

ÜBER EINE IN DER NEUEREN WERTVERTEILUNGSTHEORIE BETRACHTETE KLASSE TRANSCENDENTER FUNKTIONEN.

VON

LARS AHLFORS

in HELSINGFORS.

Einleitung.

In einer in diesem Heft S. 295—373 erscheinenden Arbeit, deren Hauptresultate zum Teil schon in den »Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität« veröffentlicht worden sind, untersucht Herr ROLF NEVANLINNA¹ eingehend eine neue, wichtige Klasse von transzendenten, mehrdeutigen Funktionen $z(w)$, die durch folgende Eigenschaften ausgezeichnet sind:

1. $z(w)$ ist mit rationalem Charakter analytisch fortsetzbar in der ganzen Ebene, ausser möglicherweise, wenn man auf einen der endlichvielen Punkte a_1, a_2, \dots, a_q trifft.

2. $z(w)$ ist einwertig, d. h. den Mittelpunkten von verschiedenen Funktionselementen entsprechen immer verschiedene Funktionswerte.

3. Über jedem Punkt a_i liegt eine endliche Anzahl μ_i von logarithmischen Singularitäten. Ausserdem liegen über a_i nur reguläre Elemente.

4. Die Riemannsche Fläche der Funktion $z(w)$, oder was dasselbe heisst, das von den Funktionswerten $z(w)$ gebildete Gebiet G ist einfach zusammenhängend.

Herr NEVANLINNA hat zunächst gezeigt, dass die zu diesen Funktionen gehörigen Riemannschen Flächen in gewisse Typen eingeteilt werden können, deren Struktur er vollständig beschreibt. Im Falle $q = 2$ ist $z(w)$ eine lineare Transformation des Logarithmus, und auch im Falle $q = 3, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ gibt

¹ R. NEVANLINNA: *Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten.*

es, wenn von linearen Transformationen abgesehen wird, nur eine einzige Funktion mit den verlangten Eigenschaften. In allen übrigen Fällen existieren unendlich viele, wesentlich verschiedene Funktionen $z(w)$, die den Bedingungen des Problems genügen.

Ferner hat er bewiesen, dass das Wertgebiet der Funktionen $z(w)$ immer mit der in einem Punkt (z. B. im Unendlichen) punktierten Ebene identisch ist, sodass die Umkehrfunktion $w = w(z)$ eine überall im Endlichen definierte, meromorphe Funktion wird. Diese Funktion ist von der endlichen Ordnung $\frac{n}{2}$, wo $n = \sum_1^q \mu_i$ die Gesamtanzahl der Singularitäten von $w(z)$ bezeichnet, und besitzt aus dem Standpunkt der Wertverteilungstheorie besonders interessante Eigenschaften. Ihre einzigen defekten Werte sind nämlich die Werte a_i , und zwar sind die entsprechenden Defekte gleich $\frac{2\mu_i}{n}$, sodass die Summe aller Defekte genau gleich 2 wird. Hierdurch ist es Herrn NEVANLINNA gelungen meromorphe Funktionen mit vorgeschriebenen, rationalen Defekten mit der Summe 2 zu konstruieren.

Um diese Resultate zu gewinnen, verwendet Herr NEVANLINNA als hauptsächliches Hilfsmittel die asymptotische Integration einer Differentialgleichung, der die Funktion $w(z)$ genügt. Es ist nun sehr interessant, dass man auch ohne Benützung dieser Differentialgleichung, nur durch Methoden der konformen Abbildung, zu denselben Resultaten wie Herr NEVANLINNA kommen kann.

In der vorliegenden Arbeit wird die Untersuchung der NEVANLINNASCHEN Funktionen auf die Untersuchung der konformen Abbildung von zwei schlichten Gebieten aufeinander zurückgeführt. Zur Lösung von Aufgaben dieser Art habe ich schon früher¹ eine einfache Methode erfunden, die nur auf evidente *Inhalts- und Längenabschätzungen* sowie auf die *Verwendung der Schwarzschen Ungleichung*

$$\left(\int fg \, d\alpha \right)^2 \leq \int f^2 \, d\alpha \cdot \int g^2 \, d\alpha$$

beruht. Die Methode erweist sich auch in diesem Falle als erfolgreich und liefert, wie schon gesagt wurde, die wichtigsten von NEVANLINNA bewiesenen Resultate.

¹ L. AHLFORS: *Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen* (Acta Societatis Scient. Fennicae. Nova Series A. t. I. No. 9).

Darüber hinaus beweise ich in dieser Arbeit nichts neues, aber die Verallgemeinerungsfähigkeit meiner Methode liegt an der Hand.

Aus Darstellungsgründen werde ich nicht sofort an den allgemeinsten Fall herangehen, sondern führe zunächst in aller Breite den Beweis für den einfachsten, nicht-trivialen Fall $n = q = 3$ aus, und zeige dann wie die Überlegung für den allgemeinen Fall abgeändert werden muss. Im allgemeinen Fall treten nämlich gewisse unwesentliche, aber schwer umgehbare Komplikationen auf, die bei einer anderen Darstellungsweise leicht die einfache, zugrundeliegende Idee des Beweises in den Hintergrund stellen würden.

1. Der Fall $n = q = 3$.

1. Die Struktur der Riemannschen Fläche F der Funktion $z(w)$, welche den in der Einleitung gestellten Bedingungen mit $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ genügt, geht

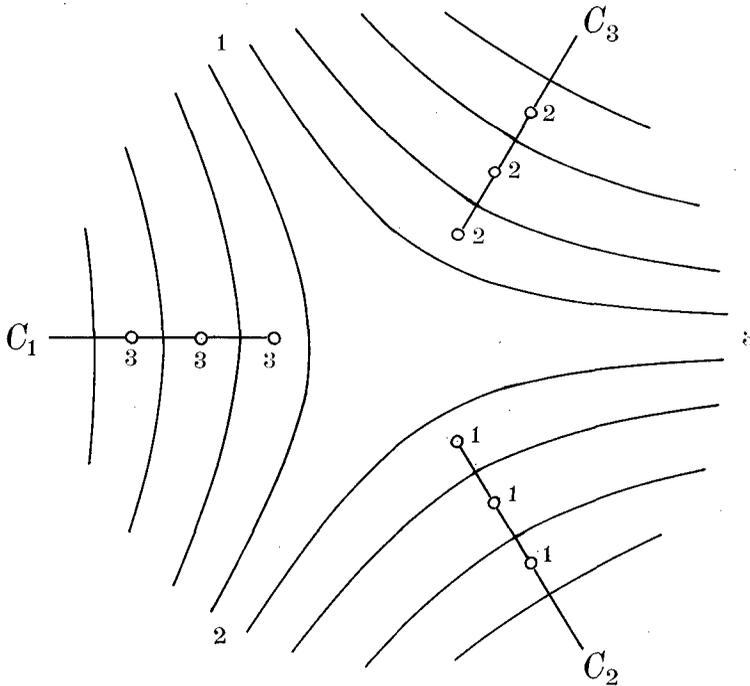


Fig. 1.

nach NEVANLINNA aus Fig. 1 hervor, die durch stetige Abbildung von F auf eine schlichte Ebene gewonnen ist. Jedem Blatt der Fläche entspricht ein von den Kurven der Figur begrenztes Fundamentalgebiet. Das Kernpolygon mit den drei

im Unendlichen gelegenen Ecken ist Bild eines Blattes, in dem alle die über den Punkten a_i gelegenen Punkte singularär sind, während die anderen Fundamentalgebiete nur zwei unendlich ferne Randpunkte besitzen, und demnach zu Blättern mit nur zwei Singularitäten und einem über a_1 , a_2 oder a_3 gelegenen regulären Punkt gehören.

Mit NEVANLINNA betrachten wir ausser $z(w)$ noch die linear polymorphe Funktion $\zeta = \zeta(w)$, welche die universelle Überlagerungsfläche der in a_1 , a_2 , a_3 punktierten w -Ebene auf den Kreis $|\zeta| < 1$ konform abbildet. Diese Funktion ist natürlich nichts anderes als die Modulfunktion eines von w linear abhängigen Argumentes. Ihre verschiedenen Zweige gehen durch die linearen Transformationen einer Gruppe S auseinander hervor, welche von den drei Fundamentalsubstitutionen S_1 , S_2 und S_3 mit der identischen Relation $S_1 S_2 S_3 = 1$ erzeugt wird. S_i ist diejenige Transformation, welche ein willkürlich gewählter Hauptzweig erleidet, wenn w einen positiven Umlauf um a_i ausführt.

