

# SCHAUBILDER FÜR DIE ANNÄHERUNG DURCH KUGEL- FUNKTIONEN.

VON

I. SEYNSCHE und A. WALTHER

in WUPPERTAL-BARMEN in DARMSTADT.

Zur Annäherung einer beliebigen Funktion  $y = f(x)$  durch Polynome sind die bekanntesten Ansätze:

1.) das aus den Anfangsgliedern der Taylorschen Reihe von  $f(x)$  für einen Bezugspunkt  $a$  bestehende, für  $x = a$  mit  $f(x)$  im Funktionswerte und einer Anzahl aufeinanderfolgender Ableitungen übereinstimmende »Schmiegunbspolynom»,

2.) das »Interpolationspolynom», welches an gewissen Interpolationsstellen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  denselben Wert wie  $f(x)$  annimmt, in Newtonscher oder Waring-Lagrangescher Gestalt geschrieben werden kann<sup>1</sup> und beim Grenzübergange  $x_0, x_1, \dots, x_n \rightarrow a$  in das Schmiegunbspolynom übergeht.

Das Wesen der beiden Darstellungen tritt am klarsten in Schaubildern mit den entsprechenden »Schmiegunsparabeln» und »Interpolationsparabeln» zutage, wie sie namentlich durch Felix Klein immer wieder hervorgehoben<sup>2</sup> und seitdem von vielen Lehrbüchern übernommen worden sind.

Demgegenüber ist eine dritte Art der Annäherung trotz ihren Vorzügen bisher weniger verwandt<sup>3</sup> und insbesondere noch kaum durch Schaubilder ver-

---

<sup>1</sup> Vgl. etwa A. WALTHER, Differenzenrechnung, Kap. XXIII in Pascals Repertorium der höheren Mathematik I, 2. Aufl. Leipzig u. Berlin (B. G. Teubner) 1929, S. 1189—1249, insb. § 2, S. 1194—1198.

<sup>2</sup> Z. B. in der Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, 1. Band, 3. Aufl. Berlin (J. Springer) 1924, S. 241—253.

<sup>3</sup> Eine neuere Anwendung bei A. RIPPEL u. R. MEYER, Ertragsgesetz gegen Wirkungsgesetz, Ztschr. f. Pflanzenernährung, Düngung u. Bodenkunde A 14 (1930), Heft 1/2, S. 1—24, insb. S. 10—12.

deutlich worden, die Annäherung durch Kugelfunktionen oder Legendresche Polynome. Wir möchten hier einige solche Bilder veröffentlichen.

Die Problemstellung ist folgende<sup>1</sup>: Man will die Funktion  $f(x)$  »im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate« für ein vorgegebenes Intervall von  $x = a$  bis  $x = b$  durch ein Polynom  $n$ ten Grades  $\varphi(x)$  »möglichst gut« annähern, d. h. so, dass der Unterschied oder Fehler  $f(x) - \varphi(x)$  für das ganze Intervall »im Mittel« recht klein wird. Um vom Vorzeichen des Fehlers  $f(x) - \varphi(x)$  freizuwerden, betrachtet man das Fehlerquadrat  $(f(x) - \varphi(x))^2$  und verlangt

$$\text{mittleres Fehlerquadrat } \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx = \min.$$

Um diese Forderung zu erfüllen, denken wir uns der Einfachheit halber  $a = -1$ ,  $b = +1$  und setzen zweckmässig  $\varphi(x)$  nicht in der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

nach Potenzen von  $x$  geordnet an, sondern in der Form

$$\varphi(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \dots + c_n P_n(x),$$

wobei

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8},$$

$$P_5(x) = \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x,$$

$$\dots$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{d x^n}$$

<sup>1</sup> Vgl. C. RUNGE u. H. KÖNIG, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Berlin (J. Springer) 1924, § 64, S. 201—208.

selbst Polynome nullten, ersten, zweiten, . . . ,  $n$ ten Grades sind, eben die Legendreschen Polynome oder Kugelfunktionen. Man erzielt dadurch, vor allem zwei Vorteile:

1.) die Entwicklungskoeffizienten  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  bestimmen sich durch die einfache Formel

$$c_\nu = \frac{2\nu + 1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_\nu(x) dx \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n),$$

welche aus den »Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen«

$$\int_{-1}^{+1} P_\mu(x) P_\nu(x) dx = 0 \quad (\mu \neq \nu),$$

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu^2(x) dx = \frac{2}{2\nu + 1}$$

folgt und auch für solche Funktionen  $f(x)$  bequem anwendbar ist, die nicht formelmässig, sondern nur zeichnerisch oder numerisch gegeben sind (zeichnerische oder numerische Integration);

2.) die bereits gefundenen  $c_\nu$  bleiben unverändert, wenn man durch Hinzunahme neuer Glieder die Annäherung weiter treiben oder durch Herauslassen einzelner Glieder Rechenarbeit sparen will; mit anderen Worten: jedes  $c_\nu$  ist unabhängig von allen übrigen.

Nachträglich kann  $\varphi(x)$  durch Einsetzen der Potenzausdrücke für die  $P_\nu(x)$  leicht auch nach Potenzen von  $x$  geordnet werden.

Das mittlere Fehlerquadrat für die Annäherung durch Kugelfunktionen bis zur  $n$ ten Ordnung, d. h. das kleinste bei Annäherung durch ein Polynom  $n$ ten Grades im Intervall  $-1 \dots +1$  überhaupt erreichbare mittlere Fehlerquadrat beträgt

$$m^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f^2(x) dx - \sum_{\nu=0}^n \frac{c_\nu^2}{2\nu + 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f^2(x) dx - c_0^2 - \frac{c_1^2}{3} - \frac{c_2^2}{5} - \dots - \frac{c_n^2}{2n + 1};$$

es gestattet, die Güte der Annäherung zu beurteilen.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Vgl. das Beispiel  $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$  bei C. RUNGE u. H. KÖNIG, a. a. O., S. 207—208.

