d\zeta|,\qquad |z-1|<1$$

$$(1,4)\qquad 1 = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta-1|=1} \Re\frac{\zeta+z-2}{\zeta-z}\,|d\zeta|.$$

Hilfssatz 1. *Es sei $f(z)$ regulär, nicht identisch Null und absolut $\leqq 1$ für $|z|\leqq 1$, bis auf $z=1$. Dann konvergiert das Integral*

$$\int_0^{2\pi} \lg|f(e^{i\theta})|\,d\theta.\text{[21]}$$

Für $|\zeta|<1$, $f(\zeta)\neq 0$ und $|\zeta|<R<1$ liefert (1, 2)

$$\lg|f(\zeta)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg|f(Re^{i\theta})|\,K\left(\frac{r}{R},\,\vartheta-\theta\right)d\theta,\qquad \zeta=re^{i\vartheta},$$

folglich für hinreichend kleine positive δ_1, δ_2 wegen $|f|\leqq 1$:

$$\lg|f(\zeta)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\delta_1}^{2\pi-\delta_2} \lg|f(Re^{i\theta})|\,K\left(\frac{r}{R},\,\vartheta-\theta\right)d\theta$$

und daher für $R\uparrow 1$, da auf $|z|=1$ für $\delta_1\leqq\theta\leqq 2\pi-\delta_2$ höchstens logarithmische Singularitäten von $\lg f(z)$ liegen können:

[21] Es ist dies ein sehr spezieller Fall eines Satzes von P. Fatou und G. Szegö. Unser Beweis entspricht dem Fatouschen Beweis, ist aber, dem vorliegenden Fall entsprechend, ganz elementar.

$$\lg|f(\zeta)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta_1}^{2\pi-\delta_2} \lg|f(e^{i\theta})|\,K(r, \vartheta-\theta)\,d\theta.$$

Und da dies für alle positiven δ_1, δ_2 gilt, und der Integrand nie positiv wird, folgt endlich

$$\lg|f(\zeta)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} \lg|f(e^{i\theta})|\,K(r, \vartheta-\theta)\,d\theta, \qquad \zeta = re^{i\vartheta},$$

wo das Integral rechts sicher konvergent ist. Wegen

$$(1, 5) \qquad \frac{1+r}{1-r} \geqq K(r, \vartheta-\theta) = \Re\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta} \geqq \frac{1-r}{1+r}$$

ist dann auch $\int\limits_{0}^{2\pi} \lg|f(e^{i\theta})|\,d\vartheta$ konvergent, w. z. b. w.

2. Mit E bezeichnen wir den Kreis $|z-1| < 1$. Es sei $f(z)$ regulär in E, und es mögen in E die Relationen gelten

$$(2, 1) \qquad |f(z)| \leqq Cm_n|z|^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

für eine positive Konstante C und eine Folge von positiven Konstanten m_n. Wir setzen für $r > 0$

$$(2, 2) \qquad T(r) = \operatorname*{Sup}_{n \geqq 1} \frac{r^n}{m_n}\cdot$$

Satz I. *Ist das Integral*

$$(2, 3) \qquad \int\limits_{1}^{\infty} \lg T(r)\frac{dr}{r^2}$$

divergent, so folgt aus dem Bestehen der Relationen (2, 1) *für eine in E reguläre Funktion $f(z)$ das identische Verschwinden von $f(z)$.*[22] *Konvergiert aber* (2, 3), *so gibt es eine in E und sogar für $|z-1| \leqq 1$ bis auf $z=0$ reguläre und nicht verschwindende Funktion $f(z)$, für die die Relationen* (2, 1) *durchweg in E erfüllt sind*

[22] Wir sagen dann, die Folge m_ν sei eine W-Folge für den Kreis.

und für die sich $\lg |f(z)|$ *durch das Poissonsche Integral darstellen lässt:*

$$\lg |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |f(e^{i\vartheta})| \, \Re \frac{e^{i\vartheta} + z - 1}{e^{i\vartheta} - z + 1} \, d\vartheta, \quad z = r e^{i\varphi}.$$ [23]

Beweis: Wir dürfen und wollen annehmen, dass $\sqrt[n]{m_n} \to \infty$ ist. Denn aus $\underline{\lim} \sqrt[n]{m_n} < R$ würde einerseits folgen $T(r) = \infty$ für $r > R$ und damit die Divergenz von (2, 3), andererseits aber nach (2, 1) $|f(z)| < C(R|z|)^{n_k}$ für beliebig grosse n_k, sodass $f(z)$ für $|z| < \frac{1}{R}$ und daher identisch verschwinden müsste. — Daher ist $T(r) = \operatorname{Sup}_{n \geqq 1} \frac{r^n}{m_n}$ endlich und stetig für endliche r und $T(r) \uparrow \infty$. Ferner bemerken wir, dass (2, 3) gleichzeitig mit $\int_0^1 \lg T\left(\frac{k}{r}\right) dr$ konvergiert für jede positive Konstante k und ebenso auch gleichzeitig mit $\int_{|z-1|=1} \lg T\left(\frac{k}{|z|}\right) |dz|$, da für $|z| = r$, $z \to 0$ $\frac{|dz|}{dr} \to 1$ ist, wenn z den Kreis $|z - 1| = 1$ durchläuft. Endlich dürfen wir annehmen, dass $|f(z)| \leqq 1$ in E ist.

a) Es sei $f\left(\frac{\zeta}{2}\right) \neq 0$, $|\zeta - 1| < 1$. Dann folgt aus dem Hilfssatz 1, angewandt auf $f\left(\frac{z+1}{2}\right)$, dass das Integral

$$(2, 4) \qquad \int_0^{2\pi} \lg \left| f\left(\frac{e^{i\theta} + 1}{2}\right) \right| d\theta = \int_{|z-1|=1} \lg \left| f\left(\frac{z}{2}\right) \right| |dz|$$

konvergiert. Andererseits folgt aus (2, 1) für $|z - 1| < 1$, $z \neq 0$

$$\left| f\left(\frac{z}{2}\right) \right| \leqq C m_n \left| \frac{z}{2} \right|^n, \quad \left| f\left(\frac{z}{2}\right) \right| \leqq \frac{C}{T\left(\frac{2}{|z|}\right)},$$

---

[23] Der Satz rührt von CARLEMAN her, bis auf den letzten Teil, der die Darstellbarkeit durch das Poissonsche Integral behauptet.

$$\lg T\left(\frac{2}{|z|}\right) \leqq \lg \frac{1}{\left|f\left(\frac{z}{2}\right)\right|} + \text{Const.},$$

so dass mit (2, 4) auch (2, 3) konvergiert.

b) Es konvergiere (2, 3), daher auch $\int\limits_{|z-1|=1} \lg T\left(\frac{1}{2|z|}\right)|dz|$, daher auch

$$P(z) \equiv -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta-1|=1} \lg T\left(\frac{1}{2|\zeta|}\right) \Re \frac{\zeta+z-2}{\zeta-z}|d\zeta|,$$

wo z ein beliebiger Punkt von E ist. $P(z)$ ist ein in E reguläres Potential und der Realteil einer in E regulären Funktion $g_1(z)$, so dass, $g_2(z)=e^{g_1(z)}$ gesetzt, $\lg|g_2(z)|=P(z)$ ist. Dann folgt für $f(z)=g_2\left(\frac{z}{2}\right)$ und $n\geqq 0$ in E nach (1, 3) für $|z-1|\leqq 1$ bis auf $z=0$:

$$\lg\frac{|f(z)|}{\left|\frac{z}{2}\right|^n} = P\left(\frac{z}{2}\right) - n\lg\left|\frac{z}{2}\right| = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta-1|=1} \lg T\left(\frac{1}{2|\zeta|}\right)\Re\frac{\zeta+\frac{z}{2}-2}{\zeta-\frac{z}{2}}|d\zeta| -$$

$$-\frac{n}{2\pi}\int\limits_{|\zeta-1|=1}\lg|\zeta|\,\Re\frac{\zeta+\frac{z}{2}-2}{\zeta-\frac{z}{2}}|d\zeta|,$$

$$\lg\frac{|f(z)|}{\left|\frac{z}{2}\right|^n} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta-1|=1}\lg\left(|\zeta|^n T\left(\frac{1}{2|\zeta|}\right)\right)\Re\frac{\zeta+\frac{z}{2}-2}{\zeta-\frac{z}{2}}|d\zeta|,$$

oder, wegen $T\left(\frac{1}{2|\zeta|}\right) \geqq \frac{1}{2^n|\zeta|^n m_n}$, $\lg\left|\zeta^n T\left(\frac{1}{2|\zeta|}\right)\right| \geqq \lg\frac{1}{2^n m_n}$ und (1, 4),

$$\lg\frac{|f(z)|}{\left|\frac{z}{2}\right|^n} \leqq \lg(2^n m_n)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta-1|=1}\Re\frac{\zeta+\frac{z}{2}-2}{\zeta-\frac{z}{2}}|d\zeta| = \lg(2^n m_n),$$

$$|f(z)| \leqq m_n|z|^n,$$

womit, da $f(z)$ für $|z-1| \leqq 1$ bis auf $z=1$ regulär ist und nicht verschwindet, unser Satz bewiesen ist.

3. Wir machen nun von dem folgenden Satz der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen Gebrauch: Ist $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ganz und ist $T_f(r)=\operatorname{Max}_n |a_n| r^n$, $\mathfrak{M}(r)=\operatorname{Max}_{|z|=r} |f(z)|$, so hat jede der Relationen

$$\lg\lg T(r)=O(\lg r),\ \lg\lg \mathfrak{M}(r)=O(\lg r) \qquad (r\to\infty)$$

zur Folge, dass

$$\frac{\lg \mathfrak{M}(r)}{\lg T(r)} \to 1 \qquad (r\to\infty) \tag{3, 1}$$

ist.[24] Die in Nr. 2 eingeführte Funktion $T(r)$ gehört offenbar für $r>0$ zur ganzen Funktion $\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{m_n}$ als $T_\varphi(r)$, und das zugehörige $\mathfrak{M}(r)$ ist gleich $\varphi(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{m_n}$. Aus der Konvergenz von (2, 3) folgt nun für $r\uparrow\infty$

---

[24] Beim Beweis kann man sich offenbar auf den Fall beschränken, dass $f(0)=1$ ist, da für eine ganze transzendente Funktion $\lg r=o(\lg T(r))$ ist — $T(r)$ wächst ja für hinreichend grosse r schneller als jede Potenz von r. Unter dieser Annahme liefert die Formel (2, 10) (Theorem 11) des in der Fussnote 11 zitierten Valironschen Buches:

$$\lg T(r)<\lg \mathfrak{M}(r)<\lg T(r)+\lg\left(2N\left(r+\frac{r}{N(r)}\right)+1\right), \tag{a}$$

wo $N(r)\geqq 0$ und mit $T(r)$ durch die Relation zusammenhängt

$$\lg T(r)=\int_0^r \frac{N(x)}{x}\,dx. \tag{b}$$

Aus (b) folgt aber $N\left(\frac{r}{e}\right)\lg e \leqq \lg T(r)$ und daher

$$\lg N(r)\leqq \lg\lg T(er). \tag{c}$$

Aus $\lg\lg T(r)=O(\lg r)$ folgt daher $\lg N(r)=O(\lg r)$ und dasselbe folgt erst recht aus $\lg\lg\mathfrak{M}(r)= =O(\lg r)$. Dann wird aber aus (a)

$$\lg T(r)<\lg\mathfrak{M}(r)<\lg T(r)+O(\lg r)=\lg T(r)+o(\lg T(r)),$$

woraus die Behauptung ohne weiteres folgt.

$$\frac{\lg T(r)}{r} = \lg T(r) \int_r^\infty \frac{d\varrho}{\varrho^2} \leqq \int_r^\infty \lg T(\varrho) \frac{d\varrho}{\varrho^2} \to 0,$$

so dass aus (3, 1) auch die Konvergenz von

$$\int^\infty \lg \sum_{n=1}^\infty \frac{r^n}{m_n} \frac{dr}{r^2} = \int^\infty \lg \varphi(r) \frac{dr}{r^2} \tag{3, 2}$$

folgt. Umgekehrt folgt aus der Konvergenz des letzten Integrals genau ebenso wie oben $\frac{\lg \varphi(r)}{r} \to 0$, so dass (3, 1) gilt und auch (2, 3) konvergiert. Die Bedingung der Divergenz von (2, 3) ist also äquivalent mit der Bedingung der Divergenz von (3, 2). Allgemeiner, ist $k > 0$, so konvergiert (2, 3) gleichzeitig mit $\int^\infty \lg (T(r)^k) \frac{dr}{r^2}$, und $T(r)^k$ ist gleich $T_k(r^k)$, wo $T_k(r)$ das zur Funktion $\varphi_k(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{r^n}{m_n^k}$ gehörende $T(r)$ ist. Daher ist die Bedingung der Divergenz von (3, 2) ersetzbar durch die Bedingung der Divergenz von

$$\int^\infty \lg \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{r^n}{m_n}\right)^k \frac{dr}{r^2}, \tag{3, 3}$$

wo $k > 0$, sonst aber beliebig ist. Für $k = 2$ ergibt sich die Bedingung von Carleman.

Genau dieselbe Überlegung beweist offenbar, dass für ein $\alpha > 0$ und $k > 0$ die Integrale

$$\int^\infty \lg T(r) \frac{dr}{r^{1+\frac{1}{\alpha}}} \quad \text{und} \quad \int^\infty \lg \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{r^n}{m_n}\right)^k \frac{dr}{r^{1+\frac{1}{\alpha}}}$$

gleichzeitig konvergieren und divergieren.

4. Eine andere Form der Bedingung von Nr. 2 erhält man folgendermassen: Es sei für $n > 0$ $\sqrt[n]{m_n} = \beta_n$, wo nach dem Obigen $\beta_n \to \infty$ angenommen werden darf.

Wir ersetzen die Folge β_n durch ihre »*Fabersche Minorante*»[25], d. h. durch die Folge der $\beta_n^* = \operatorname*{Min}_{\nu \geqq n} \beta_\nu$, so dass $\beta_n^* \uparrow \infty$ ist.

Satz II. *Für die Divergenz des Integrals* (2, 3) *ist notwendig und hinreichend, dass, unter β_n^* die Fabersche Minorante der $\beta_n = \sqrt[n]{m_n}$ verstanden, die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^*} \tag{4, 1}$$

divergiert.

Zum Beweis verfahren wir so: es sei $n(r)$ die Anzahl der $\beta_n^* \leqq r$. Dann gilt offenbar $\beta^*_{n\left(\frac{r}{e}\right)} = \beta_{n_1}$, $n_1 \geqq n\left(\frac{r}{e}\right)$,

$$T(r) \geqq \left(\frac{r}{\beta^*_{n\left(\frac{r}{e}\right)}}\right)^{n_1} \geqq \left(\frac{r}{\beta^*_{n\left(\frac{r}{e}\right)}}\right)^{n\left(\frac{r}{e}\right)},$$

wegen $\dfrac{r}{\beta^*_{n\left(\frac{r}{e}\right)}} \geqq e$, woraus folgt:

$$\lg T(r) \geqq n\left(\frac{r}{e}\right). \tag{4, 2}$$

Es gilt andererseits, wegen $n(r) = 0$ für $0 \leqq r \leqq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$,

$$V(r) = \int_0^r \frac{n(r)}{r}\, dr = \int_0^r n(r)\, d \lg r = -\int_0^r \lg r\, dn(r) + n(r) \lg r,$$

$$V(r) = \lg \frac{1}{\beta_1^*} + \lg \frac{1}{\beta_2^*} + \cdots + \lg \frac{1}{\beta^*_{n(r)}} + n(r) \lg r,$$

$$V(r) = \int_0^r \frac{n(r)}{r}\, dr = \lg \frac{r^{n(r)}}{\beta_1^* \beta_2^* \ldots \beta^*_{n(r)}}.$$

Ist nun

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\beta_1^* \ldots \beta_n^*},$$

---

[25] Vgl. Fussnote 16 sowie Nr. 14 weiter unten.

so ist

(4, 3) $$V(r)=\lg T_\psi(r)\geqq \lg T(r)^{26},$$

da die Koeffizienten der einzelnen Glieder von $\psi(z)$ grösser sind als die Koeffizienten der entsprechenden Glieder von $\varphi(z)$, wegen

$$\beta_1^*.\beta_2^*\dots\beta_k^*\leqq\beta_k^{*k}\leqq\beta_k^k=m_k.$$

Nun lässt sich die Reihe (4, 1) schreiben als das Stieltjessche Integral $\int\limits_0^\infty \frac{d\,n(r)}{r}$. Die partielle Integration liefert für ein $R>1$, wegen $n(r)=0$ für kleine $r\geqq 0$,

$$\int\limits_0^R \frac{d\,n(r)}{r}=\int\limits_0^R \frac{n(r)}{r^2}dr+\frac{n(R)}{R}.$$

Aus der Konvergenz von $\int\limits^\infty \frac{d\,n(r)}{r}$ folgt daher die von $\int\limits^\infty \frac{n(r)dr}{r^2}$. Ist umgekehrt $\int\limits^\infty \frac{n(r)}{r^2}dr$ konvergent, so folgt wegen $n(r)\uparrow\infty$ für $r\uparrow\infty$

$$\frac{n(R)}{R}=n(R)\int\limits_R^\infty \frac{dr}{r^2}\leqq\int\limits_R^\infty \frac{n(r)}{r^2}dr\to 0,$$

so dass auch $\int\limits^\infty \frac{d\,n(r)}{r}$ konvergiert. Die Integrale $\int\limits^\infty \frac{d\,n(r)}{r}$ und $\int\limits^\infty \frac{n(r)}{r^2}dr$ konvergieren und divergieren also gleichzeitig. Beim Beweis dieser Tatsache haben wir nur benutzt, dass $n(r)\uparrow\infty$ und verschwindet in der Nähe des Nullpunktes. Daher ist dieselbe Überlegung auch anwendbar auf $\int\limits^\infty \frac{n(r)}{r^2}dr=\int\limits^\infty \frac{d\,V(r)}{r}$ und $\int\limits^\infty \frac{V(r)\,dr}{r^2}$. Wir schliessen, dass die drei Integrale

[26] Die Gleichung $V(r)=\lg T_\psi(r)$ folgt hier leicht aus der Tatsache der Monotonie der β_ν^*, vgl. etwa VALIRON, l. c., p. 30. Diese Tatsache ist übrigens als spezieller Fall in den Sätzen des § 3 enthalten, weshalb wir auf ihren einfachen direkten Beweis nicht eingehen wollen.

$$\int_0^\infty \frac{dn(r)}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^*}, \quad \int_0^\infty \frac{n(r)dr}{r^2}, \quad \int_0^\infty \frac{V(r)}{r^2}dr \tag{4, 4}$$

gleichzeitig konvergieren und divergieren. Wir haben sogar noch mehr bewiesen, nämlich dass diese drei Integrale die gleichen Werte haben. — Wendet man dieselbe Überlegung auf die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{dn(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad \int_0^\infty \frac{n(r)}{r^{1+\frac{1}{\alpha}}}dr, \quad \int_0^\infty \frac{V(r)}{r^{1+\frac{1}{\alpha}}}dr$$

für ein $\alpha > 0$ an, so ergibt sich allgemein, dass diese Integrale gleichzeitig konvergieren und divergieren[27] und dass überdies

$$\int_0^\infty \frac{V(r)}{r^{1+\frac{1}{\alpha}}}dr = \alpha \int_0^\infty \frac{n(r)}{r^{1+\frac{1}{\alpha}}}dr = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{dn(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}}$$

ist. — Nun folgt aus der Konvergenz von (2, 3) nach (4, 2) auch die Konvergenz von $\int^\infty \frac{n\left(\frac{r}{e}\right)}{r^2}dr$ und daher auch von $\int^\infty \frac{n(r)}{r^2}dr$, daher auch von $\int^\infty \frac{dn(r)}{r}$, d. h. von (4, 1). Umgekehrt folgt aus der Konvergenz von (4, 1) nach dem oben Gezeigten die von $\int^\infty \frac{V(r)}{r^2}dr$, daher nach (4, 3) auch die von (2, 3), womit der Satz II vollständig bewiesen ist.

Im Laufe des Beweises haben wir insbesondere gezeigt: Aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^*}$ mit $\beta_n^* \uparrow \infty$ folgt die von $\int^\infty \lg T_\psi(r)\frac{dr}{r^2}$, wo $\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\gamma_n^n}$ mit $\gamma_n = \sqrt[n]{\beta_1^* \ldots \beta_n^*}$ ist. Die Anwendung des soeben bewiesenen Resultates auf die Folge der γ_n, die bereits monoton ist, zeigt, dass dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$ konvergiert. Wir haben damit den folgenden Konvergenzsatz von Carleman wiedergefunden:

---

[27] Vgl. hierzu etwa Valiron, l. c., p. 52.

Aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, folgt die von $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.[28] Allerdings gilt unser Beweis zuerst nur, wenn die a_n monoton abnehmend geordnet sind. Offenbar ist aber $\sum \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ bei jeder anderen Anordnung gliedweise kleiner und konvergiert daher a fortiori.

5. Aus unseren Bedingungen folgt, dass der W-Charakter der Folge m_n sich nicht ändert, wenn man jedes m_n mit einer Zahl $a_n > 0$ multipliziert, vorausgesetzt, dass $\sqrt[n]{a_n}$ zwischen zwei positiven festen endlichen Konstanten bleiben. Daraus folgt ferner:

Satz III. *Ist $h(z)$ eine in E reguläre Funktion, für die $\left|\frac{h(z)}{z}\right|$ in E zwischen zwei positiven endlichen Konstanten bleibt, so ist dafür, dass aus dem Bestehen der Relationen*

$$|f(z)| \leqq C m_n |h(z)|^n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

für eine in E reguläre Funktion $f(z)$ und eine geeignete Konstante C das identische Verschwinden von $f(z)$ folgt, notwendig und hinreichend, dass $\int^{\infty} \lg T(r) \frac{dr}{r^2}$ divergiert, unter $T(r)$ das $\operatorname*{Sup}_{n \geqq 1} \frac{r^n}{m_n}$ verstanden. Insbesondere bleibt der Satz I mutatis mutandis richtig, wenn E durch einen beliebigen durch den Nullpunkt hindurchgehenden Kreis ersetzt wird.

Dieses Resultat gestattet es, unsere Sätze sofort auf sehr allgemeine Klassen von Gebieten auszudehnen:

Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der u-Ebene, das den unendlich fernen Punkt nicht im Innern enthält, und $P(u = a)$ sei ein einfacher Randpunkt von G. Es sei ferner m_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ eine Folge positiver Zahlen. Wir sagen dann, diese Folge sei eine W-Folge für das Gebiet G und den Randpunkt P, wenn jede in G reguläre Funktion $g(u)$, für die in G für eine geeignete Konstante C die Relationen erfüllt sind:

$$(5, 1) \qquad |g(u)| \leqq C m_n |u - a|^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

identisch verschwindet. $\left(\text{Für } a = \infty \text{ ist in } (5, 1)\ u - a \text{ durch } \frac{1}{u} \text{ zu ersetzen}\right)$.

[28] Vgl. Fussnote 10. Diese Beweismethode gestattet eine wesentliche Verallgemeinerung des Carlemanschen Konvergenzsatzes.

Ist nun G einfach zusammenhängend, ist der Rand R von G in der Nähe von P stückweise stetig gekrümmt, besitzt er in P eine Tangente, und ist $\omega(z)$ eine Funktion, die E derart konform auf G abbildet, dass der Nullpunkt dabei in P übergeführt wird, so geht dabei $g(u)$ in $g(\omega(z)) \equiv f(z)$ über, und es gilt

$$0 < c_1 \leqq \left| \frac{\omega(z) - a}{z} \right| \leqq c_2 < \infty \quad \text{bzw.} \quad 0 < c_1 \leqq |z\,\omega(z)| \leqq c_2 < \infty,$$

unter c_1, c_2 geeignete Konstanten verstanden.[29] Da nun die Bedingungen (5, 1) für $f(z)$ mit

$$|f(z)| \leqq C m_n |\omega(z) - a|^n$$

gleichbedeutend sind, folgt aus dem Obigen, dass die notwendige und hinreichende Bedingung für den W-Charakter der m_n-Folge die Divergenz von (2, 3) ist — bzw. jede der damit nach dem Obigen äquivalenten Bedingungen.

Um aber die Frage nach den W-Folgen unter allgemeineren Voraussetzungen über die Beschaffenheit des Randes von G in der Umgebung von P — das *W-Problem* — angreifen zu können, werden wir die ganze Fragestellung wesentlich verallgemeinern. Dieser Verallgemeinerung wird eine Betrachtung über Wimansche und Fabersche Minoranten vorausgeschickt werden. Zuerst aber soll der Carlemansche Satz über quasianalytische Funktionen hergeleitet werden.

§ 2. Der Carlemansche Satz über quasianalytische Funktionen.

6. **Hilfssatz 2.** *Es sei $P(z)$ eine im Innern des Einheitskreises reguläre Potentialfunktion, die dort durch das Poissonsche Integral mit absolut integrabler Belegung $\alpha(\varphi)$ darstellbar ist:*

$$P(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) K(r, \vartheta - \varphi) d\varphi, \quad z = re^{i\vartheta}, \quad K(r, \vartheta - \varphi) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta - \varphi)}.$$

Dann gilt für $|z| \uparrow 1$ gleichmässig in ϑ

$$(6, 1) \qquad (1 - |z|) P(z) \to 0, \quad P(z) = o\left(\frac{1}{1 - |z|}\right).$$

[29] Dies ergibt sich leicht aus den Sätzen von O. D. Kellogg, Trans. Am. Math. Soc., Bd. 13 (1912), pp. 109 ff. und ist im Falle analytischer Randkurven nach einem in wesentlich allgemeineren Fällen gültigen Verfahren daraus von W. F. Osgood und E. H. Taylor, Trans. Am. Math. Soc., Bd. 14 (1913), p. 282 gefolgert worden. Wir besprechen diese Sätze und ihre Verschärfungen durch S. Warschawski im § 5 Fussnote 43.