Betrachtet man die Funktion $\zeta(w)$ auf der Riemannschen Fläche F , so ist sie immer noch mehrdeutig, und ihre Zweige substituieren sich in einer Untergruppe von S . Um einen auf F eindeutigen Zweig $\bar{\zeta}(w)$ zu fixieren müssen wir die Fläche aufschneiden längs Schnitten, die durch sämtliche über a_1 , a_2 und a_3 gelegene innere Punkte der Fläche hindurchgeht. Auf der so aufgeschnittenen Fläche ist $\zeta(w)$ überall regulär, und folglich jeder ihrer Zweige eine eindeutige Funktion.

Ein geeignetes Schnittsystem erhält man, wenn man in Fig. 1 die gleichbezeichneten Punkte durch Kurven verbindet, wie in der Figur gezeigt wird. Der Kurve C_1 , die durch die mit 3 bezeichneten Punkte hindurchgeht, entspricht in der w -Ebene eine Kurve, die sich unendlich oft um a_2 im positiven und um a_1 im negativen Sinn herumwindet und bei jedem Umlauf durch a_3 hindurchgeht. Die Kurve kann so gewählt werden, dass die einzelnen Umläufe genau über einander liegen. Ausserdem können wir erreichen, dass diesen Umläufen in der ζ -Ebene Kreisbogen entsprechen, die zum Einheitskreis orthogonal sind. In unserem Falle geschieht dieses so, dass man die Umläufe längs demjenigen durch a_3 gehenden Kreis unternimmt, in bezug auf welchen die Punkte a_1 und a_2 spiegelbildlich sind. Werden die Kurven C_2 und C_3 ähnlich gewählt, so erhält man in der w -Ebene eine Figur von dem in Fig. 2 gezeigten Aussehen.

Wir können annehmen, dass die logarithmischen Windungspunkte zu dem Hauptzweig von $\zeta(w)$ gehören, und dass diese Windungspunkte durch die Ab-

bildung auf die ζ -Ebene in die Randpunkte ε , ε^2 und ε^3 ($\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$) übergehen. Dann entspricht dem Anfangspunkt des Schnittes C_1 der Punkt $S_2 \varepsilon^3 = S_1^{-1} \varepsilon^3$. Die von diesem Punkt ausgehenden Orthogonalkreisbogen, die zu den Punkten $S_2^2 \varepsilon^3$ und $S_1^{-2} \varepsilon^3$ führen, entsprechen dem linken und rechten Ufer des ersten in a_3 beginnenden Umlaufes. Dem zweiten Umlauf gehören die zwischen $S_2^2 \varepsilon^3$ und $S_2^3 \varepsilon^3$ bzw. $S_1^{-2} \varepsilon^3$ und $S_1^{-3} \varepsilon^3$ verlaufenden Orthogonalkreise, usw. Die ganze Kurve C_1 wird also auf zwei aus einem Punkt ausgehende, gebrochene Kurvenzüge abgebildet, die aus den zwischen den Punkten $S_2 \varepsilon^3, S_2^2 \varepsilon^3, S_2^3 \varepsilon^3, \dots$ und $S_1^{-1} \varepsilon^3, S_1^{-2} \varepsilon^3, S_1^{-3} \varepsilon^3, \dots$ gezogenen Orthogonalkreisbogen bestehen.

Ebenso werden die Kurven C_2 und C_3 auf ähnliche Kurvenzüge abgebildet,

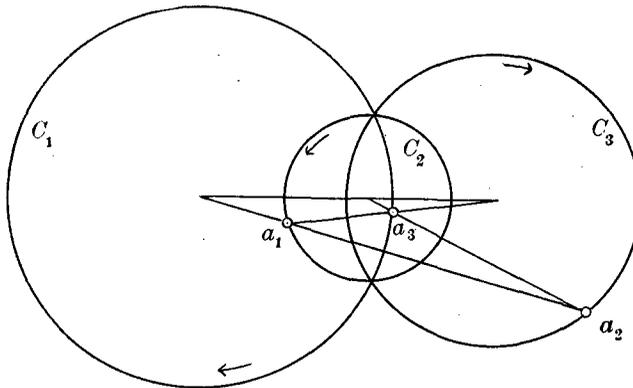


Fig. 2.

welche die Punktfolgen $S_3 \varepsilon, S_3^2 \varepsilon, S_3^3 \varepsilon, \dots$ und $S_2^{-1} \varepsilon, S_2^{-2} \varepsilon, S_2^{-3} \varepsilon, \dots$ bzw. $S_1 \varepsilon^2, S_1^2 \varepsilon^2, S_1^3 \varepsilon^2, \dots$ und $S_3^{-1} \varepsilon^2, S_3^{-2} \varepsilon^2, S_3^{-3} \varepsilon^2, \dots$ verbinden.

Als Bild der aufgeschnittenen Fläche F erhalten wir also ein aus unendlich vielen Orthogonalkreisdreiecken begrenztes Polygonebiet Q , dessen Ecken sich gegen die drei Punkte $\varepsilon, \varepsilon^2$ und ε^3 häufen (Fig. 3). Durch Identifizierung der zugeordneten Randpunkte, die zu demselben Punkte eines Schnittes von F gehören, bekommt man ein ein-eindeutiges Bild der ursprünglichen Riemannschen Fläche.

In der z -Ebene erhält man das Bildgebiet der aufgeschnittenen Fläche F , indem man das Wertgebiet G von $z(w)$ mit drei Einschnitten versieht, welche den Kurven C_1, C_2 und C_3 entsprechen. Das so entstandene Gebiet werde mit \bar{G} bezeichnet. Die zusammengesetzte Funktion $\zeta = \bar{\zeta}(w(z))$ vermittelt die konforme Abbildung von \bar{G} auf das Kreisbogenpolygon Q in der ζ -Ebene.

Die ganze Untersuchung der Funktion $w(z)$ ist nun auf die Untersuchung dieser konformen Abbildung zurückgeführt, denn die zwischen der ζ -Ebene und der w -Ebene bestehende Zuordnung, welche durch die Modulfunktion bestimmt wird, beherrscht man vollständig. Eine Schwierigkeit bei der Behandlung der genannten Abbildung besteht darin, dass man den Verlauf der erwähnten Einschnitte nicht kennt. Stattdem weiss man aber, welche die einander zugeordneten Randpunkte

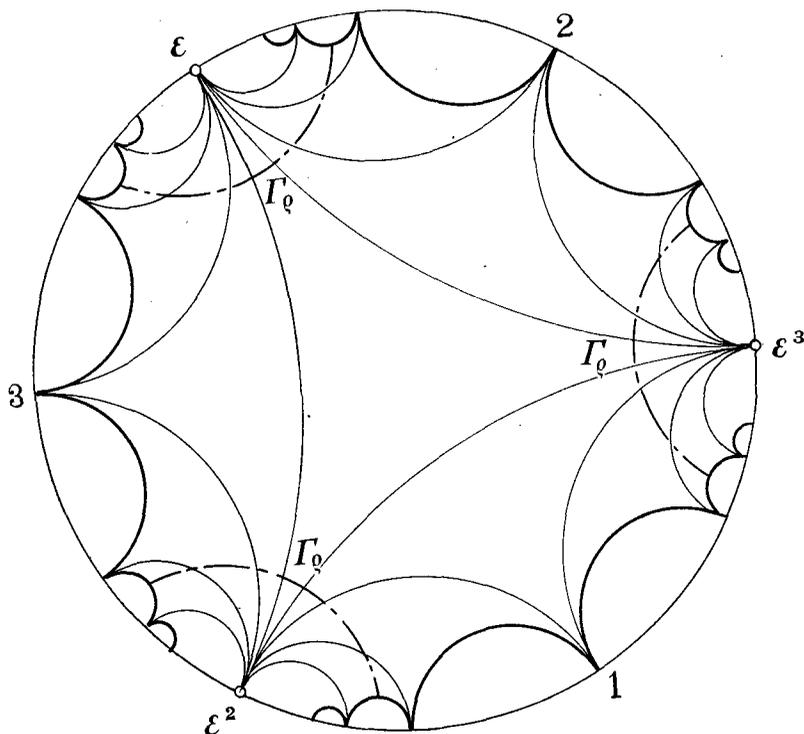


Fig. 3.

von Q sind, die einem und demselben Punkt eines Einschnittes entsprechen, und es zeigt sich, dass diese Kenntnis für unsere Zwecke ausreicht.