Beim Grenzübergange  $n \rightarrow \infty$  entsteht eine unendliche Reihe nach Kugelfunktionen. Man erwartet, dass sie  $f(x)$  nicht nur angenähert, sondern genau darstellt.<sup>1</sup> Für uns sind folgende Tatsachen von Bedeutung:

a) bei analytischem  $f(z)$  mit  $z = x + iy$  ist das Konvergenzgebiet der Entwicklung nach Kugelfunktionen das Innere der kleinsten Ellipse mit den Brennpunkten  $-1$  und  $+1$ , die durch einen singulären Punkt von  $f(z)$  geht,

b) bei stückweise stetigem  $f(x)$  mit stückweise stetiger Ableitung konvergiert die unendliche Reihe für  $-1 < x < +1$  an den Stetigkeitsstellen nach  $f(x)$ , an den Sprungstellen nach dem arithmetischen Mittel  $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$  der Grenzwerte von links und von rechts; die Konvergenz ist gleichmässig in jedem abgeschlossenen festen, von Sprungstellen freien Intervall.

### Beispiele.

$$1.) \quad \underline{f(x) = e^x.}$$

Durch Teilintegration rechnet man leicht aus

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} e^x dx &= e - e^{-1}, \\ \int_{-1}^{+1} x e^x dx &= 2 e^{-1}, \\ \int_{-1}^{+1} x^2 e^x dx &= e - 5 e^{-1}, \\ \int_{-1}^{+1} x^3 e^x dx &= -2 e + 16 e^{-1}, \\ \int_{-1}^{+1} x^4 e^x dx &= 9 e - 65 e^{-1}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Vgl. E. HEINE, Handbuch der Kugelfunktionen, 1. Band, 2. Aufl. Berlin (G. Reimer) 1878, S. 199—200, S. 441—442 und als neuere Arbeiten A. HAAR, Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen, Math. Ann. 78 (1917), S. 121—136; G. SZEGÖ, Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems, Math. Ann. 82 (1921), S. 188—212, Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems, Math. Ztschr. 12 (1922), S. 61—94.

Passendes Zusammenfügen liefert

$$\int_{-1}^{+1} P_0(x) e^x dx = e - e^{-1},$$

$$\int_{-1}^{+1} P_1(x) e^x dx = 2 e^{-1},$$

$$\int_{-1}^{+1} P_2(x) e^x dx = e - 7 e^{-1},$$

$$\int_{-1}^{+1} P_3(x) e^x dx = -5 e + 37 e^{-1},$$

$$\int_{-1}^{+1} P_4(x) e^x dx = 36 e - 266 e^{-1}.$$

Bei Berücksichtigung von Kugelfunktionen bis zur vierten Ordnung gilt also angenähert ( $\approx$  bedeutet »angenähert gleich«)

$$\begin{aligned} e^x &\approx c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + c_3 P_3(x) + c_4 P_4(x) \\ &\approx \frac{1}{2}(e - e^{-1}) + 3 e^{-1} x + \frac{5}{2}(e - 7 e^{-1}) \left( \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + \frac{7}{2}(-5 e + 37 e^{-1}) \left( \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right) + \frac{9}{2}(36 e - 266 e^{-1}) \left( \frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8} \right) \\ &\approx 1,17520\ 119 + 1,10363\ 832 x + 0,35786\ 435 \left( \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + 0,07045\ 563 \left( \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right) + 0,00996\ 512 \left( \frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8} \right). \end{aligned}$$

Durch Umordnen nach Potenzen von  $x$  erhalten wir als beste Näherung von  $e^x$  durch ein Polynom vierten Grades für das ganze Intervall  $-1 \dots +1$

$$e^x \approx 1,0000\ 059 + 0,9979\ 549 x + 0,4994\ 273 x^2 + 0,1761\ 391 x^3 + 0,0435\ 974 x^4,$$

während die Anfangsglieder der Taylorschen Reihe

$$e^x \approx 1 + x + 0,5x^2 + 0,1666\ 667x^3 + 0,0416\ 667x^4$$

die grösste Anschmiegung an der einzelnen Stelle 0 geben.