Beweis. Da das Integral $\int^{\vartheta} |\alpha(\varphi)|\,d\varphi$ eine stetige Funktion von ϑ ist, ist es auch gleichmässig stetig in ϑ und es folgt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert mit $\underset{\varepsilon \to 0}{\delta(\varepsilon) \to 0}$, sodass für alle ϑ

$$\int_{\vartheta-\delta(\varepsilon)}^{\vartheta+\delta(\varepsilon)} |\alpha(\varphi)|\,d\varphi < \varepsilon$$

gilt. Ferner ist

$$K(r, \vartheta - \varphi) = \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r^2 \sin^2 \dfrac{\vartheta-\varphi}{2}}$$

und daher für $0 < r < 1$

$$K(r, \vartheta - \varphi) < \frac{2}{1-r},$$

und ferner, so lange $\pi \geqq |\vartheta - \varphi| \geqq \delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) < \frac{\pi}{2}$ ist,

$$K(r, \vartheta - \varphi) \leqq \frac{1-r^2}{4r^2 \sin^2 \dfrac{\vartheta-\varphi}{2}} \leqq \frac{1-r}{r^2} \frac{\pi^2}{\delta^2(\varepsilon)}.$$

Hieraus folgt aber für $z = re^{i\vartheta}$, $\alpha(\varphi)$ als periodisch mit der Periode 2π geeignet fortgesetzt,

$$2\pi P(z) = \int_{\vartheta-\delta(\varepsilon)}^{\vartheta+\delta(\varepsilon)} \alpha(\varphi) \,.\, K(r, \vartheta - \varphi)\,d\varphi + \int_{\vartheta+\delta(\varepsilon)}^{2\pi+\vartheta-\delta(\varepsilon)} \alpha(\varphi)\, K(r, \vartheta-\varphi)\,d\varphi$$

$$|P(z)| \leqq \frac{1}{2\pi} \frac{2}{1-r} \int_{\vartheta-\delta(\varepsilon)}^{\vartheta+\delta(\varepsilon)} |\alpha(\varphi)|\,d\varphi + \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^2(1-r)}{r^2\,\delta(\varepsilon)^2} \int_{\vartheta+\delta(\varepsilon)}^{2\pi+\vartheta-\delta(\varepsilon)} |\alpha(\varphi)|\,d\varphi$$

$$|P(z)| \leqq \frac{1}{2\pi} \frac{2}{1-r} \cdot \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^2(1-r)}{r^2 \delta^2(\varepsilon)} C, \quad C = \int_0^{2\pi} |\alpha(\varphi)|\,d\varphi.$$

Daher ist

$$(1-r)\,|P(z)| \leqq \frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{C\,.\,\pi}{2} \frac{(1-r)^2}{r^2 \delta^2(\varepsilon)}$$

und folglich, sobald $\frac{1-r}{r^2} < \sqrt{\varepsilon}\,.\,\delta(\varepsilon)$ wird:

$$(1-r)\,|P(z)| \leqq \varepsilon\left(\frac{1}{\pi} + \frac{C\,.\,\pi}{2}\right),$$

woraus die Behauptung des Hilfssatzes folgt.

7. **Hilfssatz 3.** *Ist für positive m_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, unter $T(r)$ $\operatorname*{Sup}_{n\geqq 1} \frac{r^n}{m_n}$ verstanden, das Integral*

$$\int_1^\infty \lg T(r)\frac{dr}{r^2} \tag{7, 1}$$

divergent, so folgt aus dem Bestehen der Relationen für $\Re z \geqq \frac{1}{2}$

$$|\Phi(z)| \leqq C\cdot\frac{m_n}{|z|^n}, \quad n=0, 1, 2, 3, \ldots, \ C=\text{Const.}, \tag{7, 2}$$

für eine für $\Re z \geqq \frac{1}{2}$ reguläre Funktion $\Phi(z)$, dass $\Phi(z)$ identisch verschwindet. Wenn aber das Integral (7, 1) konvergiert, so gibt es stets eine nirgends verschwindende, für $\Re z \geqq \frac{1}{2}$ reguläre Funktion $\Phi(z)$, für die für $\Re z \geqq \frac{1}{2}$ die Relationen (7, 2) gelten und für die überdies

$$\frac{\lg|\Phi(r)|}{r} \to 0 \tag{7, 3}$$

mit $r \uparrow \infty$ gilt.[30]

Beweis: Gibt es eine Funktion $\Phi(z) \not\equiv 0$, die für $\Re(z) \geqq \frac{1}{2}$ regulär ist und (7, 2) befriedigt, so setze man $\Phi\left(\frac{1}{z}\right) = f(z)$; dann ist $f(z)$ im Kreise E: $|z-1| \leqq 1$ bis auf $z=0$ regulär, $\not\equiv 0$ und befriedigt die Relationen

$$|f(z)| \leqq C m_n |z|^n, \quad |z-1| < 1,\ n=0, 1, 2, \ldots,$$

---

[30] Der auf die Bedingung (7, 3) bezügliche Teil der Behauptung ist neu, ebenso wie der daraus weiter unten hergeleitete Zusatz zum Satz V. Der Hilfssatz 3 bleibt natürlich richtig, wenn $\frac{1}{2}$ durch eine beliebige positive Zahl ersetzt wird. Offenbar bleibt eine Abänderung von endlich vielen m_n auf die Konvergenz von (7, 1) ohne Einfluss.

sodass nach dem Satz I das Integral (2, 3), d. h. (7, 1) konvergiert. Ist umgekehrt (7, 1), d. h. (2, 3) konvergent, so gibt es nach dem Satz I eine für $|z-1| \leqq 1$ bis auf $z=0$ reguläre und nicht verschwindende Funktion $f(z)$, die die Relationen (2, 1) in E befriedigt, und für die darüber hinaus

$$\lg|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta-1|=1} \lg|f(\zeta)| \frac{\zeta+z-2}{\zeta-z} |d\zeta| \tag{7, 4}$$

gilt. Setzt man $f\left(\frac{1}{z}\right) = \Phi(z)$, so ist $\Phi(z)$ für $\Re z \geqq \frac{1}{2}$ regulär, $\neq 0$ und genügt offenbar den Bedingungen (7, 2). Ferner folgt aus (7, 4)

$$\lg|f(1+z)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} \lg|f(1+\zeta)| \Re\frac{\zeta+z}{\zeta-z} |d\zeta|;$$

da dies aber eine Darstellung des im Einheitskreise regulären Potentials $\lg|f(1+z)|$ durch das Poissonsche Integral ist, folgt aus dem Hilfssatz 2 für $|z| \uparrow 1$

$$(1-|z|) \lg|f(1+z)| \to 0,$$

oder für reelle gegen 0 abnehmende $r = 1+z$, d. h. für $z = r-1$ mit $r \downarrow 0$

$$r \lg|f(r)| \to 0,$$

daher $r \lg\left|\Phi\left(\frac{1}{r}\right)\right| \to 0$ für $r \downarrow 0$ oder, wenn r durch $\frac{1}{r}$ ersetzt wird, (7, 3), w. z. b. w.

8. **Satz IV.** *Damit es im Intervall $0 \leqq x < \infty$ eine stetige und beliebig oft differenzierbare, nicht identisch verschwindende Funktion $f(x)$ gibt, mit*

$$f^{(\nu)}(0) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8, 1}$$

$$|f^{(\nu)}(x)| \leqq m_\nu, \quad m_\nu > 0, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots, 0 \leqq x < \infty, \tag{8, 2}$$

ist notwendig und hinreichend, dass, $T(r) = \operatorname{Sup}\limits_{\nu \geqq 1} \frac{r^\nu}{m_\nu}$ gesetzt,

$$\int_1^\infty \lg T(r) \frac{dr}{r^2} \tag{8, 3}$$

konvergiert.

Da, wie im § 1 bewiesen wurde, die Bedingung der Konvergenz von (8, 3) mit der Bedingung der Konvergenz von

$$\int_1^\infty \lg \sum_{n=1}^\infty \frac{r^{2n}}{m_n^2} \frac{dr}{r^2}$$

äquivalent ist, ist Satz IV mit dem Hauptsatz von CARLEMAN *für ein unendliches Intervall äquivalent.*

Aus unserem Beweis wird sich zugleich der folgende für unseren Beweis des Satzes V wesentliche Zusatz ergeben:

Zusatz zum Satz IV. *Wenn* (8, 3) *konvergiert, gibt es eine für* $0 \leqq x < \infty$ *stetige und beliebig oft differenzierbare Funktion, die* (8, 1) *und* (8, 2) *befriedigt und überdies in keinem Intervall* $0 \leqq x \leqq a$ *für* $a > 0$ *durchweg verschwindet.*

Beweis: Es sei zunächst das Integral (8, 3) divergent. Gäbe es dann eine für $0 \leqq x < \infty$ stetige und beliebig oft differenzierbare Funktion $f(x)$, für die (8, 1) und (8, 2), (8, 2) sogar nur von einem $\nu = \nu_0$ an, gelten, so bilde man das Integral

$$\Phi(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\, dx, \tag{8, 4}$$

das eine wegen $f(x) = o(x)$ für $\Re z > 0$, daher auch für $\Re z \geqq \frac{1}{2}$ reguläre Funktion darstellt. Durch wiederholte partielle Integration folgt aus (8, 4) wegen (8, 1)

$$\Phi(z) = \frac{1}{z^n} \cdot \int_0^\infty e^{-zx} f^{(n)}(x)\, dx,$$

und daher, wegen (8, 2), für $\Re z \geqq \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} |\Phi(z)| \leqq \frac{m_n}{2|z|^n} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\, dx = \frac{m_n}{|z|^n}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Dann aber folgt aus der Divergenz von (8, 3), dass nach dem Hilfssatz 3 $\frac{1}{2}\Phi(z) \equiv 0$ sein muss. Da nun aus (8, 4) bekanntlich[31]

[31] Es ist dies eine der sogenannten Mellinschen Umkehrformeln.

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} e^{xz}\,\Phi(z)\,dz$$

folgt, muss dann auch $f(x)=0$ sein, womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

9. Es möge nun (8, 3) konvergieren. Dann gibt es nach dem Hilfssatz 3 eine für $\Re z \geqq \frac{1}{2}$ reguläre und nicht verschwindende Funktion $\Phi(z)$, für die

$$|\Phi(z)| \leqq \frac{m_n}{|z|^n}, \qquad n=0,1,2,\ldots, \quad \Re z \geqq \frac{1}{2}, \tag{9, 1}$$

$$\frac{\lg|\Phi(r)|}{r} \to 0, \qquad r\to\infty \tag{9, 2}$$

gilt. Man bilde nun das Integral

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} e^{x\left(z-\frac{1}{2}\right)}\frac{\Phi(z)}{z^2}\,dz. \tag{9, 3}$$

Sowohl (9, 3) als auch die rechten Seiten der daraus durch wiederholte Differenziation hervorgehenden Formeln:

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} e^{x\left(z-\frac{1}{2}\right)}\left(z-\frac{1}{2}\right)^n\frac{\Phi(z)}{z^2}\,dz, \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{9, 4}$$

konvergieren wegen (9, 1) gleichmässig in $-\infty<x<\infty$, sodass $f^{(n)}(x)$ für $-\infty<x<\infty$ stetig ist. Aus (9, 1) folgt nun, da auf der Integrationsstrecke $\left|\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z}\right|<1$ ist,

$$|f^{(n)}(x)| \leqq \frac{m_n}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\frac{1}{4}+t^2}=m_n,$$

d. h. (8, 2). Ferner gilt für $x<0$, $a>\frac{1}{2}$ nach dem Cauchyschen Satz

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{x\left(z-\frac{1}{2}\right)}\frac{\Phi(z)}{z^2}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} e^{x\left(z-\frac{1}{2}\right)}\frac{\Phi(z)}{z^2}\,dz.$$

Daraus folgt für $a\to\infty$ $f(x)=0$ $(x<0)$, daher auch $f^{(n)}(x)=0$ $(x<0)$, und wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}(x)$ für $x=0$ folgt $f^{(n)}(0)=0$ $(n=0,1,\ldots)$, d. h. (8, 1). Um aber zu beweisen, dass $f(x)$ nicht identisch verschwindet, beweisen wir zugleich allgemeiner, dass für $f(z)$ der Zusatz zum Satz IV gilt, d. h. dass $f(x)$ im Intervall $0\leqq x\leqq a$, $a>0$ nicht durchweg verschwinden kann. In der Tat folgt aus (9, 3) umgekehrt für $\Re z>\frac{1}{2}$ [32]

$$\frac{\Phi(z)}{z^2} = \int\limits_0^\infty e^{-\left(z-\frac{1}{2}\right)x} f(x)\,dx,$$

wo das Integral rechts absolut konvergiert, und aus dem Verschwinden von $f(x)$ im Intervall $0\leqq x\leqq a$, $a>0$ würde folgen

$$\frac{\Phi(z)}{z^2} = \int\limits_a^\infty e^{-\left(z-\frac{1}{2}\right)x} f(x)\,dx. \tag{9, 5}$$

Dann gilt aber, wie wir zeigen wollen, für $r\uparrow\infty$

$$e^{ar}\int\limits_a^\infty e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)x} f(x)\,dx\to 0. \tag{9, 6}$$

Denn es gilt für ein beliebiges $\varepsilon>0$ und $r>\frac{3}{2}$:

$$\left|e^{ar}\int\limits_a^\infty e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)x} f(x)\,dx\right| \leqq e^{ar}\left|\int\limits_a^{a+\varepsilon} e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)x} f(x)\,dx\right| + \left|e^{ar}\int\limits_{a+\varepsilon}^\infty e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)x} f(x)\,dx\right| \leqq$$

$$\leqq e^{ar-\left(r-\frac{1}{2}\right)a}\int\limits_a^{a+\varepsilon} |f(x)|\,dx + e^{ar}\,e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\int\limits_{a+\varepsilon}^\infty e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)\left(x-a-\frac{\varepsilon}{2}\right)} |f(x)|\,dx \leqq$$

---

[32] Nach der zweiten der sogenannten Mellinschen Umkehrformeln.

$$\leqq e^{\frac{a}{2}} \int\limits_a^{a+\varepsilon} |f(x)|\, dx + e^{\frac{a}{2}+\frac{\varepsilon}{4}} e^{-\frac{r\varepsilon}{2}} \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty} e^{-\left(x-a-\frac{\varepsilon}{2}\right)} |f(x)|\, dx =$$

$$= c_1 \int\limits_a^{a+\varepsilon} |f(x)|\, dx + c_2 e^{-r\frac{\varepsilon}{2}},$$

so dass für $r \uparrow \infty$

$$\overline{\lim} \left| e^{ar} \int\limits_a^{\infty} e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)x} f(x)\, dx \right| \leqq c_1 \int\limits_a^{a+\varepsilon} |f(x)|\, dx,$$

und daher, wegen der Willkür von ε,

$$\lim e^{ar} \int\limits_a^{\infty} e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)x} f(x)\, dx = 0$$

ist, wie behauptet.

Daher folgt nach (9, 5) und (9, 6) für $r \uparrow \infty$

$$e^{ar} \frac{\Phi(r)}{r^2} \to 0, \quad ar + \lg |\Phi(r)| - 2 \lg r \to -\infty,$$

$$\overline{\lim} \frac{\lg |\Phi(r)|}{r} \leqq -a < 0,$$

entgegen (9, 2).

Damit ist der Satz IV nebst dem Zusatz vollständig bewiesen.

10. Aus dem Satz IV nebst dem Zusatz folgt nun leicht der folgende Hauptsatz von CARLEMAN:

Satz V. *Damit es eine im Intervall* $0 \leqq x \leqq a$, $a > 0$ *stetige und beliebig oft differenzierbare nicht identisch verschwindende Funktion* $f(x)$ *gibt mit*

(10, 1) $$f^{(\nu)}(0) = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots,$$

(10, 2) $$|f^{(\nu)}(x)| \leqq m_\nu, \qquad m_\nu > 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots,$$

ist notwendig und hinreichend, dass, $T(r) = \operatorname*{Sup}_{\nu \geqq 1} \frac{r^\nu}{m_\nu}$ *gesetzt,*

$$\int_1^\infty \lg T(r) \frac{dr}{r^2} \tag{10, 3}$$

konvergiert.

Dass es unter der Voraussetzung der Konvergenz des Integrals (10, 3) eine Funktion $f(x)$ mit obigen Eigenschaften gibt, ist bereits im *Zusatz zum Satz IV* enthalten. Um aber aus der Existenz einer solchen Funktion $f(x)$ auf die Konvergenz von (10, 3) zu schliessen, führen wir vermöge der Transformation $x = \frac{at}{1+t}$, die das Intervall $\langle 0, a)$ in das Intervall $\langle 0, \infty)$ transformiert, die Funktion $f(x)$ in $f\left(\frac{at}{1+t}\right) = \varphi(t)$ über. Von der Funktion $\varphi\left(\frac{t}{4a+4}\right)$ werden wir beweisen, dass sie in $\langle 0, \infty)$ den Bedingungen (8, 1), (8, 2) des Satzes IV genügt, woraus nach Satz IV die Konvergenz von (10, 3) folgt.

Wir haben nur die Gültigkeit von (8, 2) für $\nu > 0$ nachzuweisen. Ist M_ν das Maximum von $|f^{(\nu)}(x)|$ in $\langle 0, a)$, so folgt allgemein aus der Maclaurinschen Entwicklung von $f^{(\nu)}(x)$ mit dem Integralrestglied für $n > \nu$:

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{1}{(n-\nu-1)!} \int_0^x (x-s)^{n-\nu-1} f^{(n)}(s)\, ds,$$

$$|f^{(\nu)}(x_0)| \leqq \frac{M_n x_0^{n-\nu}}{(n-\nu)!}. \tag{10, 4}$$

Man erhält nun die n^{te} Ableitung von $f\left(\frac{at}{1+t}\right)$ an einer Stelle $t = t_0$, indem man in die formale Entwicklung von f an der Stelle $x_0 = a\frac{t_0}{1+t_0}$:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x-x_0)^\nu \tag{10, 5}$$

für $x - x_0$ die Entwicklung von $x - x_0$ nach Potenzen von $t - t_0$ einsetzt, das Resultat nach Potenzen von $t - t_0$ umrechnet und dann den Koeffizienten von $(t-t_0)^n$ mit $n!$ multipliziert. Dabei kommen nur die ersten $n+1$ Glieder von (10, 5) in Betracht. Das Aggregat dieser Glieder hat aber nach (10, 4) die Majorante

$$(10, 6) \qquad M_n\left(\sum_{\nu=0}^{n}\frac{x_0^{n-\nu}(x-x_0)^\nu}{(n-\nu)!\,\nu!}\right)=\frac{M_n x^n}{n!}.$$

Die Majorante der Entwicklung von $\frac{t}{1+t}$ nach Potenzen von $t-t_0$ ist aber wegen

$$\left(\frac{t}{1+t}\right)^{(\nu)}=\left(1-\frac{1}{1+t}\right)^{(\nu)}=(-1)^{\nu-1}\frac{\nu!}{(1+t)^{\nu+1}}$$

gleich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\frac{\nu!}{(1+t_0)^{\nu+1}}(t-t_0)^\nu \ll \frac{1}{1-(t-t_0)}.$$

Setzen wir nun diese Majorante von $\frac{at}{1+t}$ in (10, 6) ein, so ergibt sich

$$\frac{a^n M_n}{n!}(1-(t-t_0))^{-n}=\frac{a^n M_n}{n!}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu-1}{\nu}(t-t_0)^\nu$$

und damit für $\varphi^{(n)}(t_0)$ die Abschätzung

$$|\varphi^{(n)}(t_0)|\leqq M_n\binom{2n-1}{n}a^n < M_n 2^{2n}a^n < m_n(4a+4)^n.$$

Daher folgt für $\psi(t)=\varphi\left(\frac{t}{4a+4}\right)$

$$|\psi^{(n)}(t)|\leqq m_n(4a+4)^n\frac{1}{(4a+4)^n}=m_n,$$

w. z. b. w.

Es sei noch hervorgehoben, dass die Bedingung der Konvergenz von (10, 3) derart ist, dass wenn sie für eine m_ν-Folge erfüllt ist, dies auch für alle Folgen $k^\nu m_\nu$ für jedes $k>0$ der Fall ist.

§ 3. Wimansche und Fabersche Minoranten.

11. Es sei $y(x)$ eine im Intervall $\langle x_1, x_2\rangle$ *monoton* wachsende Funktion von x mit $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$. $y(x)$ kann aber sowohl Konstanzintervalle als auch Unstetigkeitspunkte haben. Wir bezeichnen eine im Intervalle $\langle y_1, y_2\rangle$ definierte Funktion $x(y)$ als eine *Umkehrfunktion* von $y(x)$, wenn die Relationen bestehen

(11, 1) $$y(x(\eta)+0) \geqq \eta \geqq y(x(\eta)-0), \qquad y_1 < \eta < y_2,$$

(11, 2) $$x(y_1+0) \geqq x(y_1) = x_1, \; x(y_2-0) \leqq x(y_2) = x_2.$$ [33]

Hilfssatz 4. *Es sei* $f(y)$ *eine im Intervall* $\langle y_1, y_2 \rangle$ *stetige Funktion von* y, *ferner sei* $y(x)$ *eine im Intervall* $\langle x_1, x_2 \rangle$ *monotone Funktion von* x *mit* $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. *Wir behaupten dann, dass sich das Integral* $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(y(x))\,dx$ *als das Stieltjessche Integral* $\int\limits_{\eta=y_1}^{\eta=y_2} f(\eta)\,dx(\eta)$ *schreiben lässt, wo* $x(\eta)$ *eine beliebige Umkehrung von* $y(x)$ *ist:*

(11, 3) $$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(y(x))\,dx = \int\limits_{\eta=y_1}^{\eta=y_2} f(\eta)\,dx(\eta).$$ [34]

Beweis. Da $x(y)$ monoton wächst[35], ist das Stieltjessche Integral auf der rechten Seite von (11, 3) definiert. Für ein ganzes $n > 1$ zerlege man das Intervall $\langle y_1, y_2 \rangle$ in n äquidistante Intervalle mit den Endpunkten $\eta_0 = y_1 < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_n = y_2$. Dann folgt, $x(\eta_\nu) = \xi_\nu$ gesetzt,

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(y(x))\,dx - \int\limits_{\eta=y_1}^{\eta=y_2} f(\eta)\,dx(\eta) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\int\limits_{\xi_{\nu-1}}^{\xi_\nu} f(y(x))\,dx - \int\limits_{\eta_{\nu-1}}^{\eta_\nu} f(\eta)\,dx(\eta) \right).$$

Hier kann man sich rechts auf die ν beschränken, für die $\xi_{\nu-1} < \xi_\nu$ ist, da sonst aus $\xi_{\nu-1} = x(\eta_{\nu-1}) = x(\eta_\nu) = \xi_\nu$ folgt, dass beide Glieder der entsprechenden Klammer verschwinden. Nun folgt aber für die übrigen Differenzen

[33] Auf den so eingeführten Begriff gehe ich ausführlich im § 10 ein.

[34] Das Integral $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(y(x))\,dx$ lässt sich auch als ein Riemannsches Integral auffassen, indessen kommen wir hier mit dem Lebesgueschen Integral aus.

[35] Denn wäre für $y_1 < \eta_1 < \eta_2 < y_2$ $x(\eta_1) > x(\eta_2)$, so wäre auch für ein $\varepsilon > 0$ $x(\eta_1) - \varepsilon > x(\eta_2) + \varepsilon$ und daher, wegen (11, 1) und der Monotonie von $y(x)$,

$$\eta_1 \geqq y(x(\eta_1)-0) \geqq y(x(\eta_1)-\varepsilon) \geqq y(x(\eta_2)+\varepsilon) \geqq y(x(\eta_2)+0) \geqq \eta_2,$$

entgegen der Annahme. Und für y_1, y_2 folgt dann die Monotonie aus (11, 2).

$$\int\limits_{\xi_{\nu-1}}^{\xi_\nu} f(y(x))\,dx - \int\limits_{\eta_{\nu-1}}^{\eta_\nu} f(\eta)\,dx(\eta)$$

die Abschätzung

$$\int\limits_{\xi_{\nu-1}}^{\xi_\nu} f(y(x))\,dx - \int\limits_{\eta_{\nu-1}}^{\eta_\nu} f(\eta)\,dx(\eta) = (\xi_\nu - \xi_{\nu-1})\,(\underset{y(\xi_{\nu-1}+0)\leqq y\leqq y(\xi_\nu-0)}{\mathfrak{M} f(y)} - \underset{\eta_{\nu-1}\leqq y\leqq \eta_\nu}{\mathfrak{M} f(y)}),$$

wo $\underset{a\leqq y\leqq b}{\mathfrak{M} f(y)}$ einen Mittelwert zwischen den von $f(y)$ in diesem Intervall angenommenen Werten bedeutet. Aus $\xi_\nu = x(\eta_\nu)$, $\xi_{\nu-1} = x(\eta_{\nu-1})$ und (11, 1), (11, 2) folgt aber

$$\eta_\nu \geqq y(x(\eta_\nu)-0) = y(\xi_\nu - 0) \geqq y(\xi_{\nu-1}+0) = y(x(\eta_{\nu-1})+0) \geqq \eta_{\nu-1},$$

so dass die in der obigen Klammer stehende Differenz der Mittelwerte nicht grösser ist als die Schwankung von $f(y)$ im Intervall $\langle \eta_{\nu-1}, \eta_\nu\rangle$. Wählt man n so gross, dass die Schwankungen von $f(y)$ in allen Intervallen von der Länge $\frac{y_2-y_1}{n}$ kleiner werden als ein $\varepsilon > 0$, so folgt für die Differenz der beiden Seiten von (11, 3):

$$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} f(y(x))\,dx - \int\limits_{\eta=y_1}^{\eta=y_2} f(\eta)\,dx(\eta) \right| \leqq \varepsilon(x_2 - x_1),$$

woraus wegen der Willkür von ε (11, 3) folgt, w. z. b. w.