2. Bildet man mit Hilfe der Funktionen

$$\zeta_i = \frac{\sqrt{-3}}{4} \cdot \frac{\varepsilon^i + \zeta}{\varepsilon^i - \zeta} \quad (i = 1, 2, 3)$$

den Kreis $|\zeta| < 1$ auf die obere Halbebene ab, wobei nacheinander die Punkte ε , ε^2 und ε^3 in den Punkt ∞ übergeführt werden, so erhält man als Bild des Polygons Q ein Gebiet, das von Halbkreisen mit auf der reellen Achse gelegenen

Mittelpunkten begrenzt wird. In der ζ_1 -Ebene entsprechen den Punkten ε^3 und ε^2 die Punkte $\pm \frac{1}{4}$. Die Kreisbogen, welche sich gegen den Punkt ε häufen, also die Bilder des rechten Ufers von C_1 und des linken Ufers von C_3 , werden auf kongruente Halbkreise vom Radius $\frac{1}{2}$ mit den Mittelpunkten $\pm \left(n + \frac{1}{4}\right)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ abgebildet (Fig. 4). In den ζ_2 - und ζ_3 -Ebenen erhält man zufolge der Symmetrie genau dieselbe Figur.

In jeder der ζ_i -Ebenen wird nun ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\varrho \cong \frac{3}{4}$ geschlagen und der zum Bildgebiet von Q gehörige Bogen I_ϱ^i dieses Kreises bestimmt. In der ζ -Ebene entsprechen diesen Bogen drei kongruente Ortho-

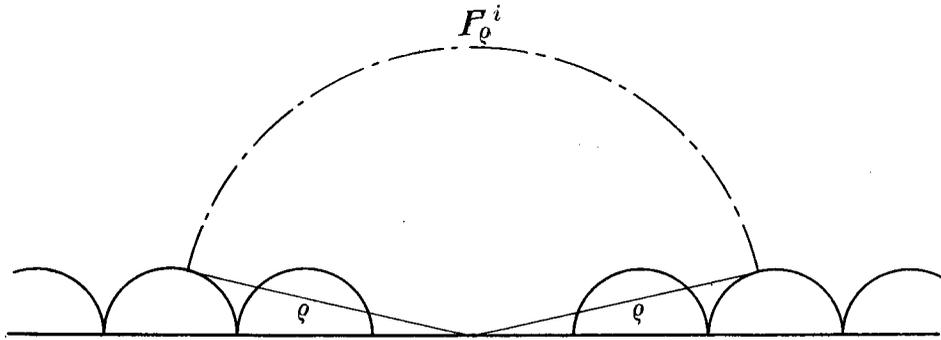


Fig. 4.

gonalkreisbogen, welche einander nicht schneiden und in bezug auf die Durchmesser durch ε , ε^3 und ε^3 symmetrisch liegen. Die zyklisch aufeinanderfolgenden Endpunkte dieser Bögen sind zugeordnete Randpunkte von Q , d. h. wenn man die zugeordneten Punkte identifiziert, so bilden die drei Bögen zusammen eine geschlossene Kurve, die wir mit I_ϱ bezeichnen. In der w -Ebene entspricht der Kurve I_ϱ eine auf der Riemannschen Fläche I' geschlossene, sich selbst nicht schneidende Kurve, und in der z -Ebene erhält man als Bild eine einfache Kurve, die den Bildpunkt von $\zeta = 0$ umschlingt. Offenbar können wir ohne weiteres voraussetzen, dass dies der Punkt $z = 0$ ist.

3. Die Anzahl der in der z -Ebene innerhalb der Bildkurve von I_ϱ gelegenen Wurzel der Gleichung $w(z) = a$ bezeichnen wir mit $\nu(\varrho, a)$. Man erhält sie auch, wenn man die Anzahl der verschiedenen, innerhalb I_ϱ gelegenen Werte von $\zeta(a)$ berechnet.

Um diese Anzahl zu bestimmen, betrachte ich in der ζ -Ebene die Moduldreiecke mit den Spitzen $1, \varepsilon, -1$ und $1, \varepsilon^2, -1$. Diese Dreiecke bilden zusammen ein Fundamentalgebiet der Umkehrfunktion von $\zeta(w)$. Für jedes a gibt es also einen Wert $\zeta(a)$, der zu einem dieser Dreiecke gehört, und falls $a \neq a_1$ und a_2 ist, so wird dieser Wert für ein genügend grosses ϱ von der Kurve I_ϱ eingeschlossen. Ausserdem können zu dem von I_ϱ eingeschlossenen Gebiet noch gewisse Transformierte $S_1^{-1}\zeta, S_1^{-2}\zeta, \dots$ oder $S_2\zeta, S_2^2\zeta, \dots$ des betrachteten Wertes gehören, jenachdem der Ausgangswert zum ersten oder zweiten Dreieck gehört. Die Anzahl dieser äquivalenten Punkte erhält man, wenn man im ersten Falle zur ζ_1 -Ebene und im zweiten Falle zur ζ_2 -Ebene übergeht. Dort entspricht den äquivalenten Punkten eine Folge von Werten, die durch eine Translation um eine Einheit in der Richtung der reellen Achse auseinander hervorgehen. Im ersten Falle sind alle Bildpunkte links und im zweiten Falle rechts von der imaginären Achse gelegen. Die Anzahl dieser Punkte, die innerhalb I_ϱ' bzw. I_ϱ'' gelegen sind, ist offenbar gleich $\varrho + O(1)$, wo mit $O(1)$ ein beschränktes Glied bezeichnet ist.

Dieselbe Überlegung kann dann wiederholt werden, erst mit den Moduldreiecken $\varepsilon, \varepsilon^2, -\varepsilon$ und $\varepsilon, \varepsilon^3, -\varepsilon$, dann mit den Dreiecken $\varepsilon^2, \varepsilon^3, -\varepsilon^2$ und $\varepsilon^2, \varepsilon, -\varepsilon^2$. Jedesmal erhält man dieselbe Anzahl, $\varrho + O(1)$, von neuen, innerhalb I_ϱ gelegenen Bildpunkten, wenn nur im ersten Falle $a \neq a_2, a_3$ und im zweiten Falle $a \neq a_1, a_3$ ist. Addiert man alle so gefundenen Bildpunkte, so wird also

$$\begin{cases} \nu(\varrho, a) = 3\varrho + O(1) \text{ für } a \neq a_1, a_2, a_3, \\ \nu(\varrho, a_i) = \varrho + O(1), \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Wir haben hiermit bewiesen, dass die Funktion $w(z)$ alle Werte $a \neq a_1, a_2, a_3$ asymptotisch gleich oft annimmt in den von den Bildkurven der Kurven I_ϱ begrenzten Gebieten, während die Anzahl der a_i -Stellen asymptotisch kleiner ist. Der Defekt, d. h. die Anzahl der fehlenden a_i -Stellen im Verhältnis zur normalen Anzahl, beträgt für jedes a_i

$$\bar{\delta}(a_i) = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\nu(\varrho, a) - \nu(\varrho, a_i)}{\nu(\varrho, a)} = \frac{2}{3}.$$

Die Summe der Defekte ist $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$.

Unser Ziel ist zu beweisen, dass diese Defekte nicht nur auftreten, wenn die z -Ebene in der obigen, von den Kurven I_ϱ bestimmten Weise erschöpft wird,

sondern auch wenn man die Ebene durch konzentrische Kreise ausschöpft, wie es die NEVANLINNASCHE Wertverteilungstheorie fordert. Um dies zu zeigen, muss man beweisen, dass die Bildkurven der Kurven Γ_ϱ annähernde Kreisform haben, d. h. dass das Verhältnis zwischen dem grössten und dem kleinsten Abstand eines Punktes auf der Bildkurve von Γ_ϱ zum Punkte $z = 0$ den Grenzwert 1 hat. Dieser Beweis bildet die Hauptschwierigkeit der ganzen Untersuchung.