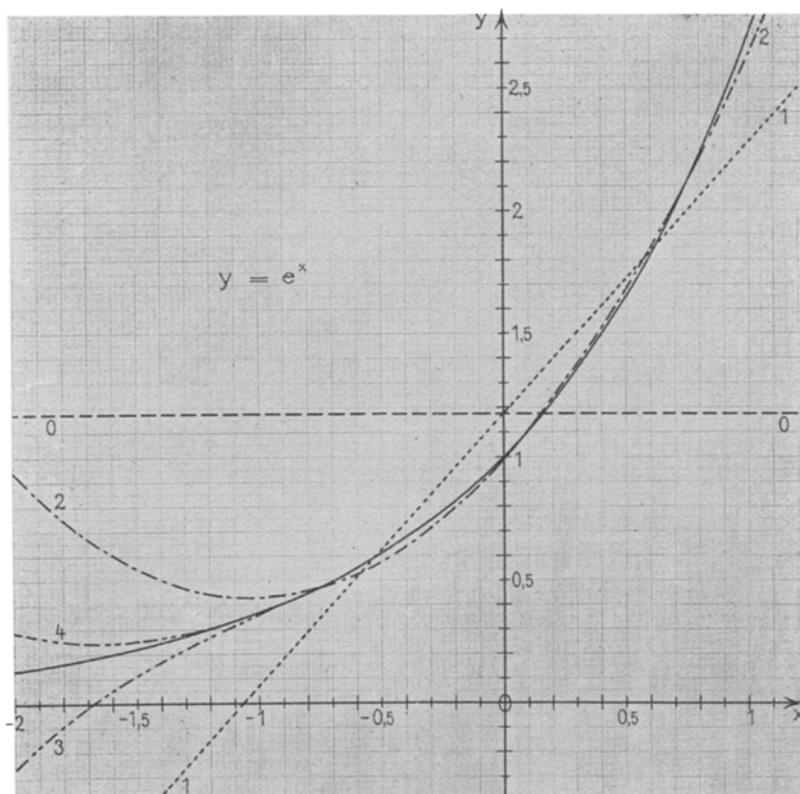


Bild 1.

Durch numerische Rechnung wurden für die einzelnen Zehntel im Intervall von  $-2$  bis  $+1$  die Zahlenwerte der Näherungen 0, 1, 2, 3, 4, die entstehen, wenn man mit  $P_0(x)$ ,  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ ,  $P_3(x)$ ,  $P_4(x)$  abbricht, auf 7 Dezimalstellen ermittelt und die abgekürzten Ergebnisse in das Bild 1 eingetragen.<sup>1</sup> Man sieht sehr gut, wie die strichpunktierte zweite Näherung die ausgezogene Exponentialkurve  $y = e^x$  mehrmals durchschneidet. Die dritte und vierte Näherung sind zwischen  $-1$  und  $+1$  mit dem Auge schon nicht mehr von  $y = e^x$  zu unterscheiden; für  $x = 0$  sind sie z. B. nur um etwa  $4 \cdot 10^{-3}$  zu klein bzw.  $6 \cdot 10^{-6}$

<sup>1</sup> In den Originalen aller Abbildungen war die Einheit auf der  $x$ - und  $y$ -Achse 10 cm lang.

zu gross. Aber auch ausserhalb des Intervalls  $-1 \dots +1$  schliessen sich die Näherungskurven der gewünschten Kurve immer besser an. Das steht im Einklange damit, dass die unendliche Reihe nach Kugelfunktionen für  $e^x$  durchweg, für alle  $x$  nach  $e^x$  konvergiert.

$$2.) \quad \underline{f(x) = \sin x.}$$

Wir unterscheiden die Fälle, dass man eine volle oder eine halbe Welle, d. h.  $\sin x$  im Intervall  $-\pi \dots +\pi$  oder im Intervall  $-\frac{\pi}{2} \dots +\frac{\pi}{2}$  darzustellen wünscht. Nimmt man das Intervall einheitlich von  $-1$  bis  $+1$ , so handelt es sich also um Annäherung von  $\sin \pi x$  oder von  $\sin \frac{\pi}{2} x$ . Da  $\int_{-1}^{+1} x^v \sin \pi x dx = 0$  ist für gerade  $v$ , hingegen

$$\int_{-1}^{+1} x^v \sin \pi x dx = 2 \int_0^1 x^v \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi^{v+1}} \int_0^\pi t^v \sin t dt \quad \text{für ungerade } v$$

und

$$\int_0^\pi t \sin t dt = \pi, \quad \int_0^\pi t^3 \sin t dt = \pi^3 - 6\pi, \quad \int_0^\pi t^5 \sin t dt = \pi^5 - 20\pi^3 + 120\pi,$$

allgemein

$$\int_0^\pi t^{2m+1} \sin t dt = \sum_{\mu=0}^m (-1)^\mu \binom{2m+1}{2\mu} (2\mu)! \pi^{2m+1-2\mu},$$

so gewinnen wir

$$\int_{-1}^{+1} P_0(x) \sin \pi x dx = \int_{-1}^{+1} P_2(x) \sin \pi x dx = \int_{-1}^{+1} P_4(x) \sin \pi x dx = \dots = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} P_1(x) \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi},$$

$$\int_{-1}^{+1} P_3(x) \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi} - \frac{30}{\pi^3},$$

$$\int_{-1}^{+1} P_5(x) \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi} - \frac{210}{\pi^3} + \frac{1890}{\pi^5}$$

und damit als beste Darstellung von  $\sin \pi x$  im Intervall  $-1 \dots +1$

$$\sin \pi x \approx c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + c_3 P_3(x) + c_4 P_4(x) + c_5 P_5(x)$$

$$\begin{aligned} &\approx * + \frac{3}{\pi} x + * - \left( \frac{105}{\pi^3} - \frac{7}{\pi} \right) \left( \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right) + * \\ &\quad + \left( \frac{10395}{\pi^5} - \frac{1155}{\pi^3} + \frac{11}{\pi} \right) \left( \frac{63}{8} x^5 - \frac{35}{4} x^3 + \frac{15}{8} x \right) \\ &\approx * + 0,9549 297 x + * - 1,1582 419 \left( \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right) + * \\ &\quad + 0,2192 896 \left( \frac{63}{8} x^5 - \frac{35}{4} x^3 + \frac{15}{8} x \right). \end{aligned}$$