12. Es sei $m(\lambda)$ eine für $\lambda \geqq 0$ definierte (auch des Wertes $+\infty$ fähige) positive Funktion von λ mit $\operatorname*{Inf}_{\lambda\geqq 0} m(\lambda) = d > 0$ und $\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \lg m(\lambda) = \infty$. Wir setzen dann für $r > 0$ $T_m(r) = \operatorname*{Sup}_{\lambda\geqq 0} \frac{r^\lambda}{m(\lambda)}$. Beachtet man, dass wegen $\frac{\lg m(\lambda)}{\lambda} \to \infty$ mit $\lambda \uparrow \infty$ $\frac{r^\lambda}{m(\lambda)}$ für feste r und $\lambda \uparrow \infty$ gegen 0 konvergiert, so folgt, dass $T_m(r)$ für jedes $r > 0$ eine *endliche* Funktion von r ist. Da $\frac{r^\lambda}{m(\lambda)}$ mit wachsendem r monoton wächst, muss $T_m(r)$ gleichfalls eine *monoton wachsende* Funktion von r sein. Endlich ergibt sich leicht, dass $T_m(r)$ stetig ist. Denn wählt man für ein $r \geqq 0$

$\lambda_0 > 1$ so gross, dass $\frac{(r+1)^\lambda}{m(\lambda)} \leqq \frac{T\left(\frac{r}{2}\right)}{2}$ ist für $\lambda \geqq \lambda_0$, so folgt, dass für $r > 0$, $r+1 > r_1 = r + \varepsilon > r$ $T(r_1) = \operatorname*{Sup}_{0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0} \frac{r_1^\lambda}{m(\lambda)} \leqq \left(\frac{r+\varepsilon}{r}\right)^{\lambda_0} \operatorname*{Sup}_{0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0} \frac{r^\lambda}{m(\lambda)} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right)^{\lambda_0} T(r)$ ist, sodass $T(r_1) - T(r) \to 0$ mit $r_1 \downarrow r$. Ebenso folgt, dass für $r_1 = r - \varepsilon$, $r > 2\varepsilon > 0$

$$T(r_1) = T(r-\varepsilon) = \operatorname*{Sup}_{0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0} \frac{(r-\varepsilon)^\lambda}{m(\lambda)} \geqq \left(\frac{r-\varepsilon}{r}\right)^{\lambda_0} \operatorname*{Sup}_{0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0} \frac{r^\lambda}{m(\lambda)} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^{\lambda_0} T(r)$$

ist, so dass $T(r_1) - T(r) \to 0$ auch mit $r_1 \uparrow r$ gilt. Für $r = 0$ aber definieren wir $T(0) = \lim_{r \downarrow 0} T(r)$, so dass $T(r)$ auch für $r = 0$ stetig ist.

Zu unserem $m(\lambda)$ lassen sich andere ähnliche Funktionen definieren, denen dasselbe $T(r)$ entspricht. Wir behaupten nun, dass *es unter diesen Funktionen eine »kleinste» gibt.* Sie wird im Folgenden als die *Wimansche Minorante* von $m(\lambda)$ bezeichnet werden. Um unsere Behauptung zu beweisen, geben wir zugleich ein Verfahren zur Bildung der Wimanschen Minorante $\overline{m}(\lambda)$ von $m(\lambda)$ an: Man konstruiere zunächst die Punktmenge $\mathfrak{M}$ $(y = \lg m(\lambda),\ x = \lambda)$, und es sei $\mathfrak{M}^*$ die Punktmenge, die entsteht, wenn zu jedem Punkt $(\lg m(\lambda), \lambda)$ von $\mathfrak{M}$ der von ihm senkrecht nach oben gehende Halbstrahl $(y \geqq \lg m(\lambda),\ x = \lambda)$ hinzugenommen wird. $\overline{\mathfrak{M}}^*$ sei endlich die konvexe Hülle von $\mathfrak{M}^*$. Für jedes $\lambda \geqq 0$ setzen wir $\lg \overline{m}(\lambda)$ gleich der Ordinate des Randpunktes von $\overline{\mathfrak{M}}^*$ mit der Abszisse λ, und für alle $\lambda \geqq 0$, denen keine Randpunkte von $\overline{\mathfrak{M}}^*$ entsprechen, setzen wir $m(\lambda)$ gleich ∞. Aus der Konstruktion folgt, dass $\lg \overline{m}(\lambda)$ eine konvexe Funktion von λ ist, und zwar die grösste konvexe Funktion mit $\overline{m}(\lambda) \leqq m(\lambda)$.

Will man nun $\lg T_m(r)$, d. h. die obere Grenze von $\lambda \lg r - \lg m(\lambda)$ bestimmen, so lege man durch den Nullpunkt die Gerade $y = x \lg r$. Dann ist $\lg T_m(r)$ die obere Grenze der Differenzen zwischen den Ordinaten verschiedener Punkte dieser Geraden und den entsprechenden Ordinaten des Randes der Menge $\mathfrak{M}^*$. Verschiebt man daher die Gerade nach unten um $\lg T_m(\lambda)$, so wird sie zur Stützgeraden der Menge $\overline{\mathfrak{M}}^*$. Legt man also die Stützgerade zur Menge $\overline{\mathfrak{M}}^*$ mit dem Richtungstangens $\lg r$, so ist $\lg T_m(r)$ sofort auf der y-Achse abzulesen. Daher hängt $T_m(r)$ nur von der Menge $\overline{\mathfrak{M}}^*$ ab und bestimmt sie eindeutig, woraus wegen $\overline{m}(\lambda) \leqq m(\lambda)$ folgt, dass $\overline{m}(\lambda)$ in der Tat das kleinste $m(\lambda)$ mit demselben $T_m(r)$, d. h. die Wimansche Minorante von $m(\lambda)$ ist. Endlich folgt aus der Konstruktion, dass wenn $m(0) \leqq \lim_{\lambda \to 0} m(\lambda)$ ist, $\overline{m}(0) = m(0)$ sein muss. Unser Konstruktionsverfahren ist offenbar eine Verallgemeinerung der bekannten Hadamardschen Konstruktion in der Theorie der ganzen Funktionen[36] und ist mit dieser identisch, wenn $m(\lambda)$ für alle nicht ganzzahligen λ gleich ∞ ist.

13. *Es sei nun die obige Funktion $m(\lambda)$ ihre eigene Wimansche Minorante (es sei also $\lg m(\lambda)$ konvex) und für $\lambda = 0$ sowie für wenigstens ein $\lambda > 0$ endlich.* Dann besitzt $m(\lambda)$ ein Endlichkeitsintervall $0 \leqq \lambda < \lambda'$, zu dem eventuell auch λ' gehört, derart, dass ausserhalb dieses Intervalls, falls $\lambda' < \infty$ ist, $m(\lambda) = \infty$ ist. Aus der Konvexität und Beschränktheit von $\lg m(\lambda)$ folgt nach JENSEN, dass $m(\lambda)$ im Innern des Endlichkeitsintervalls stetig ist.[37] Ferner existiert bekanntlich[37] die Derivierte von $\lg m(\lambda)$ von rechts: $D^+ \lg m(\lambda) = M(\lambda)$ für alle λ, wächst monoton und ist insbesondere innerhalb des Endlichkeitsintervalles von $m(\lambda)$ endlich. Dabei ist für $\lambda \geqq \lambda'$ $M(\lambda)$ gleich $+\infty$ zu setzen. Dann gilt $M(\lambda + 0) = M(\lambda)$.[38] Endlich folgt für $\lambda' \geqq \lambda > \lambda_1 \geqq 0$

$$\lg m(\lambda) - \lg m(\lambda_1) = \lg \frac{m(\lambda)}{m(\lambda_1)} = \int_{\lambda_1}^{\lambda} M(\lambda)\, d\lambda. \tag{13, 1}$$

[39]

Aus $\frac{1}{\lambda} \lg m(\lambda) \to \infty$ folgt, dass $M(\lambda) \uparrow \infty$ ist. Es sei nun für jedes $r \geqq 0$ $\lambda(r)$ das kleinste λ, für das $M(\lambda) \geqq \lg r$ ist. Dass es für jedes r ein solches *kleinstes* λ gibt, folgt aus $M(\lambda + 0) = M(\lambda)$. $\lambda(r)$ ist nach Definition der Nr. 11 eine *Umkehrung* der Funktion $e^{M(\lambda)}$ von λ. Ist λ' — der rechte Endpunkt des Endlichkeitsintervalls von $m(\lambda)$ — endlich, so ist $\lambda(r) = \lambda'$ für alle $r > e^{M(\lambda' - 0)}$. Aus der Definition von $\lambda(r)$ folgt

$$M(\lambda(r)) \geqq \lg r, \quad M(\lambda(r) - 0) \leqq \lg r. \tag{13, 2}$$

Wir fragen nun, wann $T_m(r) = \operatorname{Max} \frac{r^\lambda}{m(\lambda)}$ ist, d. h. ob und für welche λ

---

[36] Vgl. z. B. VALIRONS oben zitiertes Buch, pp. 28 ff. Für Dirichletsche Reihen vgl. SUGIMURA, Math. Z., Bd. 29 (1928), p. 274 ff.

[37] Vgl. die klassische Abhandlung von J. L. W. V. JENSEN, Acta Math., Bd. 30 (1905), pp. 175 ff.

[38] Nach einem bekannten Satz von DINI (vgl. DE LA VALLÉE-POUSSIN, Cours d'Analyse infinitésimale, 3. éd., 1. vol., pp. 98—99; CARATHÉODORY, Reelle Funktionen, p. 534), ist der Wert von $\frac{m(\lambda+\varepsilon) - m(\lambda)}{\varepsilon}$ für $\varepsilon > 0$ gleich einem Mittelwert der Ableitung von rechts, $M(\lambda)$; wegen der Monotonie von $M(\lambda)$ folgt hieraus weiter $M(\lambda) = M(\lambda + 0)$.

[39] Es folgt dies z. B. nach einem Satz von LEBESGUE (vgl. DE LA VALLÉE-POUSSIN, l. c. p. 272) aus der Beschränktheit von $M(\lambda)$.

$T_m(r) = \frac{r^\lambda}{m(\lambda)}$ ist? Um ein solches λ zu bestimmen, suche man die Zeichenwechsel der rechten Derivierten von $\lg \frac{r^\lambda}{m(\lambda)}$, d. h. die Zeichenwechsel von $\lg r - M(\lambda)$.[40] Das kleinste λ, für das diese Differenz nicht positiv ist, ist aber für $r \geqq 0$ offenbar $\lambda(r)$. Daher wird wegen der Monotonie von $M(\lambda)$ der »Maximalwert» $T_m(r)$ von $\frac{r^\lambda}{m(\lambda)}$ für $\lambda = \lambda(r)$ bzw. für $\lambda = \lambda' - 0$ erreicht, und es gilt

$$T_m(r) = \frac{r^{\lambda(r)}}{m(\lambda(r))}, \tag{13, 3}$$

was auch für $r \leqq e^{M(0)}$, $\lambda(r) = 0$, $T_m(r) = \frac{1}{m(0)}$ ein richtiges Resultat liefert. Insbesondere folgt $T(0) = \lim_{r \downarrow 0} T(r) = \frac{1}{m(0)}$ und für $r > e^{M(\lambda'-0)}$ $T_m(r) = \frac{r^{\lambda'}}{m(\lambda'-0)}$.

Aus dieser Überlegung folgt aber noch mehr. $\lambda(r)$ ist eine monoton wachsende Funktion von r, braucht aber nicht stetig zu sein. Es sei nun für ein $r > 0$ $\lambda(r-0) < \lambda(r+0)$. Ein solcher Sprung entspricht einem Konstanzintervall von $M(\lambda) = \lg r$, und dann ist offenbar $\lambda(r) = \lambda(r-0)$. Da dann für alle λ zwischen $\lambda(r-0)$ und $\lambda(r+0)$ die rechte Ableitung von $\lg \frac{r^\lambda}{m(\lambda)}$ verschwindet, ist $\frac{r^\lambda}{m(\lambda)}$ für *alle* diese λ konstant und gleich $T_m(r)$. Auf jeden Fall entspricht also *jedem* $\lambda < \lambda'$ ein $r = e^{M(\lambda)}$, so dass $\operatorname{Max}_\lambda \frac{r^\lambda}{m(\lambda)}$ gerade für jenes λ erreicht wird. Es ist dies eine für das folgende besonders wichtige Eigenschaft von Wimanschen Minoranten, die in der Formel $e^{\lambda M(\lambda)} = m(\lambda) T(e^{M(\lambda)})$ ihren Ausdruck findet.

Aus (13, 1) und (13, 3) folgt, da $m(0) \neq \infty$ ist,

$$\lg T_m(r) = \lambda(r) \lg r - \int_0^{\lambda(r)} M(\lambda)\, d\lambda - \lg m(0). \tag{13, 4}$$

---

[40] Aus dem Beweis des Rolleschen Satzes folgt, dass wenn eine Funktion $f(x)$ in einem Punkt x_0 ein relatives Extremum sowie rechte und linke Ableitungen hat, die Werte dieser Ableitungen die Null zwischen sich einschliessen. Da für die konvexe Funktion $\mu(\lambda) = (\lg r)\lambda - \lg m(\lambda)$ für $\lambda_1 > \lambda_0$

$$\mu'_-(\lambda_0) \leqq \mu'_+(\lambda_0) \leqq \mu'_-(\lambda_1) \leqq \mu'_+(\lambda_1)$$

ist, folgt, dass bereits $\mu'_+(\lambda) = \lg r - M(\lambda)$ für den Maximalwert einen Zeichenwechsel aufweist.

Nach dem Hilfssatz 4 ist aber das Integral $\int\limits_0^{\lambda(r)} M(\lambda)\,d\lambda$ als das Stieltjessche Integral $\int\limits_0^r \lg\varrho\, d\lambda(\varrho)$ zu schreiben, da $\lambda = \lambda(\varrho)$ eine Umkehrung der Funktion $\varrho = e^{M(\lambda)}$ ist. Durch partielle Integration folgt hieraus, da $m(0) \neq \infty$ ist,

$$\lg(m(0)\,T(r)) = \int\limits_0^r \frac{\lambda(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho. \tag{13, 5}$$

— Ist aber $m(0) = \infty$, so ist für ein geeignetes $c > 0$ in (13, 4) und (13, 5) die untere Grenze der Integrale durch c und $m(0)$ durch $m(c)$ zu ersetzen.

Aus (13, 5) folgt für $\alpha > 0,\ \gamma > 0$ durch partielle Integration wie in Nr. 4 unter Benutzung des Hilfssatzes 4

$$\int\limits_\gamma^\infty \frac{\lg T(r)}{r^{1+1/\alpha}}\,dr = \alpha \int\limits_\gamma^\infty \frac{\lambda(r)}{r^{1+1/\alpha}}\,dr + \alpha\,\frac{\lg T(\gamma)}{\gamma^{1/\alpha}}, \tag{13, 6}$$

$$\int\limits_\gamma^\infty \frac{\lg T(r)}{r^{1+1/\alpha}}\,dr = \alpha^2 \int\limits_{\lambda(\gamma)}^\infty e^{-\frac{1}{\alpha}M(\lambda)}\,d\lambda + \alpha\,\frac{\lg T(\gamma)}{\gamma^{1/\alpha}} + \alpha^2\,\frac{\lambda(\gamma)}{\gamma^{1/\alpha}}, \tag{13, 7}$$

wo die drei vorkommenden Integrale alle zugleich konvergieren und divergieren. Dabei muss für $m(0) = \infty$ in (13, 6) und (13, 7) als untere Grenze der Integrale irgend eine Zahl $\gamma > 0$ mit $m(\gamma) < \infty$ benutzt werden. In jedem Falle ergibt sich, dass die drei Integrale $\int^\infty \frac{\lg T(r)}{r^{1+1/\alpha}}\,dr$, $\int^\infty \frac{\lambda(r)\,dr}{r^{1+1/\alpha}}$, $\int^\infty e^{-\frac{1}{\alpha}M(\lambda)}\,d\lambda$ gleichzeitig konvergieren und divergieren. Genau ebenso ergibt sich, dass für ein $k > 0$ die drei Integrale $\int^\infty \lg T(r)\, e^{-\frac{2\pi}{k}r}\,dr$, $\int^\infty \frac{\lambda(r)}{r}\, e^{-\frac{2\pi}{k}r}\,dr$, $\int^\infty e^{-\frac{2\pi}{k}e^{M(\lambda)} - M(\lambda)}\,d\lambda$ gleichzeitig konvergieren und divergieren. — Man kann daher für jede Funktion $m(\lambda)$ mit den in Nr. 12 angegebenen Eigenschaften notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Integrale $\int^\infty \frac{\lg T(r)}{r^{1+1/\alpha}}\,dr$ bzw. $\int^\infty \lg T(r)\, e^{-\frac{2\pi}{k}r}\,dr$

aufstellen, indem man die Wimansche Minorante von $m(\lambda)$ bildet und die zugehörigen Integrale

$$\int^{\infty} \frac{\lambda(r)}{r^{1+1/\alpha}} dr, \quad \int^{\infty} e^{-\frac{1}{\alpha} M(\lambda)} d\lambda, \quad \int^{\infty} \frac{\lambda(r)}{r} e^{-\frac{2\pi}{k} r} dr, \quad \int^{\infty} e^{-\frac{2\pi}{k} e^{M(\lambda)} - M(\lambda)} d\lambda$$

betrachtet. — Im Folgenden (§ 6, Nr. 26) werden wir uns mit der Frage nach der Konvergenz des Integrals

$$\int_0^{2\pi} \lg T_m(k(\theta))\, d\theta \tag{13, 8}$$

beschäftigen, wo $k(\theta)$ eine nicht negative für fast alle θ in $\langle 0, 2\pi \rangle$ definierte Funktion mit integrablem $\lg k(\theta)$ ist. Wir wollen nun zeigen, dass die Abänderung der Funktion $m(\lambda)$ auf einem endlichen Intervall $\langle 0, \lambda_0 \rangle$ ohne Einfluss auf die Konvergenz von (13, 8) bleibt, sofern die untere Grenze d_1 der abgeänderten Funktion $m_1(\lambda)$ positiv bleibt. Zunächst sei bemerkt, dass durch eine solche Abänderung von $m(\lambda)$ auch $\overline{m}(\lambda)$ nur in einem endlichen Intervall beeinflusst wird. Denn betrachtet man einen Punkt $(\lambda^*, m(\lambda^*))$, in dem eine Stützgerade an $\mathfrak{M}^*$ unterhalb des Punktes $(\lambda_0^*, \lg d_1)$ verläuft, so fällt $\overline{m}(\lambda)$ von λ^* an mit $\overline{m}_1(\lambda)$ zusammen. —

Wir brauchen nur den Fall zu betrachten, in dem die Endlichkeitsintervalle $\langle \lambda'', \lambda' \rangle$, $\langle \lambda_1'', \lambda_1' \rangle$ von $\overline{m}(\lambda)$ bezw. $\overline{m}_1(\lambda)$ unendlich sind, d. h. $\lambda' = \lambda_1' = \infty$ gilt. Denn sonst ist ja

$$T_m(r) \leqq \frac{r^{\lambda'}}{d} \quad \text{und} \quad T_{m_1}(r) \leqq \frac{r^{\lambda_1'}}{d_1},$$

so dass (13, 8) in beiden Fällen konvergiert. Wenn aber $\lambda' = \lambda_1' = \infty$ ist, gilt für $r \to \infty$

$$\frac{\lg T_m(r)}{\lg r} \to \infty,$$

da für jedes $k > 0$ $T_m(r) \geqq \frac{r^k}{m(k)}$, d. h. $\underline{\lim} \frac{\lg T_m(r)}{\lg r} \geqq k$ ist. Daher gibt es positive λ^* und $r_0(\lambda^*)$, so dass für $\lambda \geqq \lambda^*$ $\overline{m}(\lambda) = \overline{m}_1(\lambda)$ und für $r > r_0(\lambda^*)$

$$T_m(r) = \operatorname*{Sup}_{\lambda \geqq \lambda^*} \frac{r^\lambda}{m(\lambda)}, \quad T_{m_1}(r) = \operatorname*{Sup}_{\lambda \geqq \lambda^*} \frac{r^\lambda}{m_1(\lambda)},$$

d. h. $T_m(r) = T_{m_1}(r)$ für $r > r_0$ ist. Für $r \leqq r_0$ gibt es eine gemeinsame Schranke von $|T_m(r)|$ und $|T_{m_1}(r)|$. Dann sei M_1 die Teilmenge des Intervalles $\langle 0, 2\pi \rangle$, auf der $k(\theta) \leqq r_0$ ist, M_2 die dazu in Bezug auf $\langle 0, 2\pi \rangle$ komplementäre Menge. Dann unterscheiden sich die Integranden von

$$(13, 9) \qquad \int_0^{2\pi} \lg T_m(k(\theta))\, d\theta \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \lg T_{m_1}(k(\theta))\, d\theta$$

nur auf der Menge M_1 voneinander, und auf dieser Menge sind beide beschränkt. Daher müssen beide Integrale gleichzeitig konvergieren und divergieren.

14. Man erhält Konvergenzbedingungen für $\int^{\infty} \frac{\lg T(r)}{r^{1+1/\alpha}} dr$ auch mit Hilfe einer etwas einfacher zu bildenden Minorante, die wir als die *Fabersche Minorante* von $m(\lambda)$ bezeichnen wollen. Man erhält die Fabersche Minorante von $m(\lambda)$, wenn man die grösste Funktion $m^*(\lambda)$ bildet, für die für alle $\lambda \geqq 0$ $m(\lambda) \geqq m^*(\lambda)$ ist, und für die $\frac{\lg m^*(\lambda)}{\lambda}$ für $\lambda \geqq 0$ monoton wächst. Offenbar gilt für $m^*(\lambda)$ die Bildungsvorschrift: $m^*(0) = m(0)$ und für $\lambda > 0$ $\frac{1}{\lambda} \lg m^*(\lambda) = \operatorname*{Inf}_{\mu \geqq \lambda} \frac{1}{\mu} \lg m(\mu)$. Daher gilt $\frac{\lg m^*(\lambda)}{\lambda} \to \infty$ für $\lambda \to \infty$.

Man lege nun vom Ursprung aus einen von der positiven y-Achse verschiedenen Stützstrahl an $\overline{\mathfrak{M}}^*$ (er kann auch mit der negativen y-Achse zusammenfallen). Ist sein Richtungstangens $\lg r_0$ und die kleinste Abszisse eines »Berührungspunktes» λ_0, so ist klar, dass für $\lambda \geqq \lambda_0$ die Fabersche Minorante $\overline{m}^*(\lambda)$ von $\overline{m}(\lambda)$ mit $\overline{m}(\lambda)$ übereinstimmt. Und da aus $m(\lambda) \geqq \overline{m}(\lambda)$ auch $m^*(\lambda) \geqq \overline{m}^*(\lambda)$ folgt, ergibt sich für $\lambda \geqq \lambda_0$: $m(\lambda) \geqq m^*(\lambda) \geqq \overline{m}(\lambda)$. Andererseits gilt aber für $r \geqq r_0$ nach der Vorschrift der Nr. 12 offenbar:

$$T_m(r) = T_{\overline{m}}(r) = \operatorname*{Sup}_{\lambda \geqq \lambda_0} \frac{r^\lambda}{\overline{m}(\lambda)} = \operatorname*{Sup}_{\lambda \geqq \lambda_0} \frac{r^\lambda}{m(\lambda)},$$

so dass sich schliesslich $T_m(r) = \operatorname*{Sup}_{\lambda \geqq \lambda_0} \frac{r^\lambda}{m^*(\lambda)}$, $r \geqq r_0$, ergibt. Für r_0 folgt aber aus der Vorschrift der Nr. 12: Da die Stützgrade zu $\overline{\mathfrak{M}}^*$ mit dem Richtungstangens $\lg r_0$ durch den Ursprung hindurchgeht, ist der auf der x-Achse abzulesende Wert von $\lg T_m(r)$ gleich o, für kleinere r aber <0, sodass r_0 das kleinste r mit $T(r) \geqq 1$ ist. — Wir bemerken endlich, dass, $m(0) < \infty$ vorausgesetzt, $\frac{1}{r} \lg \frac{\overline{m}(\lambda)}{\overline{m}(0)}$ von o an monoton wächst, so dass $\frac{\overline{m}(\lambda)}{\overline{m}(0)}$ ihre eigene Fabersche Minorante von o an ist. Hierin kommt zum Ausdruck, dass die Beziehung zwischen $m(\lambda)$ und $m^*(\lambda)$ nicht invariant gegenüber der Multiplikation von $m(\lambda)$ mit einer Konstanten ist, während die Beziehung zwischen $m(\lambda)$ und $\overline{m}(\lambda)$ in der Tat in diesem Sinne invariant ist. —

Wir setzen nun allgemein für $\lambda > 0$ $\sqrt[\lambda]{m^*(\lambda)} = \beta(\lambda)$, so dass $\beta(\lambda) \uparrow \infty$ mit $\lambda \uparrow \infty$ gilt. Es sei $\varrho(r) = \varrho_m(r)$ die untere Grenze der λ, für die $\beta(\lambda) \geqq r$ ist. Dann ist offenbar $\varrho(r)$ *eine Umkehrung* von $\beta(\varrho)$.