4. Die Umkehrfunktion der Funktion $\zeta = \bar{\zeta}(w(z))$ sei im folgenden mit $z = \bar{z}(\zeta)$ bezeichnet. Wie schon bemerkt wurde, wird Γ_ϱ durch Vermittlung von $\bar{z}(\zeta)$ auf eine geschlossene Kurve der z -Ebene abgebildet, welche den Nullpunkt umgibt. Auf dieser Kurve sei $r_1(\varrho)$ der kleinste und $r_2(\varrho)$ der grösste Wert von $|z|$. Ausserdem wird die logarithmische Schwankung $\omega(\varrho) = \log r_2(\varrho) - \log r_1(\varrho)$ eingeführt.

Mit $s = \log z$ bezeichnen wir denjenigen Zweig des Logarithmus, dessen Imaginarteil zwischen 0 und 2π liegt. Das Bild von Γ_ϱ in der s -Ebene ist eine Kurve, welche zwei Punkte mit den Ordinaten 0 und 2π verbindet. Ihre Projektion auf der reellen Achse ist gleich $\omega(\varrho)$. Man überzeugt sich leicht, dass die Länge einer solchen Kurve wenigstens gleich der Diagonale eines Rechtecks mit den Seiten 2π und $\omega(\varrho)$ sein muss, und erhält demnach die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_\varrho^i} \left| \frac{ds}{d\zeta_i} \right| |d\zeta_i| \geq \sqrt{4\pi^2 + \omega(\varrho)^2}.$$

Durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung bekommt man hieraus

$$4\pi^2 + \omega(\varrho)^2 \leq \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_\varrho^i} |d\zeta_i| \cdot \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_\varrho^i} \left| \frac{ds}{d\zeta_i} \right|^2 |d\zeta_i|$$

und, da die Länge jeder Kurve Γ_ϱ^i höchstens gleich $\pi\varrho$ ist,

$$4\pi^2 + \omega(\varrho)^2 \leq 3\pi\varrho \cdot \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_\varrho^i} \left| \frac{ds}{d\zeta_i} \right|^2 |d\zeta_i|.$$

Dividiert man diese Ungleichung durch $3\pi\varrho$ und integriert in bezug auf ϱ zwischen den Grenzen ϱ' und ϱ'' ($3 \leq \varrho' < \varrho''$), so wird

$$(1) \quad \frac{4\pi}{3} \log \frac{\varrho''}{\varrho'} + \frac{1}{3\pi} \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\omega(\varrho)^2}{\varrho} d\varrho \leq \sum_1^3 \int_{\varrho'}^{\varrho''} d\varrho \int_{r_1^i}^{r_2^i} \left| \frac{ds}{d\zeta_i} \right|^2 |d\zeta_i|.$$

Der rechtsstehende Ausdruck stellt den Inhalt des Flächenstücks dar, das durch die Bildkurven von $\Gamma_{\varrho'}$ und $\Gamma_{\varrho''}$ von dem Parallelstreifen $0 \leq I(s) \leq 2\pi$ abgeschnitten wird. Diese Fläche ist höchstens gleich $2\pi (\log r_2(\varrho'') - \log r_1(\varrho')) = 2\pi \left(\log \frac{r_1(\varrho'')}{r_1(\varrho')} + \omega(\varrho'') \right)$. Benützt man diese Abschätzung, so folgt aus (1)

$$(2) \quad \frac{2}{3} \log \frac{\varrho''}{\varrho'} - \log \frac{r_1(\varrho'')}{r_1(\varrho')} \leq \omega(\varrho'') - \frac{1}{6\pi^2} \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\omega(\varrho)^2}{\varrho} d\varrho.$$

Aus dieser Ungleichung ergibt sich schon, dass $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} r_1(\varrho) = \infty$ ist, d. h. dass das Wertgebiet G mit der ganzen z -Ebene identisch ist, denn der auf der rechten Seite von (2) stehende Ausdruck ist im allgemeinen beschränkt. Schreibt man nämlich

$$\frac{1}{6\pi^2} \int_{\varrho'}^{\varrho} \frac{\omega(\varrho)^2}{\varrho} d\varrho = \alpha(\varrho),$$

und ist

$$(3) \quad \omega(\varrho) > \alpha(\varrho) + 1,$$

so folgt

$$(\alpha(\varrho) + 1)^2 < 6\pi^2 \varrho \frac{d\alpha(\varrho)}{d\varrho}$$

oder

$$\frac{d\varrho}{\varrho} < 6\pi^2 \frac{d\alpha(\varrho)}{(1 + \alpha(\varrho))^2}.$$

Wenn (3) in einem ganzen Intervall \mathcal{A} gilt, so folgt

$$\int_{\mathcal{A}} \frac{d\varrho}{\varrho} < 6\pi^2 \int_{\mathcal{A}} \frac{d\alpha(\varrho)}{(1 + \alpha(\varrho))^2} \leq 6\pi^2 \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{d\alpha}{(1 + \alpha)^2} = 6\pi^2.$$

Also kann sich kein Intervall \mathcal{A} ins Unendliche strecken, d. h. es gibt beliebig grosse Werte ϱ , für welche (3) nicht gilt. Setzt man für ϱ'' einen solchen Wert

ein, so folgt aus (2)

$$\log \frac{r_1(\varrho'')}{r_1(\varrho')} \geq \frac{2}{3} \log \frac{\varrho''}{\varrho'} - 1.$$

Da $r_1(\varrho)$ eine wachsende Funktion von ϱ ist, geht hieraus die Behauptung $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} r_1(\varrho) = \infty$ unmittelbar hervor.

5. Nachdem wir bewiesen haben, dass das Wertgebiet der Funktion $z(w)$ die ganze z -Ebene ist, können wir uns denken, dass die bisher nur schematisch aufgefasste Figur 1 die wirkliche Zerlegung der z -Ebene darstellt, und dass die Kurven C_i die Bilder der paarweise zugeordneten Randstücke von Q sind.

Wenn r genügend gross ist ($r \geq r_2 \left(\frac{3}{4} \right)$) trifft der Kreis $|z| = r$ alle drei Kurven C_i . Derjenige Bogen dieses Kreises, der einen Punkt auf dem linken Ufer von C_1 mit einem Punkt auf dem rechten Ufer von C_2 verbindet, heisse $\theta_r^{(1)}$.¹ Den ähnlich bestimmten Bogen zwischen C_2 und C_3 bezeichnen wir mit $\theta_r^{(2)}$ und den zwischen C_3 und C_1 gelegenen Bogen mit $\theta_r^{(3)}$. Der zum Bogen $\theta_r^{(i)}$ gehörige Zentriwinkel sei $\theta_i(r)$. Dann ist $\sum_{i=1}^3 \theta_i(r) \leq 2\pi$.

Dem Bogen $\theta_r^{(i)}$ entspricht in der ζ_i -Ebene ein Querschnitt des Bildgebiets von Q , der den Punkt $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ vom unendlich fernen Punkt trennt. Daraus ist ersichtlich, dass die Variation von $\arg \left(\zeta_i - \frac{\sqrt{-1}}{2} \right)$ auf $\theta_r^{(i)}$ wenigstens gleich π ist.

Geht man zur $\sigma_i = \log \left(\zeta_i - \frac{\sqrt{-1}}{2} \right)$ -Ebene über, wobei der Zweig des Logarithmus so festgelegt wird, dass sein Imaginarteil zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ liegt, so erhält man also als Bild von $\theta_r^{(i)}$ eine Kurve, welche wenigstens die Länge π hat. Es gilt somit

$$\int_{\theta_r^{(i)}} \left| \frac{d\sigma_i}{dz} \right| |dz| \geq \pi,$$

woraus mit Hilfe der Schwarzischen Ungleichung folgt

¹ Falls mehrere solche Bogen vorhanden sind, sei $\theta_r^{(1)}$ irgendeiner unter diesen.

$$\pi^2 \leq \int_{\theta_r^{(i)}} |dz| \int_{\theta_r^{(i)}} \left| \frac{d\sigma_i}{dz} \right|^2 |dz| = r \theta_i(r) \int_{\theta_r^{(i)}} \left| \frac{d\sigma_i}{dz} \right|^2 |dz|.$$

Diese Ungleichung dividieren wir durch $r \theta_i(r)$ und integrieren in bezug auf r zwischen den Grenzen $r_2(\varrho')$ und $r_1(\varrho'')$. Man erhält dann

$$(4) \quad \pi^2 \int_{r_2(\varrho')}^{r_1(\varrho'')} \frac{dr}{r \theta_i(r)} \leq \int_{r_2(\varrho')}^{r_1(\varrho'')} dr \int_{\theta_r^{(i)}} \left| \frac{d\sigma_i}{dz} \right|^2 |dz|.$$