Ganz ähnlich ergeben sich an Hand von  $\int_{-1}^{+1} x^v \sin \frac{\pi}{2} x dx = 0$  für gerade  $v$ ,

$$\int_{-1}^{+1} x^v \sin \frac{\pi}{2} x dx = 2 \int_0^{+1} x^v \sin \frac{\pi}{2} x dx = 2 \left( \frac{2}{\pi} \right)^{v+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^v \sin t dt \text{ für ungerade } v$$

und von

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = 1, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 \sin t dt = 3 \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - 6, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^5 \sin t dt = 5 \left( \frac{\pi}{2} \right)^4 - 60 \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 + 120,$$

allgemein

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{2m+1} \sin t dt = \sum_{\mu=0}^m (-1)^\mu \binom{2m+1}{2\mu+1} (2\mu+1)! \left( \frac{\pi}{2} \right)^{2m-2\mu}$$

die Formeln

$$\int_{-1}^{+1} P_0(x) \sin \frac{\pi}{2} x dx = \int_{-1}^{+1} P_2(x) \sin \frac{\pi}{2} x dx = \int_{-1}^{+1} P_4(x) \sin \frac{\pi}{2} x dx = \dots = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} P_1(x) \sin \frac{\pi}{2} x dx = \frac{8}{\pi^2},$$

$$\int_{-1}^{+1} P_3(x) \sin \frac{\pi}{2} x dx = \frac{48}{\pi^2} - \frac{480}{\pi^4},$$

$$\int_{-1}^{+1} P_5(x) \sin \frac{\pi}{2} x dx = \frac{120}{\pi^2} - \frac{840 \cdot 16}{\pi^4} + \frac{1920 \cdot 63}{\pi^6}.$$

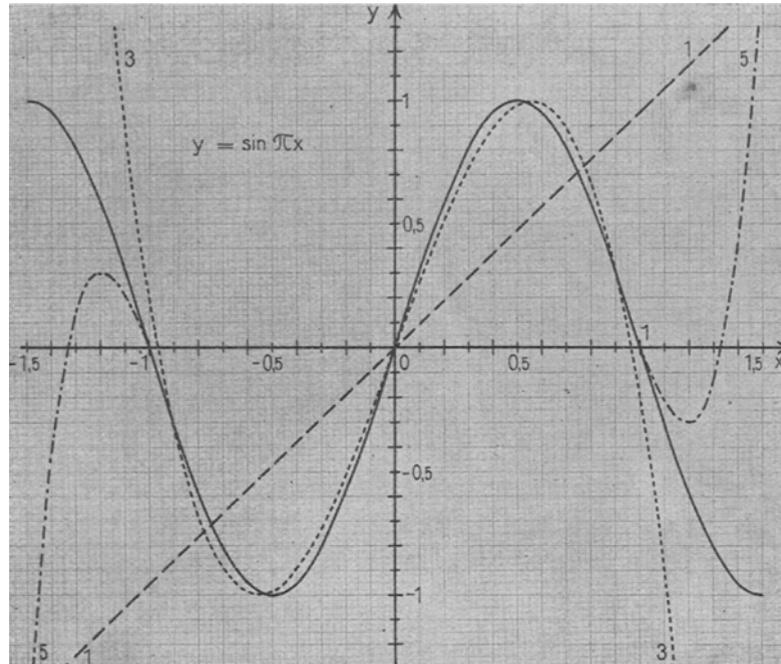


Bild 2 a.

Die beste Annäherung von  $\sin \frac{\pi}{2} x$  im Intervall  $-1 \dots +1$  lautet daher

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2} x &\approx c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + c_3 P_3(x) + c_4 P_4(x) + c_5 P_5(x) \\ &\approx * + \frac{12}{\pi^2} x + * - \left( \frac{1680}{\pi^4} - \frac{168}{\pi^2} \right) \left( \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right) + * \\ &\quad + 11 \left( \frac{960 \cdot 63}{\pi^6} - \frac{420 \cdot 16}{\pi^4} + \frac{60}{\pi^2} \right) \left( \frac{63}{8} x^5 - \frac{35}{4} x^3 + \frac{15}{8} x \right) \\ &\approx * + 1,2158\ 542 x + * - 0,2248\ 913 \left( \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right) + * \\ &\quad + 0,0091\ 976 \left( \frac{63}{8} x^5 - \frac{35}{4} x^3 + \frac{15}{8} x \right). \end{aligned}$$

In Bild 2 a und 2 b sind auf Grund der numerischen Rechnung anschaulich die ersten, dritten und fünften Näherungen zu sehen, die dem Abbrechen mit  $P_1(x)$ ,  $P_3(x)$ ,  $P_5(x)$  entsprechen. Es ist interessant, zu verfolgen, wie sich die