Da für $r \geqq r_0$ $T_m(r) = \operatorname*{Sup}_{\lambda \geqq \lambda_0} \left(\frac{r}{\beta(\lambda)}\right)^{\lambda}$ ist, gilt für $\varepsilon > 0$

$$T_m(r) \geqq \left(\frac{r}{\beta\left(\varrho\left(\frac{r}{e}\right) - \varepsilon\right)}\right)^{\varrho\left(\frac{r}{e}\right) - \varepsilon} \geqq e^{\varrho\left(\frac{r}{e}\right) - \varepsilon},$$

daher für $\varepsilon \to 0$

$$\lg T_m(r) \geqq \varrho\left(\frac{r}{e}\right), \quad \text{sobald } \lg T_m(r) \geqq 0 \text{ ist.} \tag{14, 1}$$

Aus der Konvergenz des Integrals

$$\int^{\infty} \frac{\lg T_m(r)}{r^{1+1/\alpha}}\, dr \tag{14, 2}$$

folgt daher sofort nach (14, 1) und dem Hilfssatz 4 die Konvergenz der Integrale

$$\int^{\infty} \frac{\varrho(r)}{r^{1+1/\alpha}}\, dr \quad \text{und} \quad \int^{\infty} \frac{d\varrho}{\beta(\varrho)^{1/\alpha}}. \tag{14, 3}$$

Umgekehrt folgt aus der Konvergenz der Integrale (14, 3) nach den Überlegungen in Nr. 4 die Konvergenz von $\int^{\infty} \frac{V(r)}{r^{1+1/\alpha}}\, dr$, wo für ein $c > 0$

$$V(r)=\int_c^r\frac{\varrho(r)}{r}dr+\varrho(c)\lg c=\varrho(r)\lg r-\int_c^r\lg r\,d\varrho(r)=\varrho(r)\lg r-\int_{\varrho(c)}^{\varrho(r)}\lg\beta(\varrho)\,d\varrho$$

oder,

$$\lg\gamma(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\int_{\varrho(c)}^{\lambda}\lg\beta(\lambda)\,d\lambda \tag{14, 4}$$

gesetzt,

$$V(r)=\varrho(r)\left(\lg r-\lg\gamma(\varrho(r))\right)=\lg\left(\frac{r}{\gamma(\varrho(r))}\right)^{\varrho(r)}$$

ist. — Aus (14, 4) folgt, dass $\lg\gamma(\lambda)^\lambda$ konvex in λ ist. Da ferner $\gamma(\lambda)^\lambda= e^{\int_{\varrho(c)}^{\lambda}\lg\beta(\lambda)\,d\lambda}$ eine positive untere Grenze besitzt, und $\lg\gamma(\lambda)\to\infty$ mit $\lambda\to\infty$ ist, folgt, dass $\gamma(\lambda)^\lambda$ ihre eigene Wimansche Minorante ist. Ferner ist $M(\lambda)= D^+\lg\gamma(\lambda)^\lambda=\lg\beta(\lambda+0)$. Die in Nr. 13 betrachtete Umkehrung $\lambda(r)$ von $e^{M(\lambda)}$ ist hier offenbar $\varrho(r)$, so dass nach (13, 3) $\lg T_{\gamma(\lambda)^\lambda}(r)=V(r)$ ist. Nun folgt für $\lambda\geqq c$ aus (14, 4) $\lg\gamma(\lambda)\leqq\lg\beta(\lambda)$, $\lg\gamma(\lambda)^\lambda\leqq\lg m(\lambda)$, sodass $\lg T_{\gamma(\lambda)^\lambda}(r)\geqq \lg T_m(r)$ ist und aus der Konvergenz von (14, 3) auch die von (14, 2) folgt.

Für die Konvergenz von $\int^\infty\frac{\lg T(r)}{r^{1+1/\alpha}}dr$ *ist daher die Konvergenz von* (14, 3) *notwendig und hinreichend.*

§ 4. Der Hauptsatz über μ-Funktionen.

15. Es sei nun G ein schlichtes Gebiet, dessen Rand den Nullpunkt enthält. $f(z)$ sei in G regulär, $\neq 0$ und beschränkt. Für jedes $\lambda\geqq 0$ setze man

$$\mu(\lambda)=\mu_f(\lambda)=\operatorname*{Sup}_{z\text{ in }G}\frac{|f(z)|}{|z|^\lambda}. \tag{15, 1}$$

$\mu(\lambda)$ kann auch den Wert ∞ annehmen. Wir wollen indessen voraussetzen, dass $\mu(\lambda)<\infty$ für wenigstens ein $\lambda>0$ ist. Ist $\lambda=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$, $\lambda_1\geqq 0$, $\lambda_2\geqq 0$, so folgt

$$\mu^2(\lambda)=\operatorname*{Sup}_{z\text{ in }G}\frac{|f(z)|^2}{|z|^{\lambda_1+\lambda_2}}\leqq\operatorname{Sup}\frac{|f(z)|}{|z|^{\lambda_1}}\cdot\operatorname{Sup}\frac{|f(z)|}{|z|^{\lambda_2}}=\mu(\lambda_1)\,\mu(\lambda_2).$$

Daher ist $\lg \mu(\lambda)$ eine konvexe Funktion von λ, auf die also die in § 3 Nr. 13 angeführten Sätze von JENSEN und Folgerungen aus ihnen anwendbar sind. Wir führen noch an, dass aus den Jensenschen Sätzen die Existenz von $\lg \mu(\lambda \pm 0)$ für $0 < \lambda < \infty$ und von $\lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \lg \mu(\lambda)$ folgt. Natürlich sind dabei als Grenzwerte $+\infty$ und $-\infty$ zugelassen.

Für unser $\lg \mu(\lambda)$ ist das Endlichkeitsintervall von $\lambda = 0$ und $\lambda = \lambda'$ begrenzt, wo λ' also die grösste Zahl ist, für die $\mu(\lambda)$ für $0 \leqq \lambda < \lambda'$ endlich ist. Wir behaupten nun, dass

$$(15, 2) \qquad \mu(0) \geqq \lim_{\lambda \downarrow 0} \mu(\lambda) \quad \text{und für} \quad \lambda' < \infty \quad \mu(\lambda') \geqq \mu(\lambda' - 0)$$

ist. In der Tat folgt aus der Konvexität von $\lg \mu(\lambda)$ für $0 < \lambda < \lambda'$ und ganze positive n

$$\mu\left(\frac{\lambda}{n}\right) \leqq \mu(0)^{1-\frac{1}{n}} \mu(\lambda)^{\frac{1}{n}},$$

$$\mu\left(\lambda' - \frac{\lambda}{n}\right) \leqq \mu(\lambda')^{1-\frac{1}{n}} \mu(\lambda' - \lambda)^{\frac{1}{n}},$$

und hieraus ergibt sich für $n \to \infty$

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \mu(\lambda) \leqq \mu(0), \quad \mu(\lambda' - 0) \leqq \mu(\lambda').$$

Andererseits folgt aber aus (15, 1) für ein beliebiges z in G

$$|f(z)| \leqq \mu(\lambda) |z|^{\lambda}$$

und hieraus für $\lambda \downarrow 0$ bzw. $\lambda \uparrow \lambda'$ (wenn $\lambda' < \infty$ ist)

$$|f(z)| \leqq \lim_{\lambda \downarrow 0} \mu(\lambda), \quad |f(z)| \leqq \lim_{\lambda \uparrow \lambda'} \mu(\lambda) \; |z|^{\lambda'},$$

d. h.

$$|f(z)| \leqq \lim_{\lambda \downarrow 0} \mu(\lambda), \quad \frac{|f(z)|}{|z|^{\lambda'}} \leqq \lim_{\lambda \uparrow \lambda'} \mu(\lambda),$$

$$\mu(0) = \operatorname{Sup} |f(z)| \leqq \lim_{\lambda \downarrow 0} \mu(\lambda),$$

$$\mu(\lambda') = \operatorname{Sup} \frac{|f(z)|}{|z|^{\lambda'}} \leqq \lim_{\lambda \uparrow \lambda'} \mu(\lambda)$$

und daher nach (15, 2) für $\lambda \downarrow 0$ bzw. $\lambda \uparrow \lambda'$

$$(15, 3) \qquad \mu(\lambda) \to \mu(0) \text{ und für } \lambda' < \infty \ \mu(\lambda) \to \mu(\lambda').$$

Endlich muss offenbar $\frac{\lg \mu(\lambda)}{\lambda} \to \infty$ mit $\lambda \uparrow \infty$ gelten. Denn wäre für $\lambda_\nu \uparrow \infty$ $\frac{\lg \mu(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu} \leqq C < \infty$, so würde daraus folgen

$$|f(z)| \leqq |z|^{\lambda_\nu} e^{\lambda_\nu C} = (|z| e^C)^{\lambda_\nu}$$

und für $|z| < e^{-C}$ würde hieraus für $\nu \to \infty$ $|f(z)| \leqq 0$, $f(z) \equiv 0$ folgen. — Bezeichnen wir nun die obere Grenze von $|z|$ auf dem Rande von G mit $R = R_G$, so gilt offenbar für jedes $\lambda \geqq 0$

$$\mu(0) = \operatorname{Sup} |f(z)| = \lim_{\nu \to \infty} |f(z_\nu)|,$$

wo z_ν eine Folge von inneren Punkten von G ist, die gegen einen Randpunkt p von G konvergiert. Daraus ergibt sich weiter für jedes $\lambda > 0$

$$\mu(0) \leqq \lim_{\nu \to \infty} \mu(\lambda) |z_\nu|^\lambda = \mu(\lambda) |p|^\lambda \leqq \mu(\lambda) R^\lambda,$$

woraus $\lg \mu(0) \leqq \lg \mu(\lambda) + \lambda \lg R$ folgt und ferner

$$\frac{\lg \mu(\lambda) - \lg \mu(0)}{\lambda} \geqq \lg \frac{1}{R},$$

$$(15, 4) \qquad \frac{d \lg \mu(0)}{d\lambda} \geqq \lg \frac{1}{R}, \quad \frac{d \lg \mu(\lambda)}{d\lambda} \geqq \frac{d \lg \mu(0)}{d\lambda} \geqq \lg \frac{1}{R},$$

wo es sich natürlich für $\lambda = 0$ um die rechtseitige Ableitung handelt. (Es sei daran erinnert, dass R auch $+\infty$ sein kann.)

16. Das Gebiet G soll nunmehr als einfach zusammenhängend vorausgesetzt werden. Der Nullpunkt sei ein Randpunkt von höchstens abzählbarer Mehrfachheit.[41] Ist auch der unendlich ferne Punkt ein Randpunkt von G, so soll über ihn dasselbe vorausgesetzt werden.

---

[41] Vgl. für ein einfaches (im Wesentlichen von CARATHÉODORY herrührendes) Beispiel von Randpunkten von überabzählbarer Mehrfachheit z. B. E. STUDY, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände d. Geometrie, 2. Heft, Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche, Leipzig, 1913, pp. 41—42.

Es sei nun $f(z) \neq 0$ in einem Punkte $z_0 \neq \infty$ von G, und zwar sei $|f(z_0)| \geqq s > 0$. Es sei $z = \omega(u)$ eine Funktion, die $E(|u-1| < 1)$ konform auf das Innere von G abbildet, und zwar so, dass $u = 1$ in z_0 übergeht. Dann geht $f(z)$ in $f(\omega(u)) = g(u)$ über, und es gilt in E $|g(u)| \leqq \mu(\lambda)\,|\omega(u)|^\lambda$, daher auch

$$(16,1) \qquad |g(u)| \leqq \frac{1}{T_\mu\left(\frac{1}{|\omega(u)|}\right)},$$

wo T_μ die nach § 3 Nr. 12 der Funktion $\mu(\lambda)$ zugeordnete T-Funktion ist.

Für $0 < r < 1$ gilt nun nach (1, 1)

$$\lg|g(1)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg|g(1-re^{i\theta})|\,d\theta.$$

Lassen wir hier r gegen 1 gehen, so folgt wegen der Beschränktheit von $|g|$ nach einem bekannten Hilfssatz von Fatou

$$\overline{\lim_{r \uparrow 1}} \int_0^{2\pi} \lg|g(1-re^{i\theta})|\,d\theta \leqq \int_0^{2\pi} \lg|g(1-e^{i\theta})|\,d\theta,$$ [42]

wo unter dem Integralzeichen rechterseits die nach Fatou fast überall existierenden Randwerte von g einzusetzen sind und das Integral als ein Lebesguesches Integral aufzufassen ist. Daher folgt

$$(16,2) \qquad \lg|g(1)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg|g(1-e^{i\theta})|\,d\theta,$$

[42] Dieser Hilfssatz lautet (P. Fatou, Acta Math., Bd. 30 (1906), p. 375): Sind $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ positiv und in $\langle a, b\rangle$ L — integrabel, und sind die Integrale $\int_a^b f_\nu(x)\,dx$ beschränkt, so folgt aus $f_\nu(x) \to f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \underline{\lim}_{\nu \to \infty} \int_a^b f_\nu(x)\,dx;$$

offenbar bleibt der Satz richtig für eine von einem *stetigen* Parameter abhängige Funktionenschar.

In unserm Falle gibt es wegen der Beschränktheit von $|g|$ eine Konstante C, so dass $C - \lg|g(1-re^{i\theta})|$ positiv ist, und das Integral über diese Funktion nach θ ist in r gleichmässig beschränkt, so dass der Fatousche Satz darauf anwendbar ist und das angegebene Ergebnis liefert.

und hieraus wegen (16, 1)

$$(16, 3) \qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|u-1|=1} \lg T_\mu\left(\frac{1}{|\omega(u)|}\right)|du| \leqq \lg\frac{1}{s}.$$

Wir sehen also insbesondere, dass für unsere zu $f(z)$ gehörende μ-Funktion das Integral

$$\int_0^{2\pi} \lg T_\mu\left(\frac{1}{|\omega(1-e^{i\theta})|}\right) d\theta$$

beschränkt ist.

17. Wir behaupten nun:

Satz VI. *(Hauptsatz.) Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Rand den Nullpunkt enthält, und zwar als einen Randpunkt von höchstens abzählbarer Mehrfachheit. Ist der unendlich ferne Punkt ein Randpunkt von G, so soll auch er als ein Randpunkt von höchstens abzählbarer Mehrfachheit vorausgesetzt werden. Notwendig und hinreichend, damit es zu einer positiven Funktion $\mu(\lambda)$ von λ $(0 \leqq \lambda < \infty)$, die für wenigstens zwei λ-Werte endlich ist, eine in G reguläre und beschränkte Funktion $f(z) \not\equiv 0$ gibt, so dass für jedes $\lambda \geqq 0$*

$$\operatorname*{Sup}_{z \text{ in } G} \frac{|f(z)|}{|z|^\lambda} = \mu(\lambda)$$

gilt, ist, dass

1) *$\lg \mu(\lambda)$ eine konvexe Funktion von λ ist mit dem Endlichkeitsintervall von der Form $0 \leqq \lambda \leqq \lambda'$, wobei für $\lambda' < \infty$ $\mu(\lambda')$ sowohl endlich als auch unendlich sein kann, in beiden Fällen aber $\mu(0) = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \mu(\lambda)$ und $\mu(\lambda') = \mu(\lambda' - 0)$ ist.*

2) *Vermittelt $z = \omega(u)$ die konforme Abbildung von G auf E $(|u-1| < 1)$, so konvergiert das Integral*

$$(17, 1) \qquad \int_0^{2\pi} \lg T_\mu\left(\frac{1}{|\omega(1-e^{i\theta})|}\right) d\theta.$$

3) *Für alle $\lambda \geqq 0$ $\dfrac{d \lg \mu(\lambda)}{d\lambda} \geqq \lg \dfrac{1}{R}$ ist, wenn mit $R = R_G$ das Maximum von $|z|$ auf dem Rande von G bezeichnet wird.*

Die Notwendigkeit dieser Bedingungen haben wir bereits oben unter der Einschränkung bewiesen, dass $f(z)$ im Punkte $z_0 = \omega(1)$ nicht verschwindet. Wir wollen jetzt zunächst beweisen, dass sie hinreichend sind, wobei es genügt, wenn 2) für wenigstens ein $\omega(u)$ erfüllt ist. Bei diesem Beweise werden wir von den folgenden Tatsachen Gebrauch machen, deren Beweise (als Sätze A und B) in §§ 8, 9 nachgetragen werden.

A) *Bei der Abbildung von G auf E bildet sich die Menge aller erreichbaren Randpunkte, die in einer Umgebung eines beliebigen Randpunktes von G liegen, auf eine Menge der Punkte der Kreisperipherie ab, die positives Lebesguesches Mass besitzt.*

B) *Die Funktion* $\lg|\omega(1-e^{i\theta})|$ *ist integrabel und es gilt die Formel*

$$(17,2)\qquad \lg|\omega(u)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg|\omega(1-e^{i\theta})|\,\Re\frac{e^{i\theta}+u-1}{e^{i\theta}-u+1}\,d\theta$$

bzw.

$$(17,2')\qquad \lg|\omega(u)| = \lg\left|\frac{1}{u-u_1}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg|(1-e^{i\theta}-u_1)\omega(1-e^{i\theta})|\,\Re\frac{e^{i\theta}+u-1}{e^{i\theta}-u+1}\,d\theta,$$

je nach dem ob $z=\infty$ *zu G nicht gehört oder ein innerer Punkt von G ist. Im letzteren Falle ist* u_1 *der Punkt von E, der auf* $z=\infty$ *abgebildet wird.*

Man bilde nun die Funktion

$$(17,3)\qquad p(u) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg T_\mu\left(\frac{1}{|\omega(1-e^{i\theta})|}\right)\frac{e^{i\theta}+u-1}{e^{i\theta}-u+1}\,d\theta$$

und daraus $e^{p(u)} = g(u)$, so dass

$$(17,4)\qquad \lg|g(u)| = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg T_\mu\left(\frac{1}{|\omega(1-e^{i\theta})|}\right)\Re\frac{e^{i\theta}+u-1}{e^{i\theta}-u+1}\,d\theta$$

ist. Ziehen wir hiervon die mit λ multiplizierte Gleichung (17, 2) bzw. (17, 2′) ab, so folgt

$$(17,5)\qquad \lg\frac{|g(u)|}{|\omega(u)|^\lambda} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg\left[|\omega(1-e^{i\theta})|^\lambda\, T_\mu\left(\frac{1}{|\omega(1-e^{i\theta})|}\right)\right]\Re\frac{e^{i\theta}+u-1}{e^{i\theta}-u+1}\,d\theta$$

bzw.

$$(17,5') \quad \lg \frac{|g(u)|}{|\omega(u)|^\lambda} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg\left[|\omega(1-e^{i\theta})|^\lambda T_\mu\left(\frac{1}{|\omega(1-e^{i\theta})|}\right)\right] \Re \frac{e^{i\theta}+u-1}{e^{i\theta}-u+1}\,d\theta -$$

$$-\lambda\left(\lg\left|\frac{1}{u-u_1}\right| - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg\left|\frac{1}{1-e^{i\theta}-u_1}\right| \Re\frac{e^{i\theta}+u-1}{e^{i\theta}-u+1}\,d\theta\right).$$

Nun folgt aber aus $r^\lambda T_\mu\left(\frac{1}{r}\right) \geqq r^\lambda \frac{1}{\mu(\lambda) r^\lambda} = \frac{1}{\mu(\lambda)}$ und $(1, 4)$, dass die rechte Seite von $(17, 5)$ stets

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg \mu(\lambda)\, \Re\frac{e^{i\theta}+u-1}{e^{i\theta}-u+1}\,d\theta = \lg\mu(\lambda)$$

ist. — Was aber den Ausdruck

$$(17,6) \qquad \lambda\left(\lg\left|\frac{1}{u-u_1}\right| - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg\frac{1}{|1-e^{i\theta}-u_1|} \Re\frac{e^{i\theta}+u-1}{e^{i\theta}-u+1}\,d\theta\right)$$

in $(17, 5')$ anbetrifft, so stellt er eine in E harmonische Funktion dar, deren Randwerte auf der Peripherie von E verschwinden, und die in u_1 wegen $\lambda > 0$ gleich $+\infty$ ist. Daher ist dieser Ausdruck in E durchweg positiv. Daraus folgt, dass sowohl im Falle von $(17, 5)$ als auch im Falle von $(17, 5')$ $\operatorname{Sup} \frac{|g(u)|}{|\omega(u)|^\lambda} \leqq \mu(\lambda)$ ist. Damit ergibt sich für die Funktion $f(z)$, die aus $g(u)$ vermöge der konformen Abbildung von E auf G mit $z = \omega(u)$ hervorgeht:

$$(17,7) \qquad \mu^*(\lambda) = \operatorname*{Sup}_{z \text{ in } G} \frac{|f(z)|}{|z|^\lambda} \leqq \mu(\lambda),$$

wo $\mu^*(\lambda)$ die nach Nr. 15 der Funktion $f(z)$ zugeordnete μ-Funktion ist. Um aber zu beweisen, dass hier das *Gleichheitszeichen gilt*, gehen wir so vor: es sei zunächst $0 < \lambda < \lambda'$. Wir setzen dann $r_1 = e^{-M(\lambda)}$, wo $M(\lambda)$ die im § 3 Nr. 13 definierte, hier für $\mu(\lambda)$ zu bildende Funktion $D^+ \lg \mu(\lambda)$ bezeichnet, so dass $r_1^\lambda T_\mu\left(\frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{\mu(\lambda)}$ ist. Aus der Stetigkeit von T folgt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass, solange $r_1 - \delta \leqq r \leqq r_1 + \delta$ und $0 < r < R$ ist, $\frac{1}{\mu(\lambda) - \varepsilon} \geqq r^\lambda T_\mu\left(\frac{1}{r}\right)$

gilt. Nun folgt aus der Bedingung 3), dass $M(\lambda) \geqq \lg \frac{1}{R}$ ist. Daher ergibt sich, dass $0 < r_1 \leqq R$ ist, so dass es einen Randpunkt P von G gibt, dessen Distanz vom Nullpunkt gleich r_1 ist. Die Menge der in der δ-Umgebung von P liegenden erreichbaren Randpunkte von G sei mit M_1 bezeichnet, die Menge der ihnen entsprechenden Punkte der Kreisperipherie in der u-Ebene mit M_2. Das Mass von M_2 ist nach dem Satze A) > 0. In jedem Punkt von M_2 existiert der radiale Randwert von $|g(u)|$ und liegt zwischen $r_1 - \delta$ und $r_1 + \delta$. Folglich gilt in jedem Punkte $(1 - e^{i\theta_0})$ von M_2

$$|\omega(1-e^{i\theta_0})|^{\lambda}\, T_\mu\left(\frac{1}{|\omega(1-e^{i\theta_0})|}\right) \leqq \frac{1}{\mu(\lambda)-\varepsilon},$$

$$\lg\left[|\omega(1-e^{i\theta_0})|^{\lambda}\, T_\mu\left(\frac{1}{|\omega(1-e^{i\theta_0})|}\right)\right] \leqq -\lg(\mu(\lambda)-\varepsilon),$$

und daher ist nach dem Fatouschen Satz über die Randwerte des Poissonschen Integrals auf einem massgleichen Kern M_3 von M_2

$$\lim_{u\to 1-e^{i\theta_0}} -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg\left[|\omega(1-e^{i\theta})|^{\lambda}\, T_\mu\left(\frac{1}{|\omega(1-e^{i\theta})|}\right)\right] \Re\, \frac{e^{i\theta}+u-1}{e^{i\theta}-u+1}\, d\theta \geqq \lg(\mu(\lambda)-\varepsilon),$$

wenn u aus dem Innern von E radial gegen einen Punkt $1 - e^{i\theta_0}$ von M_3 konvergiert. Da andererseits (17, 6) bei radialer Annäherung gegen einen Punkt der Peripherie von E gegen 0 konvergiert, folgt nach (17, 5) und (17, 5'): $\operatorname{Sup}_{u \text{ in } E} \frac{|g(u)|}{|\omega(u)|^{\lambda}} \geqq \mu(\lambda) - \varepsilon$, woraus sich wegen der Willkür von ε die Behauptung ergibt, und der Fall $0 < \lambda < \lambda'$ ist damit erledigt.

Aus der obigen Betrachtung ergibt sich noch eine Folgerung, die wir in einem späteren Paragraphen brauchen werden und daher bereits hier ausführlich formulieren wollen:

Es sei $1 - e^{i\theta_0}$ ein Punkt von M_3, P der entsprechende erreichbare Randpunkt von G, B der einfache Kurvenbogen, auf den sich der in $1 - e^{i\theta_0}$ mündende Radius abbildet, und der bis auf seinen Endpunkt P ganz in G verläuft. Konvergiert dann z längs B gegen P, so existiert der Grenzwert $\lim \frac{f(z)}{|z|^{\lambda}}$ und ist $\geqq \mu(\lambda) - \varepsilon$.

Wir erhalten die folgende Eigenschaft der von uns konstruierten Funktion $f(z)$:

I° *Zu jedem* λ *mit* $0<\lambda<\lambda'$ *und jedem* $\varepsilon>0$ *mit* $\varepsilon<\mu(\lambda)$ *gehört ein erreichbarer Randpunkt* $P(\lambda, \varepsilon)$ *von* G *und ein in* P *mündender, sonst ganz in* G *verlaufender einfacher Bogen* B, *so dass, wenn* z *längs* B *gegen* P *konvergiert, der Grenzwert von* $\frac{|f(z)|}{|z|^\lambda}$ *existiert und* $\geqq \mu(\lambda)-\varepsilon$ *ist.*

18. Für $\lambda=0$ bzw. $\lambda=\lambda'$ (für $\lambda'<\infty$) folgt offenbar die Behauptung sofort nach dem eben Bewiesenen aus der Stetigkeit von $\mu(\lambda)$ und $\mu^*(\lambda)$ in $\lambda=0$ (von rechts) und $\lambda=\lambda'$ (von links). Für $\mu(\lambda)$ ist ja die Stetigkeit in 0 und λ' vorausgesetzt, für $\mu^*(\lambda)$ in Nr. 15 bewiesen worden.