Auf der rechten Seite von (4) steht wieder der Inhalt einer gewissen Fläche. Diese Fläche liegt erstens — wenn $\sigma_i = \xi + i \eta$ geschrieben wird — zwischen den Geraden $\xi = \log \left(\varrho' - \frac{1}{2} \right)$ und $\xi = \log \left(\varrho'' + \frac{1}{2} \right)$.¹ Andererseits ist sie im Bildgebiet der oberen ζ -Halbebene erhalten, d. h. sie liegt zwischen den zwei Kurven

$$\begin{cases} \eta = - \arcsin \frac{e^{-\xi}}{2} \\ \eta = \pi + \arcsin \frac{e^{-\xi}}{2} \end{cases}$$

Also ist die ganze Fläche höchstens gleich

$$\pi \log \frac{\varrho'' + \frac{1}{2}}{\varrho' - \frac{1}{2}} + 2 \int_{\log \left(\varrho' - \frac{1}{2} \right)}^{\log \left(\varrho'' + \frac{1}{2} \right)} \arcsin \frac{e^{-\xi}}{2} d\xi = \pi \log \frac{\varrho''}{\varrho'} + O \left(\frac{1}{\varrho'} \right).$$

Trägt man dies in (4) ein, so bekommt man schliesslich

$$\pi \int_{r_2(\varrho')}^{r_1(\varrho'')} \frac{dr}{r \theta_i(r)} \leq \log \frac{\varrho''}{\varrho'} + O \left(\frac{1}{\varrho'} \right), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Diese drei Ungleichungen addieren wir, und benutzen, dass nach dem Satz vom arithmetischen und harmonischen Mittel

¹ Es wird $\varrho' > \frac{3}{4}$ angenommen.

$$\sum_1^3 \frac{1}{\theta_i(r)} \geq \frac{9}{\sum_1^3 \theta_i(r)} \geq \frac{9}{2\pi}$$

ist. Man erhält so die Ungleichung

$$\frac{3}{2} \log \frac{r_1(\varrho'')}{r_2(\varrho')} \leq \log \frac{\varrho''}{\varrho'} + O\left(\frac{1}{\varrho'}\right)$$

oder

$$(5) \quad \frac{2}{3} \log \frac{\varrho''}{\varrho'} - \log \frac{r_1(\varrho'')}{r_1(\varrho')} \geq -\omega(\varrho'') + O\left(\frac{1}{\varrho'}\right).$$

Die zwei Fundamentalungleichungen (2) und (5) ergeben zusammen

$$(6) \quad \omega(\varrho') + \omega(\varrho'') \geq \frac{1}{6\pi^2} \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\omega(\varrho)^2}{\varrho} d\varrho + O\left(\frac{1}{\varrho'}\right),$$

eine Ungleichung, welche also immer besteht, wenn $\frac{3}{4} < \varrho' < \varrho''$. Wir werden zeigen, dass diese Ungleichung $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \omega(\varrho) = 0$ und sogar eine etwas schärfere Beziehung zur Folge hat.

6. Wir wählen ein festes $\varrho > \frac{9}{16}$ und wenden die Ungleichung (6) an auf ein ϱ' aus dem Intervall $\varrho \leq \varrho' \leq \varrho$ und ein ϱ'' aus dem Intervall $\varrho \leq \varrho'' \leq \varrho V \varrho$. Die Ungleichung bringen wir auf die Form

$$(7) \quad \omega(\varrho') + \omega(\varrho'') \leq \left(2\omega(\varrho'') - \frac{1}{6\pi^2} \int_{\varrho}^{\varrho''} \frac{\omega(\varrho)^2}{\varrho} d\varrho\right) + \left(2\omega(\varrho') - \frac{1}{6\pi^2} \int_{\varrho'}^{\varrho} \frac{\omega(\varrho)^2}{\varrho} d\varrho\right) + O\left(\frac{1}{\varrho'}\right).$$

Wir versuchen jetzt ϱ'' innerhalb des Intervalls $(\varrho, \varrho V \varrho)$ so zu wählen, dass der erste Klammerausdruck in (7) sein Minimum erreicht. Dieses Minimum bezeichnen wir mit δ . Es gilt folglich, wenn wieder

$$\frac{1}{6\pi^2} \int_{\varrho}^{\varrho''} \frac{\omega(\varrho)^2}{\varrho} d\varrho = \alpha(\varrho'')$$

gesetzt wird,

$$2 \omega(\varrho'') \geq \alpha(\varrho'') + \delta$$

oder

$$(\alpha(\varrho'') + \delta)^2 \leq 24 \pi^2 \frac{\varrho'' d\alpha(\varrho'')}{d\varrho''},$$

für $\varrho \leq \varrho'' \leq \varrho \sqrt{\varrho}$. Hieraus folgt

$$\frac{d\varrho''}{\varrho''} \leq 24 \pi^2 \frac{d\alpha(\varrho'')}{(\alpha(\varrho'') + \delta)^2},$$

und durch Integration über das ganze Intervall $(\varrho, \varrho \sqrt{\varrho})$

$$\frac{1}{2} \log \varrho \leq 24 \pi^2 \int_{\varrho}^{\varrho \sqrt{\varrho}} \frac{d\alpha(\varrho'')}{(\alpha(\varrho'') + \delta)^2} \leq 24 \pi^2 \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{d\alpha}{(\alpha + \delta)^2} = \frac{24 \pi^2}{\delta}$$

oder

$$\delta \leq \frac{48 \pi^2}{\log \varrho}.$$

In derselben Weise wird gezeigt, dass auch das Minimum des zweiten Klammerausdrucks in (7) im Intervall $\sqrt{\varrho} \leq \varrho' \leq \varrho$ kleiner als oder gleich $\frac{48 \pi^2}{\log \varrho}$ ist. Man kann also ϱ' und ϱ'' aus den vorgeschriebenen Intervallen wählen, sodass nach (7)

$$(8) \quad \omega(\varrho') + \omega(\varrho'') \leq \frac{96 \pi^2}{\log \varrho} + O\left(\frac{1}{\varrho'}\right)$$

wird.

Wir nehmen dann eine Zahl η , die grösser als $\omega(\varrho')$ und $\omega(\varrho'')$ ist, und bezeichnen mit \mathcal{A} das logarithmische Mass¹ der Menge der zwischen ϱ' und ϱ'' liegenden Werte ϱ , für welche $\omega(\varrho) \geq \eta$ ist. Dann folgt aus (6) in Verbindung mit (8)

$$\frac{\eta^2}{6 \pi^2} \mathcal{A} \leq \frac{96 \pi^2}{\log \varrho} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right)$$

oder

$$\mathcal{A} \leq \frac{576 \pi^4}{\eta^2 \log \varrho} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right).$$

¹ d. h. das über diese Menge ausgestreckte Integral $\int \frac{d\varrho}{\varrho}$.

Da nun $\omega(\varrho)$ nach Voraussetzung nicht in dem ganzen geschlossenen Intervall (ϱ', ϱ'') grösser als η ist, so kann man in diesem Intervall zwei so nahe an ϱ gelegene Werte $\varrho_1 \leq \varrho$ und $\varrho_2 \geq \varrho$ finden, für welche $\omega(\varrho_1)$ und $\omega(\varrho_2) \leq \eta$ ist, dass

$$\log \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \leq \frac{576 \pi^4}{\eta^2 \log \varrho} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right).$$

Ferner ist

$$\omega(\varrho) \leq \log r_2(\varrho_2) - \log r_1(\varrho_1) = \log \frac{r_1(\varrho_2)}{r_1(\varrho_1)} + \omega(\varrho_2),$$

woraus nach (5) folgt

$$\omega(\varrho) \leq \frac{2}{3} \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \omega(\varrho_1) + \omega(\varrho_2) + O\left(\frac{1}{\varrho_1}\right) \leq \frac{384 \pi^4}{\eta^2 \log \varrho} + 2\eta + O\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right).$$

Die rechtsstehende Schranke wird zu einem Minimum für

$$\eta = \sqrt[3]{\frac{384 \pi^4}{\log \varrho}},$$

und bei dieser Wahl ist die Bedingung $\eta > \omega(\varrho')$ und $\omega(\varrho'')$ wegen (8) erfüllt, wenn ϱ genügend gross ist. Man erhält so die gewünschte Abschätzung

$$\omega(\varrho) \leq 12 \pi \sqrt[3]{\frac{6 \pi}{\log \varrho}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right),$$

welche zeigt, dass $\omega(\varrho)$ mit wachsendem ϱ tatsächlich gegen Null strebt wie