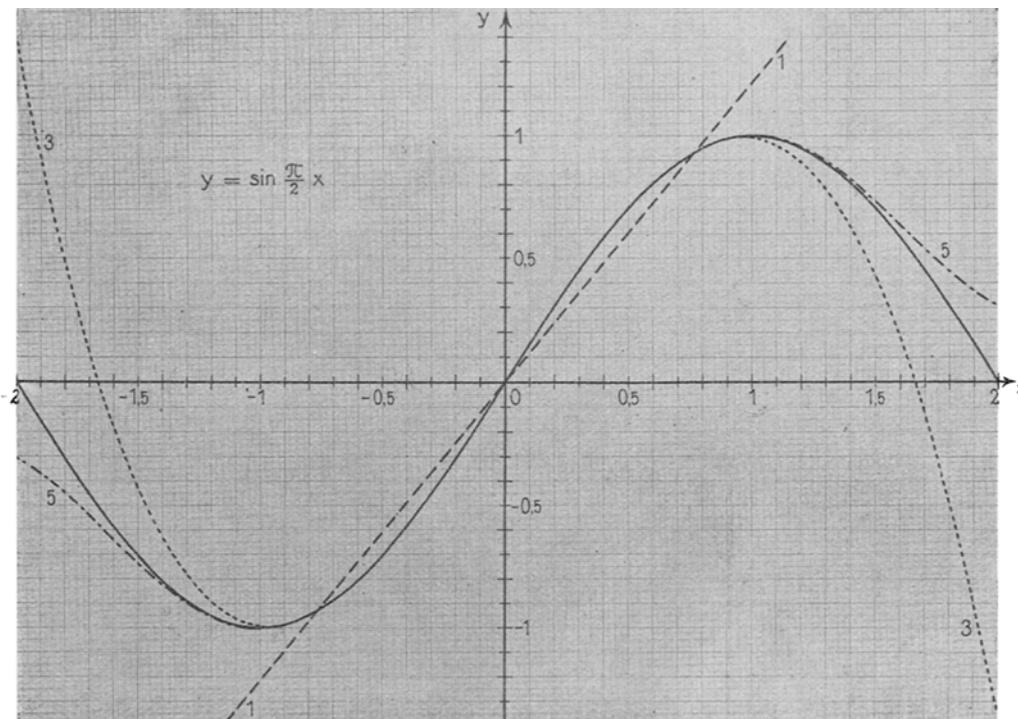


Bild 2 b.

Näherungspolynome bemühen, dem Auf- und Abschwingen des Sinus gerecht zu werden. Im Intervall  $-1 \dots +1$  fallen bei  $\sin \pi x$  die fünfte und bei  $\sin \frac{\pi}{2} x$  die dritte und fünfte Näherung für das Auge schon völlig mit den Sinuslinien zusammen. Der gute Anschluss der fünften Näherung auch über das Intervall  $-1 \dots +1$  hinaus deutet darauf hin, dass die unendlichen Reihen nach Kugelfunktionen für alle  $x$  nach  $\sin \pi x$  bzw.  $\sin \frac{\pi}{2} x$  konvergieren.

3.)  $f(x) = \sqrt{1+x}$ .

Diese Funktion bietet gegenüber den bisherigen Beispielen das Neue, dass für  $x = -1$  eine Singularität auftritt und Konvergenz der unendlichen Reihe nach Kugelfunktionen nur für  $|x| < 1$  erwartet werden kann. Aus der Integralformel

$$\int_{-1}^{+1} x^\nu \sqrt{1+x} dx = \frac{2^{\frac{2\nu+5}{2}}}{2\nu+3} - \frac{\binom{\nu}{1} 2^{\frac{2\nu+3}{2}}}{2\nu+1} + \frac{\binom{\nu}{2} 2^{\frac{2\nu+1}{2}}}{2\nu-1} - \dots + (-1)^\nu \frac{\binom{\nu}{\nu} 2^{\frac{5}{2}}}{3}$$

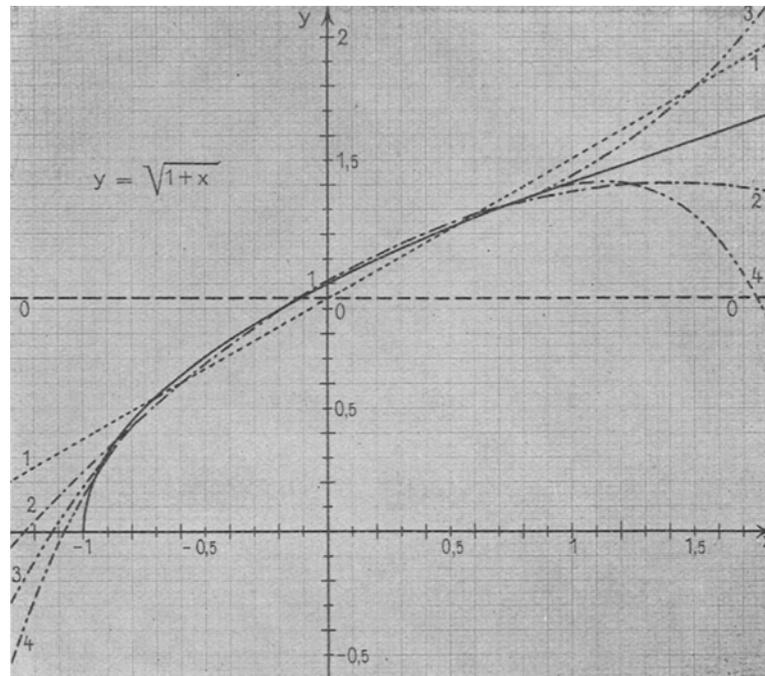


Bild 3.

folgt leicht

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1+x} &\approx c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + c_3 P_3(x) + c_4 P_4(x) \\
 &\approx \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{5}x - \frac{2\sqrt{2}}{21} \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{2\sqrt{2}}{45} \left( \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right) \\
 &\quad - \frac{2\sqrt{2}}{77} \left( \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \right) \\
 &\approx 0,9428\ 090 + 0,5656\ 854x - 0,1346\ 870 \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) \\
 &\quad + 0,0628\ 539 \left( \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right) - 0,0367\ 328 \left( \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \right).
 \end{aligned}$$

Bild 3 zeigt sehr deutlich, wie die Näherungspolynome die senkrechte Tangente in  $x = -1$  immer besser wiedergeben, dafür aber auch links von  $-1$  immer steiler abstürzen und rechts von  $+1$  immer jächer von der Kurve  $\sqrt{1+x}$  wegbiegen.

#### 4.) $f(x) = \log(1+x)$ .

Hier liegen die Verhältnisse ganz ähnlich, nur dass statt eines Endpunktes in  $x = -1$  ein Unendlichkeitspunkt vorhanden ist. Die beste Näherungsfunktion für das Intervall  $-1 \dots +1$  heisst gemäss einfach durchführbaren Integrationen

$$\begin{aligned}
 \log(1+x) &\approx c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + c_3 P_3(x) + c_4 P_4(x) \\
 &\approx \log 2 - 1 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{6} \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{7}{12} \left( \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right) \\
 &\quad - \frac{9}{20} \left( \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \right)
 \end{aligned}$$

mit  $\log 2 - 1 \approx -0,3068\ 528$ .