Es sei jetzt $\lambda'<\infty$ und $\lambda>\lambda'$. Ist $\mu(\lambda')=\infty$, so folgt aus $\mu(\lambda')=\mu^*(\lambda')=\infty$, da die Endlichkeitsintervalle von $\mu(\lambda)$ und $\mu^*(\lambda)$ zusammenhängend sind, dass auch für $\lambda>\lambda'$ $\mu(\lambda)=\mu^*(\lambda)=\infty$ ist.

Es sei jetzt $\lambda'<\infty$ und $\mu(\lambda')=\mu^*(\lambda')<\infty$, und es sei $|\omega|<1$. Es gilt $T\left(\frac{1}{|\omega|}\right)=\frac{|\omega|^{-\lambda_1}}{\mu(\lambda_1)}$, wo λ_1 dem Intervall $\langle 0, \lambda'\rangle$ angehört. Daraus folgt für ein beliebiges $\lambda>\lambda'$

$$|\omega|^\lambda \cdot T\left(\frac{1}{|\omega|}\right)=\frac{|\omega|^{\lambda-\lambda_1}}{\mu(\lambda_1)}\leqq\frac{|\omega|^{\lambda-\lambda'}}{\mu(\lambda_0)},$$

wo $\mu(\lambda_0)=\operatorname{Min}\mu(\lambda)$ ist. Daher gilt

$$-\lg\left(|\omega|^\lambda T\left(\frac{1}{|\omega|}\right)\right)\geqq(\lambda-\lambda')\lg\frac{1}{|\omega|}+\lg\mu(\lambda_0). \tag{18, 1}$$

Die erreichbaren Punkte der ε-Umgebung von $z=0$ bilden sich auf eine Menge positiven Masses der Peripheriepunkte von E ab, so dass auf dieser Menge bei radialer Annäherung $\lim\frac{1}{|\omega|}\geqq\lg\frac{1}{\varepsilon}$ ist. Und da (17, 6) dabei gegen 0 konvergiert, hat $\lg\left|\frac{g}{\omega(u)^\lambda}\right|$, wiederum nach dem Fatouschen Satz über das Poissonsche Integral, wegen (17, 5) bzw. (17, 5′) auf einer Menge positiven Masses Randwerte $\geqq(\lambda-\lambda')\lg\frac{1}{\varepsilon}+\lg\mu(\lambda_0)$. Daher kann $\frac{g(u)}{|\omega(u)|^\lambda}$ wegen der Willkür von ε in E nicht beschränkt sein, sodass $\operatorname{Sup}\frac{|g|}{|\omega(u)|^\lambda}=\infty$ und $\mu^*(\lambda)=\infty$ für $\lambda>\lambda'$ ist, woraus wieder $\mu(\lambda)=\mu^*(\lambda)$ folgt, und unsere Behauptung bewiesen ist.

Wir bemerken endlich, dass im Falle eines endlichen Endlichkeitsintervalles, d. h. für $\lambda' < \infty$, die obige Bedingung 2) für $\mu(\lambda)$ von selbst erfüllt ist, sobald $\mu(\lambda)$ der Bedingung 1) genügt. Denn dann gilt $T_\mu\left(\frac{1}{|\omega|}\right) = \frac{1}{|\omega|^\lambda \mu(\lambda)}$ für ein $\lambda \leqq \lambda'$. Daher folgt $\lg T_\mu\left(\frac{1}{|\omega|}\right) \leqq \lambda \lg \frac{1}{|\omega|} + \lg \frac{1}{\mu(\lambda_0)}$, wo $\mu(\lambda_0) = \operatorname{Min}_\lambda \mu(\lambda)$ ist. Wegen der Konvergenz von $\int\limits_0^{2\pi} \lg|\omega(1-e^{i\theta})|\,d\theta$ [nach B)] konvergiert daher auch $\int\limits_0^{2\pi} \lg T_\mu\left(\frac{1}{|\omega(1-e^{i\theta})|}\right) d\theta$, wie behauptet.

Es sei noch folgendes bemerkt, um die Bedeutung der Bedingung 3) des Hauptsatzes: $\frac{d \lg \mu(0)}{d\lambda} \geqq \lg \frac{1}{R_G}$ zu beleuchten. Ist $\frac{d \lg \mu(0)}{d\lambda} < \lg \frac{1}{R_G}$ und sind die übrigen Bedingungen des Hauptsatzes erfüllt, so kann man die obige Konstruktion der Funktion $f(z)$ durchführen und gelangt auf demselben Wege zur Ungleichung (17, 6). Das Gleichheitszeichen in dieser Ungleichung braucht aber dann nicht mehr zu gelten, und aus unseren weiteren Betrachtungen folgt nur, dass $\operatorname{Sup} \frac{|f(z)|}{|z|^\lambda} = \mu(\lambda)$ wird, *sobald* $\frac{d \lg \mu(\lambda)}{d\lambda} \geqq \lg \frac{1}{R}$ *wird.* Und dass dies für kleinere λ sicherlich nicht mehr gilt, folgt eben aus der Tatsache der Notwendigkeit unserer Bedingungen. Wegen $M(\lambda) \uparrow \infty$ ist aber offenbar auch eine solche Funktion $\mu(\lambda)$ *von einem* λ *an* eine μ-Funktion.

Aus der Betrachtung dieser Nummer folgt analog wie am Schlusse von Nr. 17 für unsere Funktion $f(z)$:

II°. *Zu jedem* $\lambda > \lambda'$ *und jedem* $M > 0$ *gehört ein Randpunkt* P *von* G *und ein in* G *mündender, sonst ganz in* G *verlaufender einfacher Kurvenbogen* B, *so dass, wenn* z *gegen* P *längs* B *geht,*

$$\lim \frac{|f(z)|}{|z|^\lambda} \geqq M$$

ist.

Endlich heben wir noch die folgende Eigenschaft der von uns konstruierten Funktion $f(z)$ hervor:

III°. $f(z)$ *hat in* G *keine Nullstellen.* Hieraus folgt aber nun, dass die Bedingung 2) für *alle* $\omega(u)$ notwendig ist. Denn gibt es in G ein $f(z)$, zu dem

$\mu(\lambda)$ als die μ-Funktion gehört, so ist die Bedingung 2) sicher für *ein* $\omega(u)$ erfüllt. Dann gibt es aber eine Funktion $f^*(z)$, die in G nicht verschwindet und $\mu(\lambda)$ zur μ-Funktion hat, so dass nunmehr die Bedingung 2) für alle $\omega(u)$ gilt. Damit ist der Satz VI in allen Stücken bewiesen.

§ 5. Diskussion und Erweiterung der geometrischen Bedingungen des Hauptsatzes.

19. Der geometrische Charakter der Berandung geht in unsere Bedingungen des Hauptsatzes bis auf die Grösse R nur in der Form der Konvergenzbedingung für das Integral (17, 1) ein. In sehr allgemeinen Fällen lässt sich die hier in Frage kommende Charakteristik des Randes durch eine einzige Konstante ausdrücken. — Wir nehmen in den Nrr. 19—21 an, dass der Nullpunkt ein einfacher Randpunkt von G und G einfach zusammenhängend ist.

Es sei der Rand von G in der Nähe des Nullpunktes so beschaffen, dass er dort, wie wir sagen werden, eine *konforme Ecke mit der Winkelöffnung* $\pi\alpha$ $(\alpha > 0)$ bildet. Darunter verstehen wir folgendes: Ist $z = \omega(u)$ eine Funktion, die das Innere von E so auf das Gebiet G konform abbildet, dass $u = 0$ in $z = 0$ übergeht, so bleibt der Quotient $\dfrac{|\omega(u)|}{|u|^\alpha} = \dfrac{1}{h(u)}$ in E in einer Umgebung von $u = 0$ zwischen zwei festen positiven Schranken. Dies ist z. B. immer der Fall, wenn der Rand in der Nähe des Nullpunktes von zwei stückweise stetig gekrümmten Kurvenästen gebildet wird, die im Nullpunkt den Winkel $\pi\alpha$ miteinander bilden, wie aus den Untersuchungen von O. D. Kellog sowie W. F. Osgood und E. H. Taylor[29] hervorgeht.[43] Wir haben also dann für $1 > \delta > 0$ die Konvergenz des Integrals

---

[43] Kellogg charakterisiert das Verhalten eines Kurvenastes $z = z(s)$ in der Umgebung eines Punktes $P(s = s_1)$ vor allem durch die Bedingung $A^{(1)}$: $|z'(s) - z'(s_1)| < N|s - s_1|^\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$, also durch die Lipschitzsche Bedingung von der Ordnung α für die Ableitung von $z(s)$. s bedeutet dabei die Bogenlänge. Bilden nun zwei solche Äste im Punkte P miteinander den Winkel π, so beweist Kellogg, dass, wenn die beiden Äste zur Berandung eines einfach zusammenhängenden Gebietes ergänzt werden, die Normalableitung der Greenschen Funktion in der Umgebung des Punktes P zwischen zwei positiven Schranken liegt. Hieraus folgern Osgood und Taylor, dass die Abbildungsfunktion der obigen Bedingung für die konforme Ecke mit der Öffnung π genügt, allerdings explicite unter der Annahme, dass die beiden Äste analytisch sind, doch gilt ihre Begründung fast ohne jede Änderung auch bereits unter der Kelloggschen Bedingung $A^{(1)}$. Ebenso ist es leicht, mit Hilfe der Transformation $z = z'^\alpha$ zu zeigen, dass die Bedingung $A^{(1)}$ auch dann für die konforme Ecke (mit der Öffnung $\pi\alpha$) ausreicht, wenn die beiden der Bedingung $A^{(1)}$ genügenden Äste den Winkel $\pi\alpha$ miteinander bilden. — Das Resultat von der konformen Ecke gilt

$$(19, 1) \quad \int_{-\delta}^{\delta} \lg T_\mu\left(\frac{h(1-e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^\alpha}\right) d\theta = \int_{-\delta}^{\delta} \lg T_\mu\left(\frac{h_1(\theta)}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^\alpha}\right) d\theta = 2\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \lg T_\mu\left(\frac{h_2(\theta)}{|\sin\theta|^\alpha}\right) d\theta$$

zu untersuchen, wo $0 < c_1 \leqq h_2(\theta) \leqq c_2 < \infty$ für $|\theta| \leqq \frac{\delta}{2} < 1$ ist. Setzen wir hier $\sin\theta = \frac{1}{r}$, so nimmt (19, 1) die Form an:

$$2\int_d^\infty \lg T_\mu(h_3(r) r^\alpha) \frac{dr}{r^2\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}} + 2\int_d^\infty \lg T_\mu(h_4(r) r^\alpha) \frac{dr}{r^2\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}}, \quad d > 1,$$

wo h_3, h_4 zwischen zwei positiven Konstanten c_3, c_4, $c_3 < c_4$ enthalten sind. Unsere Integrale konvergieren zugleich mit $\int_1^\infty \lg T_\mu(c_4 r^\alpha)\frac{dr}{r^2}$ und divergieren zugleich mit $\int_1^\infty \lg T_\mu(c_3 r^\alpha)\frac{dr}{r^2}$. Daher folgt als notwendig und hinreichend für die Konvergenz von (17, 1) die Konvergenz von $\int_1^\infty \lg T_\mu(r)\frac{dr}{r^{1+\frac{1}{\alpha}}}$, wofür wir in § 3, Nrr. 13, 14 weitere Formen der notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt haben.

20. Es habe zweitens der Rand von G im Nullpunkt eine Spitze, die von zwei sich im Nullpunkt berührenden Kreisbögen mit den Krümmungen $\varkappa_1, \varkappa_2$, $\varkappa_1 > \varkappa_2$, $\varkappa_1 - \varkappa_2 = \varkappa$ gebildet ist. Dabei sollen die Krümmungen $\varkappa_1, \varkappa_2$ mit verschiedenen oder gleichen Vorzeichen genommen werden, je nachdem, ob die

---

allerdings, wie in einer demnächst erscheinenden Basler Dissertation von Hrn. S. WARSCHAWSKI unter Anderem bewiesen wird, unter viel allgemeineren Bedingungen. Es genügt, wenn $z'(s)$ längs jedes der beiden Kurvenäste existiert und der Bedingung genügt, dass $\int_0^\varepsilon \frac{|z'(s)-z'(s_1)|}{|s|} ds$ konvergiert, so dass $z'(s)$ insbesondere nur im Punkte P selbst stetig zu sein braucht. (Für die entsprechende Verallgemeinerung des Kelloggschen Satzes über die Normalableitung der Greenschen Funktion — wenn die beiden Äste in P den Winkel π miteinander bilden, — muss das Erfülltsein der obigen Bedingung gleichmässig in allen Punkten der beiden Äste verlangt werden.)

betreffenden Kurvenbögen auf gleicher Seite oder auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Tangente liegen.

Dann hat $z=\omega(u)$ die Gestalt $\dfrac{\frac{2\pi}{\varkappa}\alpha}{\lg\frac{1}{u}+\varphi(u)}$, wo $|\alpha|=1$ und $|\varphi(u)|\leqq C$ in E in einer Umgebung von $u=0$ ist. Daher folgt

$$\frac{1}{|\omega(1-e^{i\theta})|}=\frac{\left|-\lg\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|+\psi(\theta)\right|}{\left|\frac{2\pi}{\varkappa}\right|},$$

wo $|\psi(\theta)|\leqq C_1$ ist. Daher gilt in jener Umgebung von $u=0$

$$\left|\frac{1}{|\omega(1-e^{i\theta})|}-\frac{\varkappa}{2\pi}\lg\frac{1}{|\theta|}\right|\leqq C_2.$$

Da $T(r)$ in r monoton wächst, folgt, dass das Integral (17, 1) gleichzeitig mit $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\lg T_\mu\left(\frac{\varkappa}{2\pi}\lg\frac{1}{|\theta|}+C_2\right)d\theta$ konvergiert und gleichzeitig mit

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\lg T_\mu\left(\frac{\varkappa}{2\pi}\lg\frac{1}{|\theta|}-C_2\right)d\theta$$

divergiert. Die Bedingung für die Konvergenz eines Integrals von der Form

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\lg T_\mu\left(\frac{\varkappa}{2\pi}\lg\frac{1}{|\theta|}+c\right)d\theta,\qquad 0<\varepsilon<\frac{1}{2},$$

erhält man aber am einfachsten, wenn man $\frac{\varkappa}{2\pi}\lg\frac{1}{|\theta|}+c=r$ setzt und r als neue Integrationsvariable einführt. Dann folgt

$$\left|\frac{dr}{d\theta}\right|=\frac{\varkappa}{2\pi}\frac{1}{|\theta|},\quad\left|\frac{d\theta}{dr}\right|=\frac{2\pi}{\varkappa}|\theta|=\frac{2\pi}{\varkappa}e^{-\frac{2\pi(r-c)}{\varkappa}}=\frac{2\pi}{\varkappa}e^{\frac{2\pi c}{\varkappa}-\frac{2\pi r}{\varkappa}},$$

so dass das obige Integral bis auf einen von 0 verschiedenen Faktor gleich

$$\int^{\infty} \lg T_\mu(r) e^{-\frac{2\pi r}{\varkappa}} dr \tag{20, 1}$$

wird. Und da das letzte Integral die Konstante c nicht enthält, sehen wir, dass für die Konvergenz von (17, 1) in unserem Falle die von (20, 1) notwendig und hinreichend ist. Die Konvergenz dieses Integrals ist also äquivalent mit der Bedingung 2) für die μ-Funktion im Falle einer von Kreisbögen im Nullpunkt gebildeten Spitze. Für die Bedingung der Konvergenz von (20, 1) haben wir im § 3, Nrr. 13, 14 weitere mit ihr äquivalente Bedingungen aufgestellt.

21. Für die bisher betrachteten Fälle ergibt sich aus den Betrachtungen von § 3 Nr. 13 als äquivalent mit der Bedingung 2) des Hauptsatzes die Bedingung der Konvergenz der Integrale $\int^{\infty} e^{-\frac{1}{\alpha}M(\lambda)} d\lambda$ bzw. $\int^{\infty} e^{-\frac{2\pi}{\varkappa} e^{M(\lambda)} - M(\lambda)} d\lambda$. Da die Integranden beider Integrale für $M(\lambda) > 0$ in $M(\lambda)$ monoton sind, bleiben sie konvergent, bzw. divergent, wenn $M(\lambda)$ in jedem Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $n \ldots n+1$ durch eine Konstante ersetzt wird, die zwischen $M(n)$ und $M(n+1)$ liegt. Man betrachte nun eine neue Funktion $m(\lambda)$, die für ganze λ gleich $\mu(\lambda)$, für alle anderen λ gleich ∞ ist. Wie aus der in § 3, Nrr. 12, 13 angegebenen Hadamardschen Konstruktion hervorgeht, ist das zu $m(\lambda)$ gehörende $M(\lambda)$ gleich einem Mittelwert von $M(\lambda)$ im Intervall $\langle n, n+1 \rangle$, sodass es genügt die Integrale

$$\int^{\infty} \frac{\lg T_m(r)}{r^{1+\frac{1}{\alpha}}} dr \tag{21, 2}$$

bzw.

$$\int^{\infty} e^{-\frac{2\pi}{\varkappa} r} \lg T_m(r) dr \tag{21, 3}$$

zu betrachten. Wir erhalten daher im Falle einer konformen Ecke $\pi\alpha$ aus den Umformungen des § 1 Nr. 13 die mit der Bedingung 2) des Hauptsatzes für eine μ-Funktion äquivalente Bedingung der Konvergenz von

$$\int^{\infty} \lg \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^n}{\mu(n)}\right)^k \frac{dr}{r^{1+\frac{1}{\alpha}}} \tag{21, 4}$$

für irgend ein $k > 0$. Aber auch im Falle der Spitzenbedingung lässt sich die Bedingung 2) analog auf die Konvergenz von

$$(21, 5) \qquad \int^{\infty} e^{-\frac{2\pi}{\varkappa} r} \lg \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^n}{\mu(n)}\right)^k dr$$

zurückführen. Es folgt dies analog wie im § 3 Nr. 3, wenn man die für jede ganze transzendente Funktion $F(z)$ von einem r an geltenden Ungleichungen berücksichtigt:

$$(21, 6) \qquad T(r) \leqq \mathfrak{M}(r) \leqq 3\, T(r) \lg T(2er),$$

wo $T(r)$ den absoluten Betrag des absolut grössten Gliedes der Nullpunktsentwicklung von $F(z)$ für $|z| = r$ und $\mathfrak{M}(r)$ das $\underset{|z|=r}{\mathrm{Max}} |F(z)|$ bedeuten.[44] Man hat dann nur zu beachten, dass aus der Konvergenz von (21, 3), ähnlich wie in Nr. 4, $\lg T_m(r) = o(e^{\frac{2\pi}{\varkappa} r})$, $\lg\lg T_m(r) = O(r)$, $\lg\lg T_m(2er) = O(r)$ und daher die Konvergenz des Integrals

$$\int^{\infty} \lg\lg T_m(2er)\, e^{-\frac{2\pi}{\varkappa} r}\, dr$$

folgt.

22. Vom Gebiet G wurde bis jetzt angenommen, dass es einfach zusammenhängend ist. Es sei nun G ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Rand den Nullpunkt enthält, und es sei die Randkomponente C, die durch den Nullpunkt hindurchgeht, nicht punktförmig. Dasjenige unter den von C allein begrenzten einfach zusammenhängenden Gebieten, das G enthält, sei mit G^* bezeichnet. G^* entsteht also, wenn G über die übrigen Randkomponenten hinweg zu einem einfach zusammenhängenden Gebiete ergänzt wird. Es sei ferner der Nullpunkt ein Randpunkt von G^* von höchstens abzählbarer Mehrfachheit, und ebenso der unendlich ferne Punkt, wenn er auf C liegt. Wir beweisen nun, dass dann *jede μ-Funktion von G^* auch eine solche von G ist.* Denn es sei $\mu(\lambda)$ eine μ-Funktion von G^*, $f(z)$ sei die zu ihr nach dem Verfahren von Nr. 17 konstruierte Funktion, deren μ-Funktion sie ist. Wir behaupten nun, dass die

[44] Diese Relation folgt sofort aus den Relationen (a) und (c) der Fussnote 24 (§ 1, Nr. 3), wenn man r so gross annimmt, dass $N(r) > 1$ wird, also z. B., wegen (b), sobald $\lg T(r) > r$ wird.

μ-Funktion $\mu^*(\lambda)$ von $f(z)$ im Gebiete G mit $\mu(\lambda)$ identisch ist. Dass $\mu^*(\lambda) \leqq \mu(\lambda)$ ist, ist klar. Ist nun $0 < \lambda < \lambda'$ so folgt nach dem am Schlusse von Nr. 17 hervorgehobenen Resultat die Existenz eines Bogens B in G^*, der in einem Randpunkt P von G^* mündet und längs dessen $\lim \frac{|f(z)|}{|z|^\lambda} \geqq \mu(\lambda) - \delta$ für jedes $\delta > 0$ ist. Da kein Stück von B zu C gehört, gibt es auf B eine gegen P konvergierende Punktfolge $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\nu, \ldots$ die *in G liegt.* Da auf dieser Punktfolge $\lim \frac{|f(z)|}{|z|^\lambda} \geqq \mu(\lambda) - \delta$ ist, ist à fortiori $\mu^*(\lambda) \geqq \mu(\lambda) - \delta$ für jedes δ, d. h. $\mu^*(\lambda) \geqq \mu(\lambda)$. Wegen $\mu^*(\lambda) \leqq \mu(\lambda)$ folgt hieraus endlich für $0 < \lambda < \lambda'$ und daher, wegen der Stetigkeit von $\mu(\lambda)$ und $\mu^*(\lambda)$, auch für $0 \leqq \lambda \leqq \lambda'$ $\mu(\lambda) = \mu^*(\lambda)$. Für $\lambda > \lambda'$ folgt aber ebenso aus dem am Schluss der Nummer 18 Bemerkten $\mu^*(\lambda) \geqq M$ für jedes M und daher $\mu^*(\lambda) = \infty = \mu(\lambda)$, womit unsere Behauptung vollständig bewiesen ist.

Wir werden nun unter gewissen Annahmen über das Gebiet G beweisen, dass umgekehrt jede μ-Funktion von G auch eine solche von G^* ist. Hierzu machen wir die weitere Voraussetzung, dass *die Randkomponente C von den übrigen Randkomponenten von G isoliert verläuft,* d. h., dass kein Punkt von C eine Häufungsstelle von nicht auf C liegenden Randpunkten von G ist. Dies ist z. B. für ein Gebiet von endlichem Zusammenhang stets erfüllt. — Aus dieser Annahme können wir indessen nur folgern, dass eine μ-Funktion $\mu(\lambda)$ von G auch eine solche von G^* für *hinreichend grosse* λ ist, d. h. dass es eine μ-Funktion $\mu^*(\lambda)$ von G^* gibt, die für hinreichend grosse λ mit $\mu(\lambda)$ übereinstimmt. Um die Übereinstimmung für alle λ beweisen zu können, müssen wir noch eine weitere Annahme machen, dass nämlich die in § 4 eingeführte Konstante $R = R_G$ (die maximale Distanz des Randes vom Nullpunkt) für G und G^* dieselbe ist. Es gilt nun offenbar immer $R_G \geqq R_{G^*}$. Das Gleichheitszeichen gilt, wenn der unendlich ferne Punkt ausserhalb oder auf dem Rande von G^* liegt, braucht aber sonst nicht zu gelten. — Über den Nullpunkt wird dabei immer angenommen, dass er von höchstens abzählbarer Mehrfachheit ist, und ebenso über den unendlich fernen Punkt, wenn er auf C liegt.

Aus unserem Beweis wird sich übrigens ergeben, dass die Voraussetzung, C liege isoliert von den übrigen Randkomponenten, sich durch weniger ersetzen lässt. Bildet man nämlich G^* konform auf E ab, so mögen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ endlich viele abgeschlossene Bögen auf der Peripherie von E sein, die alle Bilder des Nullpunkts der G-Ebene im Innern enthalten. $R_1, \ldots, R_m$ seien die zugehörigen Randstücke (Kontinua von Randelementen) auf C. Statt nun anzunehmen, dass die ganze Randkomponente C von den übrigen Randkomponenten von G isoliert verläuft, genügt es anzunehmen, dass $R_1, \ldots, R_m$ *von den übrigen Randkomponenten von G isoliert liegen.* — Bei der Abbildung von G^* auf E geht G in ein Gebiet Σ über, dessen eine Randkomponente die Peripherie von E ist. Das Gebiet Σ werde nun durch Querschnitte, die keinen Punkt mit den Kreisbögen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ gemeinsam haben, in ein einfach zusammenhängendes Gebiet Σ' verwandelt, dem ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet G_1^* von G entspricht, das $R_1, \ldots, R_m$ als »freie» Randstücke hat. Es gilt dann insbesondere $R_G = R_{G_1^*}$. Es sei nun $\mu(\lambda)$ eine μ-Funktion in G zu einer in G regulären Funktion $f(z)$, $\mu^*(\lambda)$ die zu $f(z)$ in G_1^* gehörende μ-Funktion. Dann gilt offenbar $\mu(\lambda) \geqq \mu^*(\lambda)$. Bildet man das auf das einfach zusammenhängende Gebiet G_1^* und auf $\mu^*(\lambda)$ bezügliche Integral (17, 1):

$$\int_0^{2\pi} \lg T_{\mu^*}\left(\frac{1}{|\omega_1(1-e^{i\theta})|}\right) d\theta,$$

wo ω_1 E auf G_1^* abbildet, so konvergiert dieses Integral und daher a fortiori das auf die Funktion $\mu(\lambda) \geqq \mu^*(\lambda)$ bezügliche Integral

$$\int_0^{2\pi} \lg T_{\mu}\left(\frac{1}{|\omega_1(1-e^{i\theta})|}\right) d\theta. \tag{22, 1}$$

Da nun $\mu(\lambda)$ nach Nr. 15 die Bedingungen 1) und 3) für eine μ-Funktion des Gebiets G_1^* erfüllt, und die Konvergenz von (22, 1) die dafür notwendige Bedingung 2) ist, folgt, dass $\mu(\lambda)$ auch eine μ-Funktion des Gebietes G_1^* ist. Wir haben also nur zu untersuchen, wann eine μ-Funktion von G_1^* auch eine solche von G^* ist. Nun sind die notwendigen Bedingungen 1) und 3) des Hauptsatzes für μ-Funktionen der Gebiete G^* und G_1^* dieselben, wegen $R_{G^*} = R_G = R_{G_1^*}$. Es handelt sich also nur darum, zu beweisen, dass die entsprechenden Integrale (17, 1) für beide Gebiete zugleich konvergieren und divergieren. Wir erbringen diesen Beweis in der nächsten Nummer zugleich unter allgemeineren Voraussetzungen.