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\log \varrho}}.$$

7. Aus (2) und (5) folgt nunmehr unmittelbar, dass

$$\log \frac{r_1(\varrho'')}{r_1(\varrho')} - \frac{2}{3} \log \frac{\varrho''}{\varrho'} = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log \varrho'}}\right).$$

Man schliesst hieraus auf die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \left(\log r_1(\varrho) - \frac{2}{3} \log \varrho \right) = \log A$$

und erhält die asymptotische Darstellung

$$r_1(\varrho) = A \varrho^{\frac{2}{3}} \left(1 + O \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log \varrho}} \right) \right).$$

Ebenso gilt

$$r_2(\varrho) = A \varrho^{\frac{2}{3}} \left(1 + O \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log \varrho}} \right) \right).$$

Die Wertverteilungsgrößen $n(r, a)$ erhält man mit Hilfe der Resultate in Nr. 3. Es ist offenbar

$$n(r_1(\varrho), a) \leq \nu(\varrho, a) \leq n(r_2(\varrho), a).$$

Wählt man zunächst ϱ sodass $r_1(\varrho) = r$, woraus folgt

$$\varrho = A' r^{\frac{3}{2}} \left(1 + O \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log r}} \right) \right), \quad A' = A^{-\frac{3}{2}},$$

so wird (S. 382)

$$n(r, a) \leq \nu(\varrho, a) = 3 A' r^{\frac{3}{2}} \left(1 + O \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log r}} \right) \right) \quad \text{für } a \neq a_1, a_2, a_3$$

$$n(r, a_i) \leq \nu(\varrho, a_i) = A' r^{\frac{3}{2}} \left(1 + O \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log r}} \right) \right), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Wird ϱ andererseits so gewählt, dass $r_2(\varrho) = r$, so erhält man in derselben Weise die umgekehrten Ungleichungen. Es gilt mithin

$$n(r, a) = 3 A' r^{\frac{3}{2}} \left(1 + O \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log r}} \right) \right) \quad \text{für } a \neq a_1, a_2, a_3$$

$$n(r, a_i) = A' r^{\frac{3}{2}} \left(1 + O \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log r}} \right) \right), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Wenn $n(r)$ das Maximum von $n(r, a)$ für alle Werte von a bezeichnet, so gilt auch

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{3/2}} = A',$$

d. h. die Funktion $w(z)$ ist vom mittleren Typus der Ordnung $\frac{3}{2}$. Ferner ist

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, a)}{n(r)} = 1 \text{ für } a \neq a_1, a_2, a_3$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, a_i)}{n(r)} = \frac{1}{3}.$$

Die einzigen Werte mit einem positiven Defekt sind also die Werte a_i und der Defekt jedes Wertes beträgt

$$\delta(a_i) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n(r, a_i)}{n(r)} \right) = \frac{2}{3},$$

wobei die Defekte jetzt im ursprünglichen NEVANLINNASCHEN Sinn berechnet sind.¹

Wir fassen noch die Resultate dieses Abschnittes zusammen:

Die, bis auf lineare Transformationen, einzige in einem einfach zusammenhängenden Gebiet definierte, eindeutige Funktion ohne multiplen Stellen, deren Umkehrfunktion nur über den Stellen a_1, a_2, a_3 je eine transzendente Singularität besitzt, ist eine in der ganzen Ebene meromorphe Funktion vom mittleren Typus der Ordnung $\frac{3}{2}$ mit den drei Defekten $\delta(a_1) = \delta(a_2) = \delta(a_3) = \frac{2}{3}$. Die Summe der Defekte ist also genau gleich 2.

2. Der allgemeine Fall.

A. 8. Wir untersuchen dann den Fall, wo die Funktion $z(w)$ über jedem der Punkte $a_1, a_2, \dots, a_q (q > 3)$ eine und nur eine logarithmische Singularität besitzt. Ausserdem nehmen wir zunächst an, dass alle Singularitäten in demselben Blatt liegen, d. h. dass man ein Anfangselement finden kann, von dem aus alle Singularitäten längs solchen Wegen erreichbar sind, die sich selbst und

¹ Eigentlich sind die Nevanlinnaschen Defekte nicht mit Hilfe der Funktionen $n(r, a)$, sondern mit Hilfe der damit verwandten Funktionen $N(r, a)$ definiert. Es ist aber leicht zu sehen, dass ein durch $n(r, a)$ definierter Defekt einen gleich grossen, durch $N(r, a)$ gemessenen Defekt ergibt, wogegen das umgekehrte nicht immer gilt.

einander nicht schneiden. Die Punkte a_1, \dots, a_q seien so numeriert, dass die entsprechenden Wege zyklisch im positiven Drehungssinn aufeinanderfolgen. Die schematische Figur 5, welche die Struktur der Riemannschen Fläche veranschaulicht, entsteht genau wie die entsprechende Figur 1 mit dem Unterschied, dass das erste Fundamentalgebiet jetzt q im Unendlichen gelegene Ecken hat.

Von der Funktion $\zeta = \zeta(w; a_1, \dots, a_q)$, welche die universelle Überlagerungsfläche der in a_1, \dots, a_q punktierten w -Ebene auf den Einheitskreis abbildet,

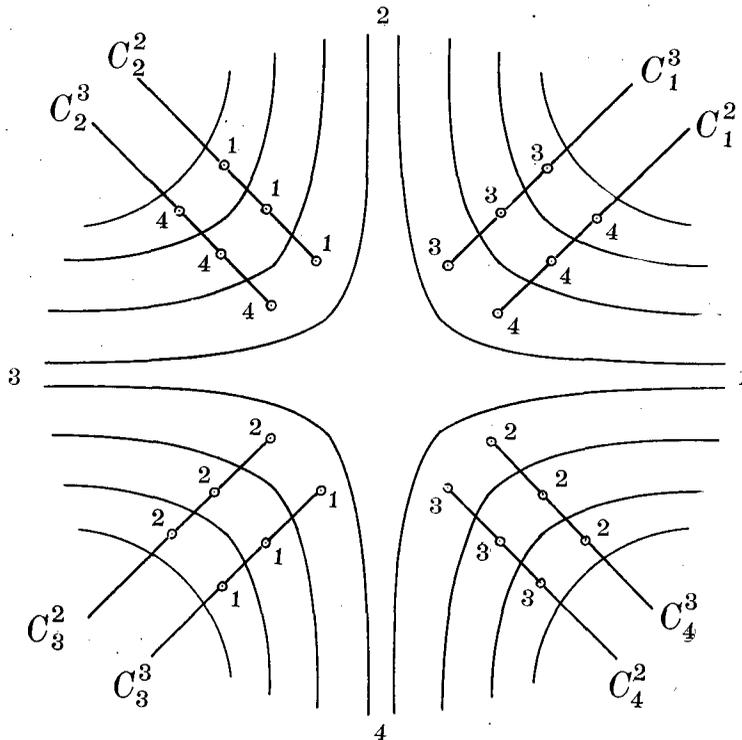


Fig. 5.

soll wieder ein eindeutiger Zweig $\zeta = \bar{\zeta}(w)$ fixiert werden. Dazu wird ein Schnittsystem eingeführt, das in Fig. 5 von den Kurven C_i^k ($i = 1, \dots, q; k = 2, \dots, q - 1$) repräsentiert wird. C_i^k ist eine Kurve, welche in dem an die Seite $(i, i + 1)$ des Grundpolygons grenzenden »logarithmischen Ende« verläuft und durch die dort gelegenen Bildpunkte von a_{i-k+1} hindurchgeht.¹ In jedem zum betreffenden logarithmischen Ende gehörigen Fundamentalgebiet soll der Schnitt C_i^k die Singularität a_i und die vorhergehenden Schnitte $C_i^{k-1}, C_i^{k-2}, \dots, C_i^2$ von der

¹ Hier und im folgenden sollen alle Indizes auf ihre Reste modulo q reduziert werden.