Der Augenschein lehrt, dass auch die Annäherung vierten Grades noch recht schlecht ist.<sup>1</sup> Man vergleiche hierzu wie zu den übrigen Beispielen die Bilder der Schmiegungsparabeln in Kleins Elementarmathematik.

<sup>1</sup> Der mittlere Fehler  $m$  beträgt knapp  $0,25$  gegen beispielweise  $\frac{1}{99} \approx 0,01$  bei  $\sqrt{1+x}$ .

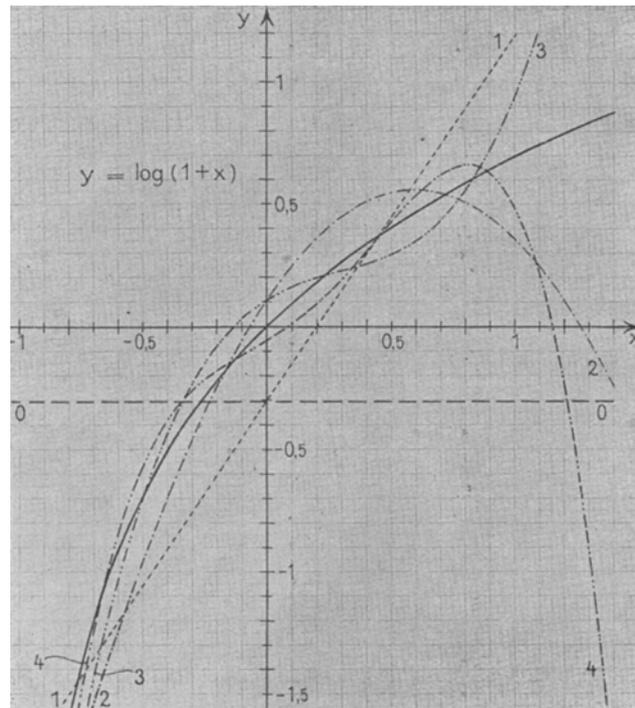


Bild 4.

5.)  $f(x) = \arctan x$ .

Die erforderlichen Integrale haben die Werte

$$\int_{-1}^{+1} \arctan x \, dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} x^2 \arctan x \, dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} x^4 \arctan x \, dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} x \arctan x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$\int_{-1}^{+1} x^3 \arctan x \, dx = \frac{1}{3},$$

$$\int_{-1}^{+1} x^5 \arctan x \, dx = \frac{\pi}{6} - \frac{13}{45},$$

wonach

$$\int_{-1}^{+1} P_0(x) \arctan x dx = \int_{-1}^{+1} P_2(x) \arctan x dx = \int_{-1}^{+1} P_4(x) \arctan x dx = \dots = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} P_1(x) \arctan x dx = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$\int_{-1}^{+1} P_3(x) \arctan x dx = \frac{7}{3} - \frac{3\pi}{4},$$

$$\int_{-1}^{+1} P_5(x) \arctan x dx = \frac{9\pi}{4} - \frac{106}{15}$$

und

$$\begin{aligned} \arctan x &\approx c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + c_3 P_3(x) + c_4 P_4(x) \\ &= * + \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2}\right)x + * - \left(\frac{21\pi}{8} - \frac{49}{6}\right)\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) + * \\ &\quad + \left(\frac{99\pi}{8} - \frac{583}{15}\right)\left(\frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x\right) \\ &\approx * + 0,8561\ 945 x + * - 0,0800\ 140 \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) + * \\ &\quad + 0,0105\ 424 \left(\frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x\right). \end{aligned}$$

Bild 5 lässt klar die zunächst überraschende Tatsache erkennen, dass Annäherung nicht nur im Intervall  $-1 \dots +1$  stattfindet, und zwar vorzüglich, sondern auch noch ein Stück darüber hinaus, aber sicher nicht überall, weil die Näherungskurven schliesslich doch sehr entschieden von  $\arctan x$  wegführen. In der Tat konvergiert im Komplexen die unendliche Reihe für  $\arctan x$  nach Kugelfunktionen innerhalb der Ellipse mit den Brennpunkten  $\pm 1$  durch die beiden dem Nullpunkte nächsten singulären Punkte  $\pm i$  von  $\arctan x$ . Diese Ellipse hat die grosse Halbachse  $\sqrt{2}$ , sodass im Reellen die Entwicklung für

$|x| < \sqrt{2} \approx 1,4142$  konvergent ist und  $\arctan x$  nicht nur zwischen  $-1$  und  $+1$ , sondern sogar zwischen  $-\sqrt{2}$  und  $+\sqrt{2}$  durch die Näherungspolynome für das Intervall  $-1 \dots +1$  immer genauer dargestellt wird.