23. Wir beweisen allgemein, dass *für die Bedingung 2) des Hauptsatzes nur die Gestalt des Randes in der »Umgebung» des Nullpunktes wesentlich ist.*

Ist z. B. G von einer Jordankurve C begrenzt, und ist G_1 ein anderes gleichfalls von einer Jordankurve C_1 begrenztes Gebiet, dessen Rand in der Nähe des Nullpunktes mit einem Stück C^* von C übereinstimmt, und stossen beide Gebiete von derselben Seite an C^* an, so sind die Konvergenzbedingungen 2) des Hauptsatzes für beide Gebiete äquivalent. Allgemeiner beweisen wir zunächst folgendes: Es seien G, G' zwei einfach zusammenhängende Gebiete in der z-Ebene, die den Nullpunkt als einen Randpunkt besitzen. Man bilde G konform auf $E(|u-1|<1)$ ab, und es mögen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ n abgeschlossene Kreisbögen der Peripherie von E sein, die alle Bilder des Nullpunktes der z-Ebene samt ihren Häufungsstellen ganz im Innern enthalten. Diesen Bögen mögen die Randstücke $R_1, \ldots, R_n$ auf dem Rande von G entsprechen. Wir verbinden nun die Endpunkte jedes Kreisbogens α_ν durch einen in E hinreichend nahe an α_ν verlaufenden Querschnitt σ_ν, der mit α_ν zusammen ein Teilgebiet g_ν von E abgrenzt. Das Bild von g_ν in G sei ein Teilgebiet G_ν von G, dessen Berandung aus R_ν und einem Querschnitt s_ν des Gebietes G — dem Bild von σ_ν — begrenzt wird. Wir verlangen nun dass jedes s_ν zugleich ein Querschnitt des Gebietes G' ist und dass eines der Gebiete, in die G' durch s_ν zerlegt wird, G_ν ist, sodass R_ν auch ein Teil der Berandung von G' ist und bei der konformen Abbildung von G' auf E in einen Peripheriebogen α_ν' übergeht, während s_ν auf einen Querschnitt σ_ν' des Kreises E abgebildet wird. Wir sagen dann, dass *der Rand von G in einer Umgebung des Nullpunktes im Rand von G' enthalten ist*, und wir wollen nun zeigen, dass dann *aus der Konvergenz des Integrals*

$$(23, 1) \qquad \int_0^{2\pi} \lg T_\mu\left(\frac{1}{|\omega'(1-e^{i\theta})|}\right) d\theta,$$

wo ω' die Abbildungsfunktion von E auf G' ist, die Konvergenz von

$$(23, 2) \qquad \int_0^{2\pi} \lg T_\mu\left(\frac{1}{|\omega(1-e^{i\theta})|}\right) d\theta$$

folgt, wo ω E auf G abbildet. Zu dem Zwecke schreiben wir das Integral (23, 1) in der Form

$$\int \lg T_\mu\left(\frac{1}{|z|}\right) d\theta_0(z, z_0'),$$

wo längs der Berandung von G' in der zyklischen Anordnung der Randelemente zu integrieren und das Integral als ein Stieltjes-Integral aufzufassen ist; $\theta_0(z, z_0')$ ist dabei das Argument von $u-1$, wenn u der dem betreffenden Randelement z entsprechende Punkt auf $|u-1|=1$ ist. z_0' ist der Punkt von G', der in $u=1$ übergeht. Da $\theta_0(z, z_0')$ bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, genügt für das Stieltjes-Integral die Normierung mit z_0'. Da nun $\lg T_\mu\left(\frac{1}{|z|}\right)$ nach unten beschränkt ist, konvergiert zugleich mit (23, 1) jedes der Integrale

$$(23, 3) \qquad \int\limits_{R_\nu} \lg T_\mu\left(\frac{1}{|z|}\right) d\theta_0(z, z_0').$$

Ist $\theta(z, z_0)$ die zu $\theta_0(z, z_0')$ analoge Funktion für G, so folgt für das Integral (23, 2), dass es dann und nur dann konvergiert, wenn jedes der Integrale

$$(23, 4) \qquad \int\limits_{R_\nu} \lg T_\mu\left(\frac{1}{|z|}\right) d\theta(z, z_0)$$

konvergiert. Unsere Behauptung wird also bewiesen sein, wenn wir zeigen, dass für jedes ν die Integrale (23, 3) und (23, 4) zugleich konvergieren und divergieren. Dies beweisen wir, indem wir die zum Gebiet G_ν gehörende θ-Funktion $\theta_\nu(z, z_\nu)$ einführen und zeigen, dass für jedes der Integrale (23, 3) und (23, 4) die Konvergenz des Integrals

$$(23, 5) \qquad \int\limits_{R_\nu} \lg T_\mu\left(\frac{1}{|z|}\right) d\theta_\nu(z, z_\nu)$$

notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung ist. Wir betrachten (23, 4) (für (23, 3) ist die Schlussweise bis auf die Bezeichnungen wörtlich dieselbe). — Bildet man $E(|u-1|<1)$ mit Hilfe von $z=\omega_\nu(u)$ konform auf G_ν ab, so dass $\omega_\nu(1)=z_\nu$ ist, so entspricht dabei R_ν ein Teilbogen β_ν von $|u-1|=1$, der ganz im Innern die Bildpunkte des Nullpunktes der z-Ebene und ihre eventuellen Häufungsstellen enthält. Wir betrachten nun einen abgeschlossenen echten Teilbogen $\bar{\beta}_\nu$ von β_ν, der auch noch die auf β_ν liegenden Bildpunkte des Nullpunktes und ihre Häufungsstellen ganz im Innern enthält. Das entsprechende Teilstück von R_ν sei mit $\bar{R}_\nu$ bezeichnet. Wir behaupten nun, dass auf $\bar{R}_\nu$

$$0 < c_1 < \left|\frac{d\theta_\nu}{d\theta}\right| < c_2 < \infty$$

ist, so dass die Integrale (23, 4) und (23, 5) zu gleicher Zeit konvergieren und divergieren.[45] Denn es möge die Umkehrung von $z = \omega_\nu(u)$ etwa

$$(23,6) \qquad u = \Omega_\nu(z) + 1 = R_\nu(z) e^{i\theta_\nu(z, z_\nu)} + 1$$

sein und entsprechend möge die Funktion

$$(23,7) \qquad u = \Omega(z) + 1 = R(z) e^{i\theta(z, z_0)} + 1$$

G auf E so abbilden, dass $\Omega(z_0) = 0$ ist. G_ν geht bei dieser Abbildung von G auf E in ein Teilgebiet g_ν von E über. g_ν stösst an den Kreisbogen α_ν an. Die konforme Abbildung (23, 6) kann durch die Kombination der Abbildung (23, 7), die G_ν auf g_ν abbildet, und einer konformen Abbildung $u_1 = \varphi(u)$, die g_ν auf E abbildet, ausgeführt werden. Dann ist nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip $\varphi(u)$ im Innern von α_ν regulär und $\varphi'(u)$ beschränkt und $\neq 0$; daher gibt es zwei positive Konstanten γ_1, γ_2, so dass auf dem $\bar{\beta}_\nu$ entsprechenden Bogen $\bar{\alpha}_\nu$ von α_ν

$$0 < \gamma_1 \leqq |\varphi'(u)| \leqq \gamma_2 < \infty$$

gilt. Auf $\bar{R}_\nu$ gilt nun $\Omega_\nu(z) + 1 = \varphi(\Omega(z) + 1)$, d. h. $e^{i\theta_\nu(z, z_\nu)} = \varphi(e^{i\theta(z, z_0)} + 1) - 1$, so dass sich schliesslich die Gleichung ergibt

$$\theta_\nu = \psi(\theta),$$

die auf $\bar{\beta}_\nu$ gilt, und in der ψ eine Funktion von θ mit

$$|\psi'(\theta)| = |\varphi'(e^{i\theta(z, z_0)} + 1)|$$

ist, so dass in der Tat auf $\bar{R}_\nu$

---

[45] Das letztere folgt aus der folgenden leicht beweisbaren Transformationsformel für Stieltjesintegrale

$$\int f(z)\, d\varphi(\theta(z)) = \int f(z) \varphi'(\theta(z))\, d\theta(z),$$

wo $\varphi(y)$ totalstetig ist. In unserm Falle kann man ja jedes der Integrale (23, 4), (23, 5) als ein Lebesguesches Integral in θ auffassen, so dass der betreffende Spezialfall der Transformationsformel aus der Transformationstheorie der Lebesgueschen Integrale sofort folgt. (Vgl. z. B. CARATHÉODORY, Reelle Funktionen, pp. 559—560.)

$$0 < \gamma_1 \leqq \left| \frac{d\theta_\nu}{d\theta} \right| \leqq \gamma_2 < \infty$$

gilt, w. z. b. w.

Ist nun auch umgekehrt der Rand von G' im oben definierten Sinne in einer Umgebung des Nullpunktes im Rand von G enthalten, so sagen wir, dass *die Ränder der Gebiete G und G' in einer Umgebung des Nullpunktes übereinstimmen.* Dann folgt aus dem eben Bewiesenen die Richtigkeit der am Anfang dieser Nummer aufgestellten Behauptung. — Wird nun über G und G_1 noch vorausgesetzt, dass der Nullpunkt — und eventuell der unendlich ferne Punkt — ein Randpunkt von höchstens abzählbarer Mehrfachheit und dass überdies $R_G = R_{G_1}$ ist, so ergibt sich offenbar aus dem Hauptsatz, dass jede μ-Funktion von G eine solche von G_1 ist und umgekehrt. Ist aber etwa $R_G < R_{G_1}$, so folgt aus dem am Schlusse von Nr. 18 Bemerkten, dass zwar jede μ-Funktion von G eine solche von G_1 ist, dass aber eine μ-Funktion von G_1 erst von einem λ an gleich einer μ-Funktion von G zu werden braucht. Wenden wir dies auf die in Nr. 22 durchgeführte Betrachtung an, so folgt unter Beibehaltung der dort benutzten Bezeichnungen, dass wenn die Bedingung $R_G = R_{G^*}$ fallen gelassen wird, eine μ-Funktion von G erst von einem λ an eine solche von G^* zu sein braucht.

Für $R_G > R_{G^*}$ muss aber die Aufstellung der Kriterien für eine μ-Funktion eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes G für das *ganze* λ-Intervall $(0, \infty)$ einer weiteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

24. Wir wollen endlich das Resultat von Nr. 19 noch etwas verallgemeinern. Sind G und G_1 zwei Gebiete, von denen G_1 in G enthalten ist, und die beide den Nullpunkt und eventuell den unendlich fernen Punkt als einen Randpunkt von höchstens abzählbarer Mehrfachheit besitzen, so folgt für eine der Bedingung 1) des Hauptsatzes genügende Funktion $\mu(\lambda)$ aus der Konvergenz des Integrals (17, 1) für G die Konvergenz dieses Integrals für G_1, da für die wie in Nr. 17 mit $\mu(\lambda)$ gebildete Funktion $f(z)$ in G die zugehörige μ-Funktion $\mu^*(\lambda)$ in G_1 von einem λ an $\mu(\lambda)$ zur Majorante hat und für $\mu^*(\lambda)$ das Integral (17, 1) für G_1 konvergiert. Sind also die Konvergenzbedingungen von (17, 1) für G und G_1 miteinander äquivalent, so sind sie auch für jedes »zwischen» G und G_1 liegende einfach zusammenhängende Gebiet dieselben. Und es ist klar, wie man dies mit Hilfe der Betrachtungen der Nr. 23 auf den Fall ausdehnen kann, wenn das »Ineinanderliegen» sich nur auf eine Umgebung des Nullpunktes bezieht. Hieraus folgt nun die Bedeutung der folgenden Begriffsbildung: Wir sagen, zwei

im Punkte $z=0$ zusammenstossende Kurvenzweige A_1, A_2 bilden dort eine *generalisierte konforme Ecke mit der Winkelöffnung* $\pi\alpha$ $(\alpha>0)$, wenn A_1 zwischen zwei einander berührenden Kurvenbögen B_1, B_1' und ebenso A_2 zwischen zwei einander berührenden Kurvenbögen B_2, B_2' liegt und, falls B_1, B_2 zwischen A_1, A_2 und A_1, A_2 zwischen B_1', B_2' liegen, sowohl B_1, B_2 als auch B_1', B_2' konforme Ecken mit der Winkelöffnung $\pi\alpha$ bilden. Dann folgt aus dem oben Bemerkten, dass die Resultate von Nr. 19 für eine generalisierte konforme Ecke mit der Winkelöffnung $\pi\alpha$ gelten.[46]

Bisher bezog sich die μ-Funktion auf den Randpunkt $z=0$ von G. Ist nun z_0 ein beliebiger Randpunkt von G, so ist der Nullpunkt der entsprechende Randpunkt von $G-z_0$. Genügt der Rand von $G-z_0$ den oben formulierten Bedingungen, so nennen wir die μ-Funktion von $f(z+z_0)$ in $G-z_0$ die zu $f(z)$ und dem Randpunkt z_0 von G gehörende μ-Funktion. Sie lässt sich offenbar definieren als $\operatorname*{Sup}_{z \text{ in } G} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^\lambda}$ und besitzt die analogen Eigenschaften wie die oben behandelte μ-Funktion, die zum Nullpunkt gehört. Es ist leicht zu sehen, wie das Gesagte zu modifizieren ist, wenn z_0 der unendlich ferne Punkt ist.[47]

§ 6. Das *W*-Problem.

25. Wir sind nunmehr in der Lage, die in der Einleitung als das W-Problem bezeichnete Fragestellung in Angriff zu nehmen.

Es sei also G ein Gebiet mit einem Randpunkt z_0 von höchstens abzählbarer Mehrfachheit. Ist G mehrfach zusammenhängend, so soll über G vorausgesetzt werden, dass die z_0 enthaltende Randkomponente C von den übrigen Randkomponenten von G isoliert liegt.[48] Wir fragen, für welche Folgen von positiven Zahlen m_n $(n=1, 2, \ldots)$ aus dem Bestehen der Ungleichungen

---

[46] Die in der Fussnote 43 zitierte Arbeit von Hrn. WARSCHAWSKI wird einige Resultate über den Zusammenhang des Begriffs der generalisierten konformen Ecke mit dem Begriff der gewöhnlichen konformen Ecke enthalten.

[47] Es sei noch bemerkt, dass die Definition und die obige Theorie der μ-Funktion sich insofern verallgemeinern lässt, als man anstatt z eine Vergleichsfunktion $v(z)$ benutzen kann, die im Gebiet G regulär und $\neq 0$, am Rande beschränkt und stetig ist und nur in einem Punkte verschwindet. Man kann so die in einigen der obigen Sätze hervortretende Ausnahmestellung des unendlich fernen Punktes aufheben.

[48] Man könnte hier ohne weiteres auch die allgemeineren Annahmen zugrunde legen, die bei den Betrachtungen der Nr. 23 benutzt worden sind.

$$\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^n} \leqq m_n, \quad z \text{ in } G, \tag{25, 1}$$

für eine in G reguläre und beschränkte Funktion $f(z)$ das identische Verschwinden von $f(z)$ folgt. — Die Fragestellung kann offenbar leicht verallgemeinert werden: Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eine Folge nicht negativer monoton ins Unendliche wachsender Zahlen und $m_1, m_2, \ldots$ eine unendliche Folge positiver Zahlen. Dann kann man fragen, wann aus

$$\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{\lambda_\nu}} \leqq m_\nu, \quad z \text{ in } G, \qquad \nu = 1, 2, \ldots \tag{25, 2}$$

das identische Verschwinden von $f(z)$ folgt. Und (25, 2) kann man offenbar durch

$$\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{\lambda}} \leqq m(\lambda), \quad z \text{ in } G, \qquad 0 \leqq \lambda < \infty \tag{25, 3}$$

ersetzen, wenn $m(\lambda) = m_\nu$ für $\lambda = \lambda_\nu$ ist und $m(\lambda) = \infty$ für andere λ gesetzt wird. Wir können daher allgemein fragen, wann aus (25, 3) für eine positive Funktion $m(\lambda)$, die für alle $\lambda \geqq 0$ definiert und auch des Wertes $+\infty$ fähig ist, das identische Verschwinden von $f(z)$ folgt, wenn $f(z)$ als in G regulär und beschränkt vorausgesetzt wird? Nun sei $\mu(\lambda)$ die zu $f(z)$ und dem Randpunkt z_0 gehörende μ-Funktion. Dann besagt offenbar (25, 3), dass $\mu(\lambda) \leqq m(\lambda)$ für alle $\lambda \geqq 0$ gilt. Gibt es umgekehrt eine Funktion $\mu(\lambda)$ mit den in § 4 angegebenen Eigenschaften, die zugleich $\leqq m(\lambda)$ ist, so gilt für eine dazu gehörige, mit Hilfe von G^* gebildete, Funktion $f(z)$ (25, 3), so dass aus (25, 3) das identische Verschwinden von $f(z)$ nicht zu folgen braucht.

26. Wann gibt es nun zu $m(\lambda)$ eine Funktion $\mu(\lambda)$, so dass $\mu(\lambda) \leqq m(\lambda)$ ist? Es muss dann offenbar $\operatorname*{Inf}_{\lambda \geqq 0} m(\lambda) > 0$ und $\frac{\lg m(\lambda)}{\lambda} \to \infty$ sein, da dies ja für $\mu(\lambda)$ zutrifft. Sodann muss $T_m(r) \leqq T_\mu(r)$ sein, so dass wegen der in der Nr. 22 unter unseren Voraussetzungen über G bewiesenen Konvergenz von (17, 1) auch

$$\int_0^{2\pi} \lg T_m\left(\frac{1}{|\omega(1-e^{i\theta})|}\right) d\theta$$

konvergiert. — Wir behaupten nun, dass die drei eben angegebenen Bedingungen auch hinreichend sind, damit ein $\mu(\lambda)$ mit $m(\lambda) \geqq \mu(\lambda)$ existiert, so dass also der Satz gilt

Satz VII. *Dann und nur dann folgt aus dem Bestehen von* (25, 3) *in einem Gebiet G mit den in der Nr.* 25 *formulierten Eigenschaften für eine in G reguläre und beschränkte Funktion $f(z)$ das identische Verschwinden von $f(z)$, wenn*

entweder $$\operatorname*{Inf}_{\lambda \geqq 0} m(\lambda) \leqq 0 \text{ ist,}$$

oder $$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{\lg m(\lambda)}{\lambda} < \infty \text{ ist,}$$

oder das Integral

(26, 1) $$\int_0^{2\pi} \lg T_m \left(\frac{1}{|\omega(1 - e^{i\theta})|} \right) d\theta$$

divergiert, wo $\omega(u)$ den Kreis $|u - 1| < 1$ auf das »Innere« G^* der durch z_0 hindurchgehenden Randkomponente von G konform abbildet.

Wir haben offenbar nur zu beweisen, dass, wenn das Integral (26, 1) konvergiert und $m(\lambda) \geqq d > 0$, $\frac{\lg m(\lambda)}{\lambda} \to \infty$ für $\lambda \uparrow \infty$ ist, es eine μ-Funktion des Satzes VI (im Sinne der in der Nr. 22 hergeleiteten Verallgemeinerung dieses Satzes) gibt, für die $m(\lambda) \geqq \mu(\lambda)$ ist. Ich kann dabei offenbar G durch das dazu in Nr. 22 gebildete Gebiet G^* und $m(\lambda)$ durch ihre Wimansche Minorante $\overline{m}(\lambda)$ ersetzen. Für $\overline{m}(\lambda)$ trifft bereits die Eigenschaft 2) des Satzes VI zu. Ist das Endlichkeitsintervall von $\overline{m}(\lambda)$ unendlich, so kann man durch eine Abänderung von $\overline{m}(\lambda)$ auf einem endlichen Intervall erreichen, dass auch die Eigenschaften 1) und 3) zutreffen, etwa, indem man für ein hinreichend grosses λ_0 die Kurve $y = \lg \overline{m}(\lambda)$ über dem Intervall $\langle 0, \lambda_0 \rangle$ durch ein Stück einer Stützgeraden an die Kurve im Punkte λ_0 ersetzt, die ja beliebig steil gewählt werden kann. Dabei bleibt das Integral (26, 1) konvergent, nach dem in Nr. 13 Bewiesenen.

Ist aber das Endlichkeitsintervall von $\overline{m}(\lambda)$ endlich, etwa (λ_1, λ_1') (offen oder abgeschlossen), so verbinde man den Punkt $\lambda_1' + 1$ der λ-Achse mit einem so tief liegenden Punkt der y-Achse, das die ganze Punktmenge $y = \lg \overline{m}(\lambda)$ oberhalb der Verbindungsstrecke bleibt und die Steigung der Strecke grösser als $\lg \frac{1}{R}$ ist. Setzt man $\lg \mu(\lambda)$ im Intervall $\langle 0, \lambda_1' + 1 \rangle$ gleich der Ordinate des entsprechenden Punktes dieser Strecke und für $\lambda > \lambda_1' + 1$ gleich ∞, so hat man dann eine μ-Funktion für die $\mu(\lambda) \leqq m(\lambda)$ ist, womit der Satz VII bewiesen ist.

Offenbar ist für den Beweis der Notwendigkeit einer der drei Bedingungen des Satzes VII auch die Voraussetzung entbehrlich, dass C eine *isolierte* Randkomponente von G ist, da eine μ-Funktion für G^*, selbst wenn sie keine μ-Funktion für G ist, sicher Majorante einer solchen sein muss.

§ 7. Abhängigkeit der μ-Funktion von den einzelnen Werten von $f(z)$.

27. Wir diskutieren noch kurz die Abhängigkeit der μ-Funktion von den Werten von $f(z)$ an den einzelnen Stellen des Gebietes für den Fall $G \equiv E$. Es sei $\operatorname*{Sup}_{z \text{ in } E} |f(z)| = \mu(0) = 1$. Es sei B ein ganz in E liegender (abgeschlossener) Bereich, und in einem Punkte z_0 von B sei $|f(z_0)| = s > 0$. Dann folgt aus

$$\lg |f(z_0)| = \lg s \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |f(1 + e^{i\theta})| \, \Re \frac{e^{i\theta} + z_0 - 1}{e^{i\theta} - z_0 + 1} \, d\theta$$

wegen $\lg |f(1 + e^{i\theta})| \leqq -\lg T_\mu \left(\frac{1}{|1 - e^{i\theta}|} \right)$ (vgl. (16, 1) und (1, 5))

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg T_\mu \left(\frac{1}{|1 - e^{i\theta}|} \right) d\theta \leqq \frac{1 + |z_0 - 1|}{1 - |z_0 - 1|} \lg \frac{1}{s}.$$

Da wegen $\lg \mu(0) = 0$ $\lg T_\mu \geqq 0$ ist, folgt, wenn $2 \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{r}$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \lg T_\mu(r) \frac{dr}{r^2} \leqq \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \lg T_\mu(r) \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{1}{4r^2}}} \leqq \frac{1 + |z_0 - 1|}{1 - |z_0 - 1|} \lg \frac{1}{s},$$

d. h.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \lg T_\mu(r) \frac{dr}{r^2} \leqq c_0 \lg \frac{1}{s}, \quad c_0 = c_0(z_0) = \pi \frac{1 + |1 - z_0|}{1 - |1 - z_0|} \leqq c_B,$$

wo c_B nur von B abhängt.