Singularität a_{i+1} und den nachfolgenden Schnitten $C_i^{k+1}, C_i^{k+2}, \dots, C_i^{-1}$ trennen. Dann gehört zu C_i^k in der w -Ebene eine Kurve, die sich unendlich oft um $a_i, a_{i-1}, \dots, a_{i-k+2}$ im negativen und um $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+q-k}$ im positiven Sinn herumwindet und bei jedem Umlauf durch a_{i-k+1} hindurchgeht. Man kann es wieder so einrichten, dass alle zu demselben Schnitt gehörigen Umläufe genau

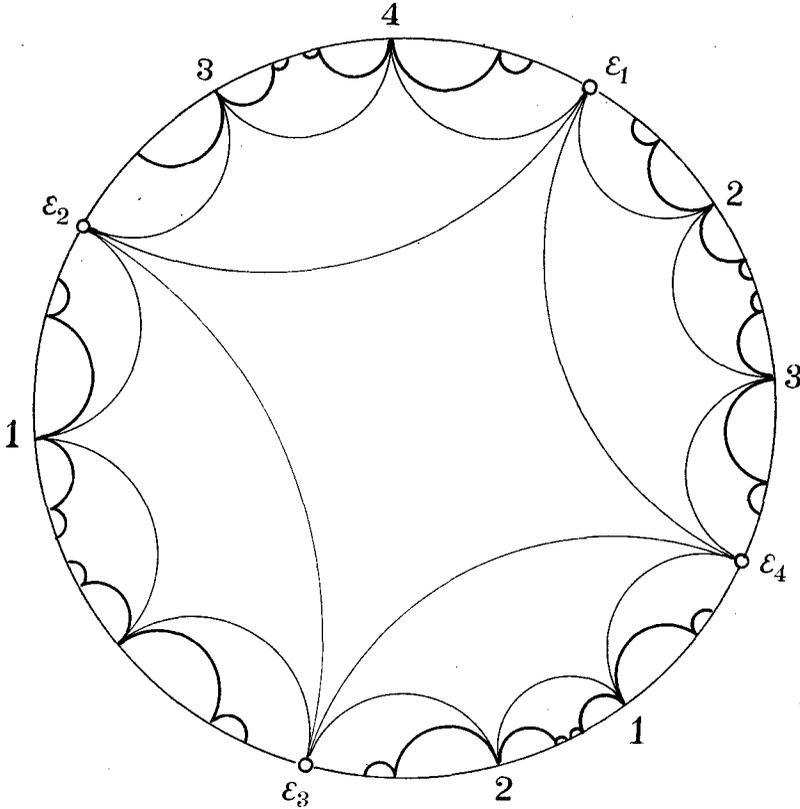


Fig. 6.

übereinander liegen, und dass jedem Umlauf in der ζ -Ebene ein Orthogonalkreisbogen des Einheitskreises entspricht.

Den Singularitäten von $z(w)$ entspreche in der ζ -Ebene durch Vermittlung des Hauptzweiges von $\zeta(w)$ die Punkte $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q$ auf der Peripherie des Einheitskreises, und bei einem positiven Umlauf um a_i soll dieser Zweig der Transformation S_i unterworfen werden. Dann entspricht dem Anfangspunkt des Schnittes C_i^k der Punkt $T'_{i,k} \varepsilon_{i-k+1} = T''_{i,k} \varepsilon_{i-k+1}$, wo $T'_{i,k} = S_{i+1} S_{i+2} \dots S_{i+q-k}$ und $T''_{i,k} = S_i^{-1} S_{i-1}^{-1} \dots S_{i-k+2}^{-1}$. Als Bild des ersten zu C_i^k gehörigen Umlaufes erhält

man die von dem genannten Punkt ausgehenden Orthogonalkreisbogen, welche in den Punkten $T'_{i,k} \varepsilon_{i-k+1}$ und $T''_{i,k} \varepsilon_{i-k+1}$ endigen. Allgemein gehört zu dem linken Ufer des p -ten Umlaufes der Orthogonalkreisbogen zwischen den Punkten $T'_{i,k} \varepsilon_{i-k+1}$ und $T'_{i,k}^{p+1} \varepsilon_{i-k+1}$, während zu dem rechten Ufer der Kreisbogen zwischen $T'_{i,k} \varepsilon_{i-k+1}$ und $T''_{i,k} \varepsilon_{i-k+1}$ gehört. Die beiden Ufer werden also auf Kreisbogenzüge abgebildet, die gegen die anziehenden Fixpunkte $\omega'_{i,k}$ und $\omega''_{i,k}$ der Transformationen $T'_{i,k}$ und $T''_{i,k}$ konvergieren.

$T''_{i,2}$ und $T'_{i,q-1}$ sind parabolisch mit den einzigen Fixpunkten ε_i und ε_{i+1} . Ferner ist für $k = 2, \dots, q-2$ $T'_{i,k} = T''_{i,k+1}$, sodass auch $\omega'_{i,k} = \omega''_{i,k+1}$. Also ist die ganze Anzahl der infragekommenden Fixpunkte gleich $q(q-2)$, d. h. die

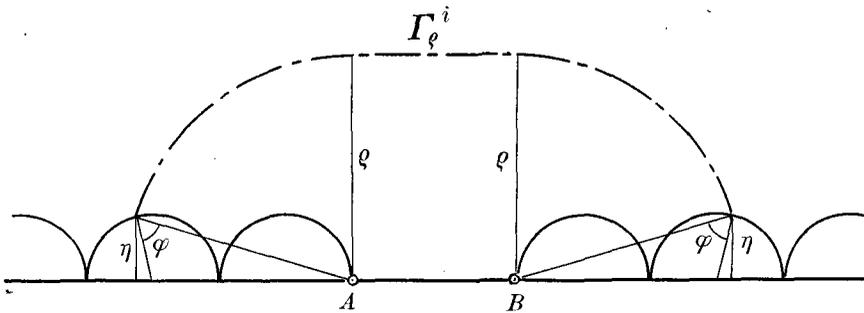


Fig. 7.

Riemannsche Fläche F wird auf ein Kreispolygon Q mit paarweise zugeordneten Seiten abgebildet, dessen Ecken sich gegen $q(q-2)$ Punkte auf der Peripherie des Einheitskreises häufen (siehe Fig. 6, wo $q = 4$).

9. Man betrachte wieder eine Abbildung des Einheitskreises auf die obere ζ_i -Halbebene ($i = 1, \dots, q$), welche den Punkt ε_i in den unendlich fernen Punkt überführt. Die Abbildung soll so normiert sein, dass der Transformation S_i eine Translation um eine Einheit in der Richtung der positiven reellen Achse entspricht. Als Bild derjenigen Seiten von Q , die sich gegen ε_i häufen, erhält man dann wie in Fig. 4 zwei von den Bildpunkten A und B der Anfangspunkte der Schnitte C_i^2 und C_{i-1}^{q-1} ausgehende Folgen aneinandergelegter, kongruenter Halbkreise vom Radius $\frac{1}{2}$ (Fig. 7).

Wir definieren dann die Querschnitte Γ_ρ^i in fast derselben Weise wie in Nr. 2. Man schlage um A und B Halbkreise vom Radius ρ , nehme von beiden Halbkreisen nur die äusseren Quadranten und verbinde ihre senkrecht über A

und B gelegenen Endpunkte mit einer zur reellen Achse parallelen Strecke. Der zum Bildgebiet von Q gehörige Teil dieser zusammengesetzten Linie sei Γ_ρ^i .

Durch diese Definition ist aber noch nicht erreicht, dass der linke Endpunkt von Γ_ρ^i dem rechten Endpunkt von Γ_ρ^{i+1} zugeordnet ist. Um zu einer geschlossenen Kurve Γ_ρ zu kommen, müssen also noch gewisse Kurvenstücke hinzugefügt werden.