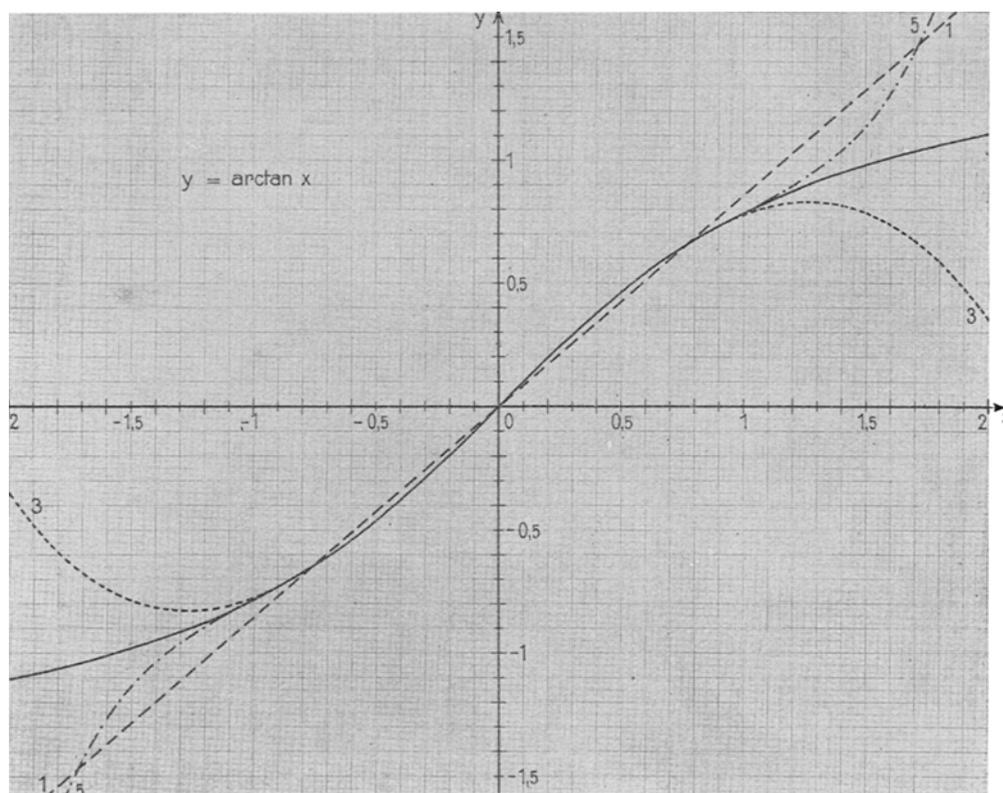


Bild 5.

$$6.) \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -1 < x < 0, \\ +1 & \text{für } 0 < x < +1. \end{cases} \quad \underline{\text{Wilbraham-Gibbssche Erscheinung.}}$$

Von den Fourierschen Reihen her ist die Wilbraham-Gibbssche Erscheinung<sup>1</sup> bei der Darstellung von Funktionen mit Sprüngen wohlbekannt. Um sie auch

<sup>1</sup> H. WILBRAHAM, On a certain periodic function, Cambridge and Dublin math. J. 3 (1848), S. 198—201; J. W. GIBBS, Fourier's series, Nature 59 (1898/99), S. 200, S. 606. Vgl. auch die sehr gute Erläuterung bei M. BÔCHER, Introduction to the theory of Fourier's series, Annals of math. (2) 7 (1906), S. 81—152, insb. S. 123—132 oder C. RUNGE, Theorie und Praxis der Reihen, Leipzig (J. G. Göschen) 1904, S. 170—182 oder L. TONELLI, Serie trigonometriche, Bologna (N. Zanichelli) 1928, S. 367—373.

bei der Annäherung durch Kugelfunktionen<sup>1</sup> sinnfällig aufzeigen zu können, wählen wir die aufgeschriebene unstetige Funktion, welche in der linken Hälfte des Intervalls  $-1 \dots +1$  konstant gleich  $-1$ , in der rechten Hälfte konstant gleich  $+1$  ist und für  $x=0$  einen Sprung von der Grösse 2 macht. Für das Koeffizientenintegral rechnen wir

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} f(x) P_\nu(x) dx &= - \int_{-1}^0 P_\nu(x) dx + \int_0^1 P_\nu(x) dx = - \int_0^1 P_\nu(-x) dx + \int_0^1 P_\nu(x) dx \\ &= \begin{cases} 2 \int_0^1 P_\nu(x) dx & \text{für ungerades } \nu, \\ 0 & \text{für gerades } \nu, \end{cases} \end{aligned}$$

weil je nachdem  $P_\nu(-x) = \mp P_\nu(x)$  (mit anderen Worten  $P_\nu(x)$  eine ungerade oder gerade Funktion) ist. Durch Anwendung des Ausdrucks

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

für die  $n$ te Kugelfunktion ergibt sich weiter bei ungeradem  $\nu = 2\mu - 1$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} f(x) P_\nu(x) dx &= \frac{2}{2^\nu \nu!} \left. \frac{d^{\nu-1} (x^2 - 1)^\nu}{dx^{\nu-1}} \right|_0^1 = - \frac{2}{2^\nu \nu!} (-1)^{\frac{\nu+1}{2}} \binom{\nu}{\frac{\nu+1}{2}} (\nu-1)! \\ &= \frac{(-1)^{\mu-1} 1 \cdot 3 \cdots (2\mu-3)}{\mu \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2\mu-2)}, \end{aligned}$$

weil die  $(\nu-1)$ te Ableitung in der  $\nu$  fachen Nullstelle 1 von  $(x^2-1)^\nu$  verschwindet und an der unteren Grenze 0 durch das  $(\nu-1)!$  fache des Koeffizienten

$(-1)^{\frac{\nu+1}{2}} \binom{\nu}{\frac{\nu+1}{2}}$  von  $x^{\nu-1}$  in der Taylorentwicklung von  $(x^2-1)^\nu$  um dem Null-

punkt geliefert wird. Mit den Koeffizienten

$$c_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_\nu(x) dx$$

<sup>1</sup> Vgl. H. WEYL, Die Gibbsche Erscheinung in der Theorie der Kugelfunktionen, Rend. Circ. mat. Palermo 29 (1910), S. 308-323, Über die Gibbsche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene, ebenda 30 (1910), S. 377-407.