Wir setzen $\sqrt[\lambda]{\mu(\lambda)} = \beta(\lambda)$ (vgl. Nr. 14) und bezeichnen mit $\varrho(r)$ wiederum die wie in Nr. 14 definierte »Umkehrfunktion» von $\beta(\lambda)$. Dann folgt aus (14, 1) wegen $\mu(\lambda) \geqq 1$, $\beta(\lambda) \geqq 1$, $\varrho(r) = 0$ für $r \leqq 1$:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \varrho\left(\frac{r}{e}\right) \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{e} \int_{1}^{\infty} \varrho(r) \frac{dr}{r^2} \leqq c_0 \lg \frac{1}{s} \cdot$$

Ferner gilt

$$\int_{1}^{\infty} \varrho(r) \frac{dr}{r^2} = \int_{r=1}^{\infty} \frac{d\varrho(r)}{r};$$

dies ist aber nach dem Hilfssatz 4 (vgl. § 3) gleich

$$\int_{0}^{\infty} \frac{d\varrho}{\beta(\varrho)} \cdot$$

Daher ergibt sich

$$(27,1) \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt[\lambda]{\mu(\lambda)}} \leqq c \lg \frac{1}{s}, \quad c = c(z_0) = \pi e \frac{1+|1-z_0|}{1-|1-z_0|}.$$

Ist allgemeiner $\mu(0) = \mu_0$ nur als > 0 vorausgesetzt, so genügt es, $\frac{f(z)}{\mu_0}$ zu betrachten, und man erhält

$$\int_{0}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt[\lambda]{\frac{\mu(\lambda)}{\mu_0}}} \leqq c \lg \frac{\mu_0}{s}, \quad c = e\pi \frac{1+|1-z_0|}{1-|1-z_0|};$$

wegen der Monotonie von $\sqrt[\lambda]{\frac{\mu(\lambda)}{\mu_0}}$ folgt hieraus

$$(27,2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{\mu(n)}{\mu(0)}}} \leqq c \lg \frac{\mu_0}{s}.$$

Daraus ergibt sich inbesondere z. B. für $s = 1$ und $z_0 = 1$

$$(27,3) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{\frac{\mu(\nu)}{\mu_0}}} \leqq e\pi \lg \mu_0 .$$

Es hat nun zunächst den Anschein, als ob hieraus folgte, dass

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{\mu(\nu)}}$$

für $s = 1$ unterhalb einer absoluten Konstanten liegt. Wir wollen aber an einem Beispiel zeigen, dass dies nicht richtig ist. Zu dem Zwecke setze man $\mu_n(\lambda) = 1$ für $0 \leqq \lambda \leqq n$ und $\mu_n(\lambda) = \infty$ für $\lambda > n$. Das zugehörige $T_\mu(r)$ ist offenbar gleich 1 oder r^n, je nachdem $r \leqq 1$ oder $r > 1$ ist. Die drei Bedingungen des Hauptsatzes sind erfüllt (R_E ist gleich 2), und man erhält nach dem Verfahren von Nr. 17 eine zu $\mu_n(\lambda)$ in E gehörende Funktion $\varphi_n(z)$, für die

$$(27,4) \qquad \lg |\varphi_n(z)| = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg T_{\mu_n}\left(\frac{1}{|1 - e^{i\theta}|}\right) \Re \frac{e^{i\theta} + z - 1}{e^{i\theta} - z + 1}\, d\theta$$

ist. Daher gilt für $\lg |\varphi_n(1)|$

$$\lg |\varphi_n(1)| = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg T_{\mu_n}\left(\frac{1}{\left|2 \sin\frac{\theta}{2}\right|}\right) d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\lg T_{\mu_n}(r)}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{1}{4r^2}}}$$

oder

$$\lg |\varphi_n(1)| = -\frac{n}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\lg r}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{1}{4r^2}}} = n \lg \frac{1}{\gamma},$$

wo γ eine positive von n unabhängige Konstante > 1 ist, so dass

$$(27,5) \qquad |\varphi_n(1)| = \gamma^{-n}$$

gilt. Für $f_n(z) = \gamma^n \varphi_n(z)$ gilt daher: $\mu(\lambda) = \gamma^n$ für $0 \leqq \lambda \leqq n$, $\mu(\lambda) = \infty$ für $\lambda > n$,

$$(27,6) \qquad \mu(0) = \mu_0 = \gamma^n, \quad s = |f_n(1)| = 1, \quad k_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{\mu(\nu)}} = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma^{-\frac{n}{\nu}},$$

daher für $n \to \infty$

$$k_n > \sum_{n \geqq \nu > \frac{n}{2}} \gamma^{-\frac{n}{\nu}} \geqq \frac{n-1}{2} \cdot \gamma^{-2} \to \infty .$$

§ 8. **Zur Ränderzuordnung bei konformer Abbildung.**

28. Wir tragen nun den Beweis der in Nr. 17 benutzten Sätze nach.

Satz A. *Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet der u-Ebene. Bildet man G konform auf das Innere des Einheitkreises K der z-Ebene ab, so liegt in jeder ϱ-Umgebung $U_\varrho(P)$ eines beliebigen Punktes P des Randes R von G eine Menge erreichbarer Punkte, deren Bildmenge auf der Kreisperipherie positives Lebesguesches Mass hat.*

Zum Verständnis des Satzes sei zunächst an folgende Begriffe und Tatsachen aus der Theorie der konformen Abbildung erinnert. Einem in einem Randpunkte P von G mündenden in G verlaufenden Jordanschen Bogen b ordnen wir ein »Ende» zu, in dem b mündet. Zwei verschiedene in P mündende Jordanbögen definieren dasselbe Ende, wenn sie entweder beliebig nahe bei P Schnittpunkte haben oder keinen Randpunkt »zwischen sich» enthalten. Sonst sind zwei solche Enden verschieden. Jedem Ende η entspricht nun ein Punkt ϑ der Kreisperipherie, derart, dass einem in η mündenden Jordanbogen b ein in K verlaufender in ϑ mündender Jordanbogen entspricht. Ist b' ein Jordanbogen in K, der in ϑ mündet und zwischen zwei von ϑ ausgehenden Sehnen verläuft, so entspricht ihm ein Jordanbogen in G, der im Ende η mündet. Verschiedenen Enden entsprechen daher auch verschiedene Punkte ϑ. Ist umgekehrt ϑ ein Punkt der Peripherie von K, in dem die Abbildungsfunktion $\omega(z)$ einen radialen Grenzwert besitzt, so entspricht ihm in dem eben angegebenen Sinne ein Ende von G. Wie aus dem Fatouschen Satz folgt, haben alle Punkte der Kreisperipherie von K bis auf eine Nullmenge diese Eigenschaft. Unser Satz behauptet nun, dass die in $U_\varrho(P)$ liegenden Enden von G auf Punkte der Kreisperipherie abgebildet werden, deren Lebesguesches Mass positiv ist.

Zum Beweis, bei dem P als endlich angenommen werden darf, bilden wir eine für $0 \leqq r < \infty$ stetig differenzierbare Funktion $\varphi(r)$, die für $0 \leqq r \leqq \frac{\varrho}{2}$ identisch gleich 1, für $\varrho \leqq r < \infty$ identisch gleich 0 ist und für $\frac{\varrho}{2} < r < \varrho$ zwischen 0 und 1 bleibt. Allen Punkten der um P mit dem Radius r beschriebenen Kreislinie ordnen wir den Wert $\varphi(r)$ zu und erhalten so eine in der ganzen Ebene definierte und sowohl nach x als auch nach y stetig differenzierbare Funktion $\Phi(u)$, die in $U_{\frac{\varrho}{2}}(P)$ identisch gleich 1, ausserhalb $U_\varrho(P)$ identisch gleich 0 ist, und sonst zwischen 0 und 1 enthalten ist Nach dem fundamentalen Satz von LEBESGUE, gibt es eine in G reguläre Potentialfunktion $V(u)$, die auf $G+R$ stetig ist und auf R mit $\Phi(u)$ übereinstimmt.[49] $V(u)$ ist sicher für hinreichend kleine ϱ nicht konstant und hat in jedem Punkte von G einen positiven Wert <1. — Es sei ζ ein Punkt von G, und man bilde G konform auf das Innere des Einheitskreises so ab, dass ζ in den Nullpunkt übergeht. Dann geht $V(u)$ in ein im Einheitskreise reguläres Potential $U(re^{i\vartheta})$ über. Die den Mengen der erreichbaren Randpunkte aus $U_\varrho(P)$ und $G-U_\varrho(P)$ entsprechenden Punktmengen auf der Peripherie des Einheitskreises seien, ebenso wie die entsprechenden ϑ-Wertmengen resp. mit $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ bezeichnet, ihre Masse mit $2\pi m_1$ bzw. $2\pi m_2$.[50] Dann liefert der Gausssche Mittelwertssatz für $0<r<1$

$$V(\zeta)=U(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\vartheta})\,d\vartheta=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathfrak{M}_1}+\int_{\mathfrak{M}_2}\right)\leqq m_1+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{M}_2} U(re^{i\vartheta})\,d\vartheta.$$

Wegen der Beschränktheit von U kann man nach einem bekannten Satz von LEBESGUE rechts r gegen 1 gehen lassen und erhält $m_1 \geqq U(0)>0$, w. z. b. w.

Aus dem soeben bewiesenen Resultate lässt sich die folgende Tatsache herleiten. (Dabei ist G wieder ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $U_\varrho(P)$ die ϱ-Umgebung eines Randpunktes von G.)

Satz A$_1$. *Es sei B eine in G liegende abgeschlossene Punktmenge. Es gibt ein nur von G, B und $U_\varrho(P)$ abhängiges γ mit $0<\gamma<1$, so dass, wenn $f(z)$ in G regulär und absolut $\leqq M$ ist, wenn ferner $\overline{\lim}\,|f(z)|$ bei Annäherung an die in $U_\varrho(P)$ liegenden Randpunkte $\leqq \varepsilon$ ist, dann in B durchweg*

$$|f(z)| \leqq \varepsilon^\gamma M^{1-\gamma} \tag{28, 1}$$

ist.

Denn bildet man G konform auf das Innere des Einheitskreises ab, so bil-

[49] Vgl. H. LEBESGUE, Pal. Rendiconti, Bd. 24 (1907), pp. 371 ff.

[50] Dass die Abbildungsfunktion $f(z)$ auf der ϑ-Menge, die den erreichbaren Punkten von G entspricht, messbar ist, folgt daraus, dass sie eine Grenzfunktion der Folge stetiger Funktionen $f\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\vartheta}\right)$ ist.

den sich die erreichbaren Randpunkte aus $U_\varrho(P)$ auf eine Menge der Peripheriepunkte $e^{i\vartheta}$ des Einheitskreises ab, wobei die Menge $\mathfrak{M}$ dieser ϑ ein Mass $2\pi m > 0$ hat. B geht dabei in eines im Einheitskreise liegende abgeschlossene Punktmenge über, und $f(z)$ in eine Funktion $g(z)$, die für $|z| < 1$ regulär ist. Unsere Behauptung folgt daher aus dem Satz: *Ist $g(z)$ für $|z| < 1$ regulär und absolut $\leqq M$, und ist für eine Randpunktmenge $\mathfrak{M}$ positiven Masses $2\pi m$ $\overline{\lim}\, |g(z)|$ bei radialer Annäherung $\leqq \varepsilon$, so gilt für $|z| < 1$*

$$(28,2) \qquad |g(z)| \leqq \varepsilon^\gamma M^{1-\gamma}, \quad \gamma = \frac{1-|z|}{1+|z|} m.$$

Zum Beweise von (28, 2) benutzen wir (1, 2) für $\zeta = z$, $R = r$, $|z| < r < 1$. Dann folgt nach (1, 5), da der Integrand $\leqq 0$ ist:

$$\lg \left|\frac{g(z)}{M}\right| \leqq \frac{1}{2\pi} \frac{r-|z|}{r+|z|} \int_0^{2\pi} \lg \frac{|g(re^{i\vartheta})|}{M} d\vartheta \leqq \frac{r-|z|}{r+|z|} \int_{\mathfrak{M}} \lg \frac{|g(re^{i\vartheta})|}{M} d\vartheta$$

$$\leqq \frac{r-|z|}{r+|z|} \left(m \lg \frac{\varepsilon}{M} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{M}} \lg \frac{|g(re^{i\vartheta})|}{\varepsilon} d\vartheta \right),$$

oder, wenn allgemein für $a > 0 : \overset{+}{\lg}\, a = \operatorname{Max}(\lg a, 0)$ gesetzt wird,

$$\lg \frac{|g(z)|}{M} \leqq \frac{r-|z|}{r+|z|} \left(m \lg \frac{\varepsilon}{M} + \int_{\mathfrak{M}} \overset{+}{\lg} \frac{|g(re^{i\vartheta})|}{\varepsilon} d\vartheta \right).$$

Hier ist aber der Integrand beschränkt und konvergiert mit $r \uparrow 1$ für ϑ aus $\mathfrak{M}$ gegen 0, so dass nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue für $r \uparrow 1$ folgt

$$(28,3) \qquad \lg \frac{|g(z)|}{M} \leqq \frac{1-|z|}{1+|z|} m \lg \frac{\varepsilon}{M}, \quad |g(z)| \leqq \varepsilon^{\frac{1-|z|}{1+|z|} m} M^{1-\frac{1-|z|}{1+|z|} m}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Ferner folgt aus unseren Resultaten die folgende Verallgemeinerung des Vitalischen Konvergenzsatzes. (Wir behalten dabei die obigen Bezeichnungen bei.)

Satz A_2. *Ist $f_n(z)$ eine Folge von in G regulären und gleichmässig beschränkten Funktionen, besitzen alle $f_n(z)$ in jedem Ende aus der Umgebung $U_\varrho(P)$ Randwerte, und ist die Folge dieser Randwerte konvergent, so konvergiert die Folge $f_n(z)$ gleichmässig in G.* Dieser Satz lässt sich nämlich sofort auf Grund des Satzes A durch konforme Abbildung auf das Innere des Einheitskreises auf die vor einigen Jahren von Herrn Khintchine und mir aufgestellte Verallgemeinerung des Vitalischen Satzes auf Funktionen mit konvergenten Randwertfolgen im Einheitskreise zurückführen.[51]

Aus der Relation (28, 1) folgt ferner, dass wenn $f(z)$ in allen Randpunkten von G aus $U_\varrho(P)$ verschwindet, dann $f(z)$ überhaupt identisch verschwinden muss. Dies ist mit einem kürzlich von Herrn Rado bewiesenen Satz äquivalent: *Liegt ein einfach zusammenhängendes Gebiet G im Innern des Einheitskreises, ohne mit dem Einhetskreis identisch zu sein, ist $f(z)$ regulär in diesem Gebiet, und verschwinden die Randwerte von $f(z)$ in jedem innerhalb des Einheitskreises liegenden Randpunkt von G, so verschwindet $f(z)$ identisch.*[52] Allerdings wird hierbei $f(z)$ nicht als beschränkt vorausgesetzt. Zeichnet man aber einen konzentrischen Kreis, der noch Randpunkte von G im Innern enthält, so ist $f(z)$ in den im Innern dieses Kreises liegenden Teilgebieten von G gleichmässig beschränkt.

§ 9. Zur Poissondarstellung harmonischer Funktionen in der Ebene.

30. Wir wenden uns nun zum Beweis des Satzes B. Wi.. können ihn so formulien:

Satz B. *Es sei $\omega(z)$ eine in Innern des Einheitskreises ev. bis auf einen einfachen Pol ζ reguläre und schlichte Funktion, die dort von 0 verschieden ist, während es auf der Peripherie des Einheitskreises höchstens abzählbar viele Punkte gibt, in deren beliebig kleiner Umgebung $\omega(z)$ beliebig grosser oder beliebig kleiner Werte fähig ist. Dann gilt, $z = r e^{i\vartheta}$, $r < 1$, gesetzt,*

$$(30, 1) \qquad \lg |\omega(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |\omega(e^{i\alpha})| \; K(r, \vartheta - \alpha) \, d\alpha,$$

bzw., wenn der Pol ζ auftritt,

$$(30, 2) \qquad \lg |\omega(z)| = \lg \frac{1}{|z - \zeta|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |(e^{i\alpha} - \zeta) \, \omega(e^{i\alpha})| \, K(r, \vartheta - \alpha) \, d\alpha.$$

[51] Vgl. die in der Fussnote 18 zitierte Arbeit, sowie A. Khintchine. Fund. Math., Bd. IV (1923), pp. 72 ff.

[52] T. Rado, Math. Zeitschr., Bd. 20 (1924), pp. 2 ff. In einer kürzlich erschienenen Arbeit von Herrn S. Saks (Acta Szeged, Bd. IV (1928), pp. 51 ff.) wird eine der Relation (28, 1) ähnliche Relation bewiesen, bei der indessen angenommen wird, dass ein Bogen des Einheitskreises nicht zum Rand von G gehört, was offenbar wesentlich spezieller ist als unser Resultat.

Zum Beweis des Satzes B werden wir den folgenden potentialtheoretischen Satz benötigen:

Satz C. *Es sei $P(r, \vartheta)$ eine für $r < 1$ reguläre Potentialfunktion, die bis auf beliebig kleine Umgebungen von abzählbar vielen Punkten $e^{i\vartheta_n}$ beschränkt ist. Dann ist für die Darstellbarkeit von P als Poissonsches Integral mit der Randwertfunktion $\psi(\vartheta)$ von $P(r, \vartheta)$ als Belegung notwendig und hinreichend, dass für jedes ϑ*

$$(1-r)\,P(r, \vartheta) \to 0 \text{ mit } r \uparrow 1 \tag{30, 3}$$

gilt, und dass der Mittelwert von $|P|$ gleichmässig in r beschränkt bleibt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(r e^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq C, \qquad 0 \leqq r < 1. \tag{30, 4}$$

Zusatz. *Die Bedingung* (30, 3) *lässt sich durch* $\underline{\lim}\,(1-r)|P(r, \vartheta)| = 0$ *für* $r \uparrow 1$ *ersetzen.*

Zum Beweise des Satzes C[53] benutzen wir wiederum den folgenden Hilfssatz:

Satz D. *Es sei* $P(r, \vartheta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta)$ *eine für $r < 1$ reguläre Potentialfunktion. Dann ist für die Darstellung von P durch das als das Stieltjesintegral geschriebene Poissonsche Integral*

$$P(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(r, \vartheta - \alpha)\, d\mu(\alpha), \tag{30, 5}$$

wo $\mu(\alpha)$ von beschränkter Schwankung ist, notwendig und hinreichend, dass die Mittelwerte (30, 4) *von $|P(r, \vartheta)|$ für alle $r < 1$ beschränkt sind:*

[53] Dieser Satz hängt mit den Resultaten zusammen, die Herr A. ZYGMUND (Math. Zeitschr. Bd. 25 (1926) pp. 274 ff.) über die Poissonsche Summation der trigonometrischen Reihen erhalten hat, namentlich mit den Théorèmes V und VI l. c. auf p. 284. Indessen werden bei diesen Sätzen andere Voraussetzungen über die Randfunktion der betrachteten Potentiale zugrunde gelegt. Andererseits kann man aus den Betrachtungen, die Herr ZYGMUND l. c., p. 288 entwickelt, folgern, dass in unserm Satze die Voraussetzung, die Menge der Unbeschränktheitspunkte sei abzählbar, nicht weggelassen werden kann, da man für jede sonst in betracht kommende Menge der Unbeschränktheitspunkte (sie muss B-messbar sein) Potentiale konstruieren kann, die unsern übrigen Bedingungen genügen, nur auf jener Menge Unbeschränktheitspunkte haben und sich durch das Poissonsche Integral nicht darstellen lassen.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(r,\vartheta)|\,d\vartheta \leqq C. \tag{30, 4}$$

Zusatz 1. *Unter dieser Bedingung besitzt $P(r,\vartheta)$ für fast alle ϑ nach* LEBESGUE *integrable radiale Randwerte $\psi(\vartheta)=\mu'(\vartheta)$.*

Zusatz 2. *Ist $P(r,\vartheta)$ für $0\leqq\vartheta_1\leqq\vartheta\leqq\vartheta_2\leqq 2\pi$ gleichmässig beschränkt, so gilt $\mu(\vartheta_2)-\mu(\vartheta_1)=\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\mu'(\alpha)\,d\alpha$, so dass $\mu(\vartheta)$ im obigen Intervall totalstetig ist.*[54] Ist $\alpha_0=0$, so ist $\mu(\alpha)$ periodisch mit der Periode 2π und das Intervall $(\vartheta_1,\vartheta_2)$ darf auch ganzzahlige Vielfache von 2π enthalten.

31. **Beweis des Satzes D.** Wendet man die Eulerschen Formeln auf die Fourrierreihe von $P(r,\vartheta)$ für $r<1$ an, so folgt aus (30, 4): $r^n|a_n|\leqq 2C$, $r^n|b_n|\leqq 2C$, daher für $r\uparrow 1$ $|a_n|\leqq 2C$, $b_n\leqq 2C$. Dann konvergiert aber bekanntlich[55]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin n\vartheta-b_n\cos n\vartheta}{n} \tag{31, 1}$$

für fast alle ϑ gegen eine Funktion $\mu(\vartheta)$. Daher besitzt nach dem Abelschen Stetigkeitssatz

$$\theta(r,\vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}(a_n\sin n\vartheta-b_n\cos n\vartheta)$$

für $r\uparrow 1$ für fast alle ϑ Randwerte $\mu(\vartheta)$. Die Menge der ϑ, für die $\theta(r,\vartheta)$ Randwerte besitzt, sei mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Nun ist $\frac{\partial\theta}{\partial\vartheta}=P(r,\vartheta)-a_0$. Daher ist θ auf jedem Kreise $r=$ Const. von beschränkter Schwankung, und zwar ist die Totalschwankung von $\theta(r,\vartheta)$ in ϑ für jedes $r<1$ höchstens gleich $2\pi(C+|a_0|)$. Daher ist auch die Totalschwankung von $\mu(\vartheta)$ auf $\mathfrak{M}$ höchstens gleich $2\pi(C+|a_0|)$, da für jede Folge von $\vartheta_\nu:\vartheta_1<\vartheta_2<\cdots<\vartheta_{n+1}$ aus $\mathfrak{M}$

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\mu(\vartheta_{\nu+1})-\mu(\vartheta_\nu)|=\lim_{r\uparrow 1}\sum_{\nu=1}^{n}|\theta(r,\vartheta_{\nu+1})-\theta(r,\vartheta_\nu)|$$

[54] Der Satz D wurde unabhängig von A. PLESSNER, G. C. EVANS und dem Verfasser aufgestellt. (Vgl. die in den Fussnoten 19, 20 und 18 zitierten Arbeiten.) Für positive Potentiale wurde der Satz bereits vor längerer Zeit von G. HERGLOTZ, Leipz. Ber. Bd. 63 (1911), pp. 501—511 bewiesen.

[55] Dies folgt bereits aus den ersten Sätzen über die Konvergenz von trigonometrischen Reihen bis auf eine Nullmenge, die von JEROSCH und WEYL aufgestellt worden sind (Math. Ann., Bdd. 66 (1909), pp. 67 ff. und 67 (1909), pp. 225 ff.).

ist. Setzt man nun in jedem Divergenzpunkt ϑ von (31, 1) $2\mu(\vartheta) = \overline{\lim}\,\mu(\vartheta_1) + \underline{\lim}\,\mu(\vartheta_2)$, wo $\vartheta_1 \uparrow \vartheta$, $\vartheta_2 \downarrow \vartheta$ auf $\mathfrak{M}$ ist, so ist die nunmehr für alle ϑ eindeutig definierte Funktion $\mu(\vartheta)$ auch von beschränkter Schwankung, da jede Summe $\sum_{\nu=1}^{n} |\mu(\vartheta_{\nu+1}) - \mu(\vartheta_\nu)|$ sich durch einen Mittelwert von zwei analogen Summen mit ϑ_ν aus $\mathfrak{M}$ abschätzen lässt. $\mu(\vartheta)$ ist periodisch mit der Periode 2π.

Nun folgt für $r < 1$ aus dem klassischen Satz über das Poissonsche Integral für $r < \varrho < 1$

$$\theta(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K\left(\frac{r}{\varrho}, \vartheta - \alpha\right) \theta(\varrho, \alpha)\, d\alpha. \tag{31, 2}$$

Aus dem Gaussschen Mittelwertsatz folgt, dass $|\theta| \leqq 2\pi(C + |a_0|)$ für $r < 1$ ist, da θ auf jedem Kreise $r = \text{Const.}$ wenigstens eine Nullstelle haben muss $\left(\text{wegen } \int_0^{2\pi} \theta(r, \vartheta)\, d\vartheta = 0\right)$ und die Totalschwankung von θ höchstens gleich $2\pi(C + |a_0|)$ ist. Lässt man daher in (31, 2) ϱ gegen 1 gehen, so darf nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz der Grenzübergang unter dem Integralzeichen vollzogen werden, und es ergibt sich

$$\theta(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(r, \vartheta - \alpha)\, \mu(\alpha)\, d\alpha, \tag{31, 3}$$

woraus durch Potenzreihenentwicklung die Eulerschen Formeln für $-\frac{b_n}{n}, \frac{a_n}{n}$ folgen, so dass (31, 1) die Fourrierreihe von $\mu(\vartheta)$ ist und daher für *alle* ϑ konvergieren muss, da $\mu(\vartheta)$ von beschränkter Schwankung ist. Insbesondere besitzt $\theta(r, \vartheta)$ für alle ϑ $\mu(\vartheta)$ als Randwert.

Ferner folgt aus $\theta(r, \vartheta'') - \theta(r, \vartheta') = \int_{\vartheta'}^{\vartheta''} (P(r, \vartheta) - a_0)\, d\vartheta$, dass, wenn $P(r, \vartheta)$ für $\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2$ gleichmässig in r beschränkt ($\leqq C_1$) ist, dann für $\vartheta_1 \leqq \vartheta' < \vartheta'' \leqq \vartheta_2$

$$\left|\frac{\theta(r, \vartheta'') - \theta(r, \vartheta')}{\vartheta'' - \vartheta'}\right| \leqq C_1 + |a_0|$$

ist, daher auch

$$\left|\frac{\mu(\vartheta'')-\mu(\vartheta')}{\vartheta''-\vartheta'}\right| = \lim_{r\uparrow 1}\left|\frac{\theta(r,\vartheta'')-\theta(r,\vartheta')}{\vartheta''-\vartheta'}\right| \leqq C_1+|a_0|,$$

so dass $\mu(\vartheta)$ in einem solchen Intervall der Lipschitzschen Bedingung genügt und daher totalstetig ist.

Aus (31, 3) folgt nach einem Satze von FATOU[56], dass $P(r, \vartheta)$ für $r\uparrow 1$ gegen $\mu'(\vartheta)=\psi(\vartheta)$ konvergiert, sobald $\mu'(\vartheta)$ existiert, d.h. jedenfall für fast alle ϑ, womit der Zusatz 1 bereits bewiesen ist, da $\psi(\vartheta)$ als Ableitung einer Funktion von beschränkter Schwankung integrabel ist. Wir differenzieren nun (31, 2) nach ϑ und lassen ϱ gegen 1 gehen, was wegen der Beschränktheit von θ nach dem Lebesgueschen Satz erlaubt ist. Dann ergibt sich

$$P(r,\vartheta)-a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\vartheta}K\left(\frac{r}{\varrho},\vartheta-\alpha\right)\theta(\varrho,\alpha)\,d\alpha\rightarrow-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\alpha}K(r,\vartheta-\alpha)\,\mu(\alpha)\,d\alpha.$$

Hieraus folgt durch partielle Integration

$$P(r,\vartheta)-a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K(r,\vartheta-\alpha)\,d\mu(\alpha),$$

wobei das ausintegrierte Glied wegen der Periodizität von K und μ verschwindet, woraus die Formel (30, 5) sofort folgt[57].

Gilt umgekehrt die Formel (30, 5), wo $\mu(\alpha)$ von beschränkter Schwankung ist, und zerlegt man $\mu(\alpha)$ in eine Differenz von zwei monoton wachsenden Funktionen, so sieht man, dass P eine Differenz von zwei positiven Potentialen ist. Es genügt daher, (30, 4) für ein positives Potential zu beweisen. Für ein solches ist aber die linke Seite von (30, 4) nach dem Gaussschen Mittelwertsatz konstant. Damit ist die Behauptung des Satzes D bewiesen.

Der Zusatz 2 folgt endlich sofort aus der Totalstetigkeit von $\mu(\vartheta)$ im Intervall $\vartheta_1\leqq\vartheta\leqq\vartheta_2$ und der Tatsache, dass $\mu'(\vartheta)=\psi(\vartheta)$ ist.

Um nun den Beweis des Satzes C zu erbringen, bemerken wir, dass die *Notwendigkeit der Bedingungen* (30, 3), (30, 4) aus dem Hilfssatz 2 im § 2, Nr. 6 und dem Satz D folgt, da ein Poissonsches Integral sich offenbar auch als ein Stieltjessches Integral schreiben lässt.

---

[56] Vgl. die in der Fussnote 42 zitierte Abhandlung, p. 345.

[57] Nämlich in der Gestalt $P(r,\vartheta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K(r,\vartheta-\alpha)\,d(\mu(\alpha)+a_0\,\alpha)$.

Es seien nun die Bedingungen (30, 3) und (30, 4) erfüllt. Da eine Konstante stets als Poissonsches Integral darstellbar ist, dürfen wir $a_0 = 0$ annehmen. Dann ist P in der Form (30, 5) mit periodischem $\mu(\alpha)$ darstellbar, und es gelten die Zusätze 1 und 2 zum Satze D. Es sei die Menge der ϑ_n, für die $P(r, \vartheta)$ in jeder Umgebung von $e^{i\vartheta_n}$ absolut beliebig grosse Werte annimmt, mit A_1 bezeichnet. A_1 ist abgeschlossen und nach der Annahme abzählbar. Wir setzen nun $\varphi(\vartheta) = \int\limits_0^{\vartheta} \psi(\alpha)\, d\alpha$. $\varphi(\vartheta)$ ist totalstetig, und es gilt in jedem von den ϑ_n freien abgeschlossenen Intervall $\mu(\vartheta'') - \mu(\vartheta') = \varphi(\vartheta'') - \varphi(\vartheta')$. Man bilde nun das Potential

$$P^*(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} K(r, \vartheta - \alpha)\, \psi(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} K(r, \vartheta - \alpha)\, d\varphi(\alpha)$$

und die Differenz

$$P_1(r, \vartheta) = P(r, \vartheta) - P^*(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} K(r, \vartheta - \alpha)\, d\mu_1(\alpha),$$

wo $\mu_1(\alpha) = \mu(\alpha) - \varphi(\alpha)$ ist. $\mu_1(\vartheta)$ ist in jedem von den ϑ_n aus A_1 freien Intervall konstant. $\mu_1(\vartheta)$ kann sich daher als eine Funktion von beschränkter Schwankung nur beim Durchgang durch die Punkte von A_1 ändern, wenn es dort eine Unstetigkeit erster Art besitzt. Es sei die Menge der Unstetigkeitspunkte von $\mu_1(\vartheta)$ mit A_2 bezeichnet. Ist A_2' die derivierte Menge von A_2, so ist wegen $A_2 < A_1$ und $A_1 > A_1'$ $A_2 + A_2'$ in A_1 enthalten und daher abzählbar. Andererseits ist $A_2 + A_2'$ abgeschlossen, muss daher, da es nicht perfekt ist, isolierte Punkte besitzen, die dann offenbar zu A_2 gehören müssen. Es sei α_0 ein isolierter Punkt von A_2, und es sei $2\pi m = \mu_1(\alpha_0 + 0) - \mu_1(\alpha_0 - 0)$. Es sei ferner $M_{\alpha_0}(\alpha)$ die Funktion, die in $\langle \alpha_0, \alpha_0 + \pi \rangle$ gleich $2\pi m$ ist und im Intervall $(\alpha_0 + \pi, \alpha_0 + 2\pi)$ gleich 0 ist. Dann gilt, wenn $M_{\alpha_0}(\alpha)$ als periodisch mit der Periode 2π fortgesetzt wird,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} K(r, \alpha_0 - \alpha)\, dM_{\alpha_0}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} K(r, 0)\, 2\pi m - \frac{1}{2\pi} K(r, \pi)\, 2\pi m$$

$$= m\left(\frac{1 - r^2}{(1 - r)^2} - \frac{1 - r^2}{(1 + r)^2}\right) = m\left(\frac{1 + r}{1 - r} - \frac{1 - r}{1 + r}\right) = \frac{4mr}{1 - r^2},$$

und daher, $\mu_2(\alpha) = \mu_1(\alpha) - M_{\alpha_0}(\alpha)$ gesetzt,

$$P_1(r, \alpha_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(r, \alpha_0 - \alpha)\, d\mu_2(\alpha) + m\frac{4r}{1-r^2}.$$

Hier ist $\mu_2(\alpha)$ in α_0 nunmehr stetig und hat sogar in einem Intervall um α_0 einen konstanten Wert. Nun konvergiert für $r \uparrow 1$ $(1-r)$ $P^*(r, \alpha_0)$ gegen 0 nach dem bereits bewiesenen Teil des Satzes. Ferner konvergiert $\int_0^{2\pi} K(r, \alpha_0 - \alpha)\, d\mu_2(\alpha)$ für $r \to 1$ gegen 0, da ausserhalb jenes Intervalls um α_0 $K(r, \alpha_0 - \alpha)$ gleichmässig in α mit $r \to 1$ gegen 0 geht. Daher folgt aus $\underline{\lim}\,(1-r)\,|P(r, \vartheta)| = 0$ $m = 0$, entgegen unserer Annahme. Folglich ist die Menge A_2 leer, sodass $\mu_1(\alpha)$ durchweg konstant ist, woraus $P_1(r, \vartheta) = 0$ und

$$P(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(r, \vartheta - \alpha)\, \psi(\alpha)\, d\alpha$$

folgt, w. z. b. w.

33. Wir sind nunmehr im Stande, den Beweis des Satzes B zu erbringen. Zu diesem Zwecke wenden wir den Satz C auf $\lg|\omega(z)|$ bzw., wenn $\omega(z)$ einen Pol 1. Ordnung in ζ besitzt, auf $\lg|(z-\zeta)\,\omega(z)|$ an. Dass die Bedingung (30, 3) in jedem dieser Fälle erfüllt ist, folgt aus den bekannten Abschätzungen für jede in $|z| < 1$ schlichte und reguläre Funktion, die auf $\frac{1}{\omega(z)}$ anzuwenden sind:

$$\frac{1}{\omega(z)} = O\left(\frac{1}{(1-|z|)^2}\right).$$

Da im ersten Falle auch $\omega(z) = O\left(\frac{1}{(1-|z|)^2}\right)$ ist, folgt dann für $r \uparrow 1$

$$\lg|\omega(re^{i\vartheta})| = O(\lg(1-r)), \quad (1-r)\lg|\omega(re^{i\vartheta})| \to 0.$$

Im zweiten Falle ist aber $\omega(z)(z-\zeta)$ beschränkt, weil $\omega(z)$ in der Nähe von $|z| = 1$ beschränkt ist, da alle absolut hinreichend grossen Werte bereits in einer Umgebung von ζ angenommen werden. Dann gilt

$$\frac{c}{(1-|z|)^2} < |\omega(z)(z-\zeta)| < C,$$

woraus wiederum für $r \uparrow 1$

$$(1-r) \lg |\omega(z)(z-\zeta)| \to 0$$

folgt. — Die Bedingung (30, 4) reduziert sich auf die Beschränktheit des Integrals

$$\int_0^{2\pi} |\lg|\omega(re^{i\vartheta})||\,d\vartheta \text{ bzw. } \int_0^{2\pi} |\lg|\omega(re^{i\vartheta})(z-\zeta)||\,d\vartheta.$$

Nun ist aber das Integral $\int_0^{2\pi} |\lg|f(re^{i\vartheta})||\,d\vartheta$ beschränkt in r für jede Funktion $f(z)$, die sich in $|z|<1$ als ein Quotient von zwei in $|z|<1$ regulären und beschränkten Funktionen darstellen lässt:

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}.$$ [58]

Besitzt nun $\omega(z)$ einen Pol in ζ, so ist, wie oben bemerkt, $\omega(z)(z-\zeta)$ bereits selbst beschränkt. Ist aber $\omega(z)$ im $|z|<1$ regulär und nicht beschränkt, so gilt identisch, $\omega(0)=\omega_0$ gesetzt,

$$\omega(z) = \frac{\omega_0 \dfrac{z}{\omega(z)-\omega_0} + z}{\dfrac{z}{\omega(z)-\omega_0}},$$

[58] Es genügt offenbar, diesen Satz für die Funktionen $g_1(z)$ und $g_2(z)$ einzeln zu beweisen, d. h. allgemein für eine in $|z|<1$ beschränkte und reguläre Funktion $g(z)$. Für eine solche folgt aber die Beschränktheit des Integrals $\int_0^{2\pi} |\lg|g(re^{i\theta})||\,d\theta$ in r sofort aus der Jensenschen Formel (vgl. die in der Fussnote 18 zitierte Arbeit des Verfassers), wenn man, was offenbar erlaubt ist, $g(0)=1$ annimmt. Denn danach gilt

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{M}_-} \lg|g(re^{i\theta})|\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{M}_+} \lg|g(re^{i\theta})|\,d\theta < C,$$

wenn $\mathfrak{M}_+$ bzw. $\mathfrak{M}_-$ die θ-Mengen bezeichnen, auf denen $|g|>1$ bzw. ≤ 1 ist, und wenn $|g|$ durchweg $\leq e^C$ bleibt. Daher ist

$$\int_0^{2\pi} |\lg|g(re^{i\theta})||\,d\theta = \int_{\mathfrak{M}_+} \lg|g(re^{i\theta})|\,d\theta - \int_{\mathfrak{M}_-} \lg|g(re^{i\theta})|\,d\theta \leq 4\pi C.$$

wo $\frac{z}{\omega(z)-\omega_0}$ in $|z|<1$ regulär und beschränkt ist, da $\omega(z)-\omega_0$ alle absolut hinreichend kleinen Werte bereits in einer Umgebung von $z=0$ annimmt.

Damit ist der Beweis des Satzes B erbracht.

§ 10. Über Umkehrungen monotoner Funktionen.

34. Zwei im abgeschlossenen Intervall $\langle x_1, x_2\rangle$ definierte monotone Funktionen heissen in diesem Intervall äquivalent, wenn sie in allen Punkten des Intervalles, höchstens bis auf abzählbar viele *innere* Punkte, einander gleich sind.

Zwei in $\langle x_1, x_2\rangle$ äquivalente Funktionen müssen offenbar *gleichsinnig* monoton sein, und wir können uns auf die Betrachtung von miteinander äquivalenten monoton *wachsenden* Funktionen beschränken. Wir beweisen nun, dass zwei miteinander äquivalente Funktionen $f(x)$, $g(x)$ *dieselbe Menge S der inneren Stetigkeitspunkte haben und in diesen Punkten einander gleich sind.* Denn es sei $f(x)$ in einem inneren Punkte x_0 des Intervalles stetig. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ ein Intervall $\langle x_0', x_0''\rangle$ mit $x_1<x_0'<x_0<x_0''<x_2$, sodass für x aus $\langle x_0', x_0''\rangle$ $f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$ ist. Es seien dann $\overline{x}_0', \overline{x}_0''$ zwei Punkte mit $x_0'<\overline{x}_0'<x_0$, $x_0<\overline{x}_0''<x_0''$, in denen $f(x)$ und $g(x)$ dieselben Werte haben. Dann gilt offenbar

$$g(\overline{x}_0')>f(x_0)-\varepsilon,\quad g(\overline{x}_0'')<f(x_0)+\varepsilon.$$

Daraus folgt, dass $g(x_0-0)=g(x_0+0)=f(x_0)$ ist, und wegen der Monotonie von $g(x)$ muss daher $f(x_0)=g(x_0)$ sein — womit alles bewiesen ist.

Da die Menge der Unstetigkeitspunkte einer monotonen Funktion abzählbar ist, ist die eben bewiesene Eigenschaft für ein Paar äquivalenter Funktionen charakteristisch, wenn alle betrachteten Funktionen in den Punkten x_1, x_2 einander gleich sind.

Wir fassen alle mit $f(x)$ in $\langle x_1, x_2\rangle$ äquivalenten Funktionen in eine Äquivalenzklasse C zusammen. Für jedes $f(x)$ aus C ist $f(x_1)=y_1$ und $f(x_2)=y_2$, wo y_1, y_2 für die Klasse C fest sind. — Es seien $f(x)$, $g(x)$ zwei Funktionen aus C. Dann gilt offenbar für $x_1<x<x_2$ $M(x)=f(x+0)=g(x+0)$, da wir beim Grenzübergang in $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x+\varepsilon)$ uns auf ε beschränken können, für die $x+\varepsilon$ zu S gehört. Wir setzen nun $M(x_1)=y_1$ und $M(x_2)=y_2$ und bezeichnen diese nur von der Klasse C abhängige Funktion $M(x)$ als die *Majorante* der Klasse C, da für jede Funktion $f(x)$ aus C gilt $(x_1<x<x_2)$:

$$f(x) \leqq f(x+\varepsilon),\ f(x) \leqq f(x+0) = M(x).$$

Wir behaupten, dass die offenbar *monoton wachsende Funktion* $M(x)$ *von rechts im offenen Intervall* (x_1, x_2) *stetig ist, der Klasse* C *angehört und die einzige in* (x_1, x_2) *von rechts stetige Funktion aus der Klasse* C *ist.* In der Tat gilt für ein $\varepsilon > 0: M(x+0) \leqq M\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right) \leqq f(x+\varepsilon)$, daher auch $M(x+0) \leqq f(x+0) = M(x)$, während andererseits aus der Monotonie von $M(x): M(x) \leqq M(x+0)$ folgt; daher ergibt sich $M(x) = M(x+0)$, d. h. die rechtsseitige Stetigkeit. Dass $M(x)$ zu C gehört, folgt daraus, dass $f(x)$ auf S stetig ist, also $f(x) = f(x+0) = M(x)$ gilt. Dass aber $M(x)$ die einzige in (x_1, x_2) rechtsstetige Funktion in C ist, folgt aus der Tatsache, dass für eine rechtsstetige Funktion $f(x)$ ja überall in (x_1, x_2) $f(x) = f(x+0)$ gilt, während für jede Funktion $f(x)$ aus C in (x_1, x_2) $f(x+0) = M(x)$ ist. —

Ähnlich definieren wir die *Minorante* $m(x)$ der Klasse C als den gemeinsamen Wert von $f(x-0)$ für alle Funktionen $f(x)$ aus C in (x_1, x_2) unter Festsetzung $m(x_1) = y_1$, $m(x_2) = y_2$ und beweisen, dass $m(x)$ zu C gehört, in (x_1, x_2) linksstetig ist und die einzige in (x_1, x_2) linksstetige Funktion von C ist. — (Wenn die Funktionen der Klasse C monoton abnehmen, gelten dieselben Resultate, wenn man nur mit $f(x+0)$ die Minorante $m(x)$ und mit $f(x-0)$ die Majorante $M(x)$ von C bildet, sodass nunmehr $m(x)$ rechtsstetig und $M(x)$ linksstetig ist.)

Nunmehr gilt für jede Funktion $f(x)$ aus C

$$m(x) \leqq f(x) \leqq M(x).$$

Umgekehrt ist jede Funktion $f(x)$ in $\langle x_1, x_2\rangle$, für die $m(x) \leqq f(x) \leqq M(x)$ gilt, eine Funktion aus C, da sie ja mit $m(x)$ und $M(x)$ überall übereinstimmt, wo diese beiden Funktionen zusammenfallen — und dies ist nur auf einer abzählbaren Punktmenge nicht der Fall — und darüber hinaus monoton wachsend ist; denn aus $f(x') > f(x'')$ für $x' < x''$ würde folgen $m(x'') < M(x')$, während ja offenbar

$$m(x'') \geqq m(x''-0) \geqq m\left(\frac{x'+x''}{2}\right) \geqq M(x'+0) \geqq M(x')$$

ist. Hat man also zwei gleichsinnig monotone Funktionen $m(x)$, $M(x)$ mit $m(x_1) = M(x_1)$, $m(x_2) = M(x_2)$, die in $\langle x_1, x_2\rangle$ bis auf abzählbar viele Punkte zusammenfallen, und von denen die eine in (x_1, x_2) rechtsseitig, die andere linksseitig stetig ist, so kann die zu ihnen gehörende Klasse von monotonen Funktionen geradezu durch $m(x) \leqq f(x) \leqq M(x)$ definiert werden.

35. Es sei $f(x)$ eine im Intervall $\langle x_1, x_2 \rangle$ definierte monoton wachsende Funktion. Es sei $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Dann nennen wir eine in $\langle y_1, y_2 \rangle$ definierte Funktion $\varphi(y)$ eine *Umkehrfunktion* von $y(x)$, wenn für jedes y aus $\langle y_1, y_2 \rangle$

$$x_1 \leqq \varphi(y) \leqq x_2$$

(35, 1)
$$f(\varphi(y) - 0) \leqq y \leqq f(\varphi(y) + 0) \qquad (y_1 < y < y_2)$$

$$\varphi(y_1) = x_1, \ \varphi(y_2) = x_2$$

gilt. Wir beweisen nun die folgenden Eigenschaften der Umkehrfunktionen von $f(x)$:

1) *Eine Umkehrfunktion $\varphi(y)$ von $f(x)$ ist auch monoton wachsend.* Denn wäre für $y_1 < y' < y'' < y_2 \quad \varphi(y') > \varphi(y'')$, so würde daraus wegen der Monotonie von $f(x)$ folgen

$$y'' < f(\varphi(y'') + 0) \leqq f(\varphi(y') - 0) \leqq y',$$

entgegen der Annahme, und für $y' = y_1$ oder $y'' = y_2$ folgt $\varphi(y') \leqq \varphi(y'')$ aus (35, 1).

2) *Zwei in $\langle x_1, x_2 \rangle$ äquivalente Funktionen $f(x), g(x)$ haben dieselben Umkehrfunktionen.* Denn die zweite Definitionsrelation von $\varphi(x)$ besagt ja nur, dass

$$m(\varphi(y)) \leqq y \leqq M(\varphi(y))$$

ist, und $m(x), M(x)$ sind der ganzen Klasse C der Funktionen $f(x), g(x)$ gemeinsam.

3) Es sei für $y_1 < y < y_2 \quad \mu(y)$ die untere Grenze der x aus $\langle x_1, x_2 \rangle$, für die $M(x) \geqq y$ ist und $\mu(y_1) = x_1, \ \mu(y_2) = x_2$. Wegen $M(x_1) = y_1 < y, \ M(x_2) = y_2 > y$ ist $\mu(y)$ für alle y aus $\langle y_1, y_2 \rangle$ definiert und genügt der Ungleichung

$$x_1 \leqq \mu(y) \leqq x_2.$$

Wir behaupten, dass $\mu(y)$ auch die Ungleichung

(35, 2)
$$M(\mu(y) - 0) \leqq y \leqq M(\mu(y)), \qquad (y_1 < y < y_2)$$

befriedigt und daher eine Umkehrung von $M(x)$ und also auch aller Funktionen der ganzen Klasse C darstellt. Da offenbar wegen der Rechtsstetigkeit von $M(x)$ auch $M(\mu(y)) \geqq y$ ist, ist die Ungleichung rechterseits in (35, 2) befriedigt. Wäre aber $M(\mu(y)-0)>y$, so müsste für ein $\varepsilon>0$ auch $M(\mu(y)-\varepsilon)>y$ sein, entgegen der Bestimmungsvorschrift von $\mu(y)$.

Aus der Definition von $\mu(y)$ folgt, dass für jede andere Umkehrfunktion $\varphi(y)$ zur Klasse C $\varphi(y)\geqq\mu(y)$ gilt, sodass $\mu(y)$ die *kleinste* Umkehrfunktion zur Klasse C ist. Wir zeigen nun, dass $\mu(y)$ *in* (y_1, y_2) *linksstetig ist*, d. h. dass $\mu(y-0)=\mu(y)$ ist. Wegen der Monotonie von $\mu(y)$ genügt es, $\mu(y-0)\geqq\mu(y)$ zu beweisen, und dies wird aus $M(\mu(y-0))\geqq y$ folgen. Denn für jedes $\varepsilon>0$ ist $\mu(y-0)\geqq\mu(y-\varepsilon)$, daher $M(\mu(y-0))\geqq M(\mu(y-\varepsilon))\geqq y-\varepsilon$, daher gilt für jedes $\varepsilon>0$ $M(\mu(y-0))\geqq y-\varepsilon$, folglich muss wegen der Willkür von ε auch $M(\mu(y-0))\geqq y$ gelten, w. z. b. w.

4) Genau ebenso zeigen wir, dass die obere Grenze der x, für die $m(x)\leqq y$ für $y_1<y<y_2$ ist, eine Umkehrfunktion $\boldsymbol{M}(y)$ zur Klasse C ist, wenn $\boldsymbol{M}(y_1)=x_1$, $\boldsymbol{M}(y_2)=x_2$ festgesetzt wird, — und zwar die *grösste* Umkehrfunktion unter allen, sodass für jede andere $\varphi(y)$ gilt $\varphi(y)\leqq\boldsymbol{M}(y)$. $\boldsymbol{M}(y)$ ist rechtsseitig stetig. Und es gilt analog wie oben

$$m(\boldsymbol{M}(y))\leqq y.$$

Nunmehr ist aber auch jede Funktion $\varphi(y)$ mit

$$\mu(y)\leqq\varphi(y)\leqq\boldsymbol{M}(y)$$

eine Umkehrfunktion zur Klasse C. Denn es gilt

$$m(\varphi(y))\leqq m(\boldsymbol{M}(y))\leqq y\leqq M(\mu(y))\leqq M(\varphi(y)).$$

5) Können wir also beweisen, dass $\mu(y)$ und $\boldsymbol{M}(y)$ äquivalent sind, so folgt, dass *die Umkehrfunktionen zu C wieder eine Klasse monotoner Funktionen bilden,* deren Majorante und Minorante durch $\boldsymbol{M}(y)$ bzw. $\mu(y)$ gegeben sind. Die Äquivalenz von $\mu(y)$ und $\boldsymbol{M}(y)$ wird aber sofort bewiesen sein, wenn wir beweisen, dass für alle Stellen y, an denen $\boldsymbol{M}(y)>\mu(y)$ ist, die Intervalle $(\mu(y), \boldsymbol{M}(y))$ nicht übereinander greifen, d. h., dass für $y_1<y'<y''<y_2$ nicht $\boldsymbol{M}(y')>\mu(y'')$ sein kann. Aus $\boldsymbol{M}(y')>\mu(y'')$ würde aber folgen

$$y''\leqq M(\mu(y''))\leqq M(\boldsymbol{M}(y')-0)\leqq y'.$$

6) Wir beweisen nun, dass die Beziehung zwischen der Klasse C und der Klasse C' der Umkehrfunktionen zu C eine umkehrbare ist und jede Funktion aus C Umkehrfunktion jeder Funktion aus C' ist. Es genügt zu beweisen, dass eine Umkehrung einer Funktion von C' zu C gehört.

Es sei nun $M(x)$ und $m(x)$ die Majorante bzw. Minorante der Klasse C. Eine beliebige Funktion aus C' sei $\varphi(y)$, so dass dann allgemein gilt

$$M(\varphi(y)) \geqq y \geqq m(\varphi(y)). \tag{35, 3}$$

Es sei nun $y^* = \psi(x)$ eine Umkehrung von $\varphi(y)$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < y_2 - y^*$, $\varepsilon < y^* - y_1$

$$\varphi(y^* + \varepsilon) \geqq x \geqq \varphi(y^* - \varepsilon) \tag{35, 4}$$

ist. Es genügt zu beweisen, dass

$$M(x) \geqq y^* \geqq m(x)$$

ist. Es sei nun etwa $y^* > M(x)$, dann gilt für ein $\varepsilon > 0$ $y^* - \varepsilon > M(x) + \varepsilon$ und daher nach (35, 4)

$$x \geqq \varphi(y^* - \varepsilon) \geqq \varphi(M(x) + \varepsilon).$$

Nach (35, 3) und wegen der Monotonie von $M(x)$ folgt aber dann

$$M(x) \geqq M(\varphi(y^* - \varepsilon)) \geqq M(\varphi(M(x) + \varepsilon)) \geqq M(x) + \varepsilon,$$

so dass also $y^* \leqq M(x)$ sein muss. Genau ebenso wird bewiesen, dass $y^* \geqq m(x)$ ist.

Ist aber $f(x)$ monoton *abnehmend*, so ergibt sich aus jeder Umkehrung $\varphi(y)$ von $-f(x)$ eine Umkehrung $\varphi(-y)$ von $f(x)$ und umgekehrt. So übertragen sich mutatis mutandis alle obigen Resultate auf monoton abnehmende Funktionen.

Hat man also ein Stieltjessches Integral $\int\limits_{y=y_1}^{y=y_2} f(y)\,dx(y)$ mit einer monotonen Funktion $x(y)$, deren eine Umkehrung mit $y(x)$ bezeichnet werden mag, so gilt

$$\int\limits_{y=y_1}^{y=y_2} f(y)\,dx(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(y(x))\,dx, \tag{35, 5}$$

wie aus (11. 3) sofort folgt, wenn man beachtet, dass $x(y)$ eine Umkehrung von $y(x)$ ist.