oder

$$c_{2\mu-1} = (-1)^{\mu-1} \frac{4\mu-1}{2\mu} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2\mu-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2\mu-2)} = (-1)^{\mu-1} \frac{4\mu-1}{2\mu-1} \frac{(2\mu)!}{2^{2\mu} \mu!^2},$$

welche übrigens  $\sim (-1)^{\mu-1} \frac{2}{\sqrt{\pi\mu}}$  sind, findet man schliesslich als unendliche Reihe nach Kugelfunktionen für  $f(x)$

$$f(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{2\mu-1} P_{2\mu-1}(x).$$

Sie konvergiert im Intervalle  $-1 < x < +1$  für alle  $x \neq 0$  nach  $f(x)$  (und zwar gleichmässig in jedem die Punkte  $-1, 0, +1$  ausschliessenden, abgeschlossenen, festen Intervall) und an der Sprungstelle  $x=0$  nach dem arithmetischen Mittel  $0$  der Grenzwerte  $-1$  von links und  $+1$  von rechts (alle Kugelfunktionen  $P_{2\mu-1}(x)$  von ungerader Ordnung verschwinden für  $x=0$ ). Die ersten Koeffizienten sind

$$c_1 = \frac{3}{2} = 1,5; \quad c_3 = -\frac{7}{8} = -0,875; \quad c_5 = \frac{11}{16} = 0,6875.$$

In Bild 6 sind die Näherungskurven für das Abbrechen der unendlichen Reihe mit  $P_1(x)$ ,  $P_3(x)$ ,  $P_5(x)$ ,  $P_7(x)$ ,  $P_9(x)$  und  $P_{11}(x)$  gezeichnet. Man sieht, dass alle Kurven durch den Punkt  $x=0$ ,  $y=0$  laufen und z. B. zwischen  $x=0$  und  $x=+1$  die gewünschte wagerechte Strecke in der Höhe  $y=+1$  durch einen Wellenzug ersetzen, dessen Wellen mit zunehmendem Grade der Näherung immer zahlreicher auftreten und immer niedriger werden. Allerdings nur im Inneren des Intervalls  $0 < x < 1$ . Denn unmittelbar rechts von  $x=0$  rücken die ersten, über  $y=+1$  hinausschiessenden Wellenberge und unter  $y=+1$  herunter-

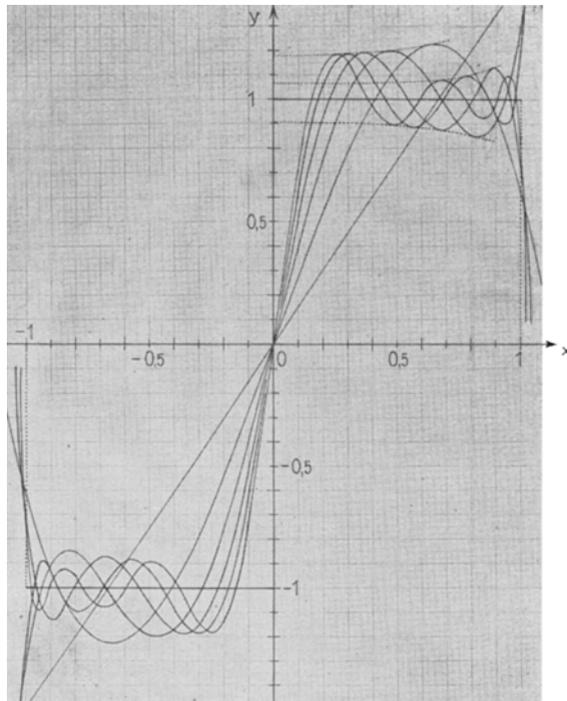


Bild 6.

fallenden Wellentäler im wesentlichen nur an die  $y$ -Achse heran und werden schmaler, ohne an Höhe oder Tiefe viel einzubüssen. Das ist gerade die Wilbraham-Gibbs'sche Erscheinung in der unmittelbaren Umgebung einer Sprungstelle mit ungleichmässiger Konvergenz der unendlichen Reihe. Zeichnet man die Verbindungskurve der Kuppen des ersten Wellenbergs rechts von  $x = 0$  für die 3., 5., 7., 9. und 11. Näherung, so lässt sie sich ohne Künstelei und starke Unsicherheit grafisch bis zur  $y$ -Achse extrapolieren, wo sie in  $y = 1,18$  einmündet. D. h. die Näherungskurve schlägt bei immer verfeinerter Annäherung in der Grenze um  $0,18:2 = 9\%$  der Sprunghöhe 2 über die darzustellende Funktion hinaus. Das erste Wellental rechts von  $x = 0$  für die 5., 7., 9. und 11. Näherung führt entsprechend rein grafisch zum Grenzorte 0,90 auf der  $y$ -Achse, der um  $0,10:2 = 5\%$  der Sprunghöhe unter  $y = +1$  bleibt. Der zweite Wellenberg für die 7., 9. und 11. Näherung gibt in der Grenze ein auf  $y = +1$  aufgesetztes Türmchen von knapp  $(1,07 - 1):2 = 3\frac{1}{2}\%$  der Sprunghöhe usw. Ganz anschaulich stellen sich so die von der Theorie geforderten Zahlen  $9\%$ ,  $5\%$ ,  $3\frac{1}{3}\%$ , . . . ein. — In  $x = -1$  und  $x = +1$  entfernen sich die Näherungskurven ausserordentlich rasch von  $y = -1$  bzw.  $y = +1$ .