Dazu bilden wir den Einheitskreis noch auf die obere ζ_i^k -Halbebene ($k = 2, \dots, q - 2$) ab, sodass der Fixpunkt $\omega'_{i,k} = \omega''_{i,k+1}$ in den Punkt ∞ übergeht. Dann entspricht der Transformation $T''_{i,k} \equiv T''_{i,k+1}$ eine Ähnlichkeitstransformation vom Bildpunkt des zweiten Fixpunktes aus (als Nullpunkt gewählt) mit dem Proportionalitätsfaktor $\lambda > 1$. Als Bild der Seiten von Q , die sich gegen $\omega'_{i,k}$

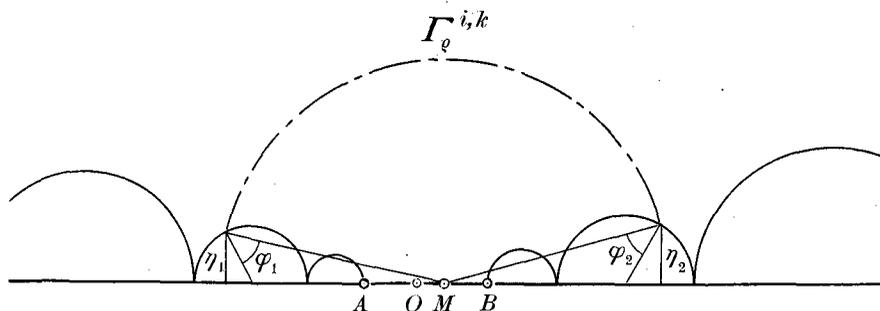


Fig. 8.

häufen, erhält man beiderseits von O eine Folge perspektivisch gelegener Halbkreise (Fig. 8).*

In der ζ_i^2 -Ebene betrachten wir dann den Halbkreis über die Strecke AB zwischen den Bildpunkten der Anfangspunkte von C_i^2 und C_i^3 , und vergrößern ihn homothetisch vom Punkte O aus bis er durch den zugeordneten Punkt des linken Endpunktes von Γ_ρ^i hindurchgeht. Den zum Bildgebiet von Q gehörigen Teil dieses Kreises nennen wir $\Gamma_\rho^{i,2}$. Allgemein soll das in der ζ_i^k -Ebene ($k = 2, \dots, q - 3$) gelegene Kurvenstück $\Gamma_\rho^{i,k}$ durch den zugeordneten Punkt des linken Endpunktes von $\Gamma_\rho^{i,k-1}$ hindurchgehen und auf einem homothetischen Kreis zu dem Orthogonalkreis durch die Transformaten der Anfangspunkte von C_i^k und C_i^{k+1} liegen. Nur das letzte Kurvenstück, $\Gamma_\rho^{i,q-2}$, muss etwas anders definiert werden, nämlich als der Orthogonalkreisbogen, der in der ζ_i^{q-2} -Ebene die zugeordneten Punkte des linken Endpunktes von $\Gamma_\rho^{i,q-3}$ und des rechten Endpunktes

von I_ϱ^{v+1} verbindet. Alsdann entspricht der Kurve I_ϱ in der ζ -Ebene, welche aus den Bildern aller Querschnitte I_ϱ^v und $I_\varrho^{v,k}$ besteht, auf der Fläche I' tatsächlich eine geschlossene Kurve.

10. Es sei wieder $\nu(\varrho, a)$ die Anzahl der von I_ϱ eingeschlossenen Stellen, denen in der w -Ebene ein über a gelegener Punkt entspricht. Diese Anzahl kann in folgender Weise bestimmt werden.

In der ζ -Ebene bildet das Orthogonalkreispolygon, dessen Ecken $\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+2}, \dots, \varepsilon_{i+q} = \varepsilon_i$ und die Bildpunkte der Anfangspunkte der Kurven $C_i^a, C_i^b, \dots, C_i^{q-1}$ sind, ein vollständiges Fundamentalgebiet der Funktion $\zeta(w)$. In diesem Gebiet liegt also sicher ein Wert von $\zeta(a)$, und wenn $a \neq a_i$ und a_{i+1} ist, so wird dieser Wert für genügend grosse ϱ von der Kurve I_ϱ eingeschlossen. Ausserdem schliesst aber I_ϱ noch eine Folge von äquivalenten Bildpunkten dieses Wertes ein, welche, jenachdem in welchem Teil des Fundamentalgebiets der betrachtete Wert $\zeta(a)$ liegt, durch positive Potenzen einer der Transformationen $T'_{i,2}, T''_{i,2} = T'_{i,3}, T''_{i,3} = T'_{i,4}, \dots, T''_{i,q-2} = T'_{i,q-1}, T''_{i,q-1}$ gegeben sind.

Für die parabolischen Substitutionen $T'_{i,2} = S_i^{-1}$ und $T''_{i,q-1} = S_{i+1}$ berechnet man sofort die Anzahl dieser äquivalenten Punkte zu $\varrho + O(1)$, wie in Nr. 3. Aber auch für die hyperbolischen Transformationen erhält man asymptotisch dieselbe Anzahl, denn zwischen den Querschnitten $I_n^{v,k}$ und $I_{n+1}^{v,k}$ liegt, wenn n eine ganze Zahl ist, genau ein Bildpunkt.

Da dieselbe Überlegung für $i = 1, 2, \dots, q$ wiederholt werden kann, so folgt, wenn a von allen a_i verschieden ist, dass die gesamte Anzahl der von I_ϱ eingeschlossenen Werte a gleich

$$\nu(\varrho, a) = q\varrho + O(1)$$

ist, während

$$\nu(\varrho, a_i) = (q-2)\varrho + O(1), \quad (i = 1, \dots, q).$$

Alle Werte werden also asymptotisch gleich oft angenommen mit Ausnahme der Werte a_i , welche den Defekt

$$\delta(a_i) = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\nu(\varrho, a) - \nu(\varrho, a_i)}{\nu(\varrho, a)} = \frac{2}{q}$$

besitzen. Die Summe aller Defekte ist also wieder gleich $q \cdot \frac{2}{q} = 2$. Es soll aber noch wie im Falle $q = 3$ gezeigt werden, dass diese Defekte wirkliche Defekte im Sinne von NEVANLINNA sind.

11. Der Kurve Γ_q entspricht in der z -Ebene eine Kurve, die den Nullpunkt umschlingt. Gehen wir zur $s = \log z$ -Ebene über, so wird also in derselben Weise wie in Nr. 4

$$\int_{\Gamma_q} |ds| = \sum_1^q \int_{\Gamma_q^i} \left| \frac{ds}{d\zeta_i} \right| |d\zeta_i| + \sum_1^q \sum_2^{q-1} \int_{\Gamma_q^{i,k}} \left| \frac{ds}{d\zeta_i^k} \right| |d\zeta_i^k| \geq \sqrt{4\pi^2 + \omega(q)^2}.$$

Wir wenden wieder die Schwarzsche Ungleichung $\left(\int f g d\alpha \right)^2 \leq \int f^2 d\alpha \cdot \int g^2 d\alpha$ an, indem wir in den Integralen der ersten Summe $f = 1$, $g = \left| \frac{ds}{d\zeta_i} \right|$ und in den übrigen Integralen $f = \sqrt{\frac{M}{|\zeta_i^k|}}$, $g = \sqrt{\frac{|\zeta_i^k|}{M}} \cdot \left| \frac{ds}{d\zeta_i^k} \right|$ setzen, wobei M eine Konstante ist, deren Wert später bestimmt werden soll. Man erhält so

$$4\pi^2 + \omega(q)^2 \leq \left(\sum_i \int_{\Gamma_q^i} |d\zeta_i| + M \sum_i \sum_k \int_{\Gamma_q^{i,k}} \left| \frac{d\zeta_i^k}{\zeta_i^k} \right| \right) \cdot \left(\sum_i \int_{\Gamma_q^i} \left| \frac{ds}{d\zeta_i} \right|^2 |d\zeta_i| + \frac{1}{M} \sum_i \sum_k \int_{\Gamma_q^{i,k}} \left| \frac{ds}{d\zeta_i^k} \right|^2 |\zeta_i^k| |d\zeta_i^k| \right).$$

Alsdann beachten wir, dass

$$\int_{\Gamma_q^i} |d\zeta_i| \leq \pi q + O(1)$$

und

$$\int_{\Gamma_q^{i,k}} \left| \frac{d\zeta_i^k}{\zeta_i^k} \right| = O(1).$$

Dann wird, wenn K eine genügend grosse Konstante ist,

$$(9) \quad \frac{4\pi^2 + \omega(q)^2}{\pi q(q + K)} \leq \sum_i \int_{\Gamma_q^i} \left| \frac{ds}{d\zeta_i} \right|^2 |d\zeta_i| + \frac{1}{M} \sum_i \sum_k \int_{\Gamma_q^{i,k}} \left| \frac{ds}{d\zeta_i^k} \right|^2 |\zeta_i^k| |d\zeta_i^k|.$$

Die letzte Ungleichung wird nun wie in Nr. 4 integriert in bezug auf ϱ zwischen den Grenzen ϱ' und ϱ'' . Auf der rechten Seite erhält man dann Doppelintegrale von der Form

$$\int_{\varrho'}^{\varrho''} d\varrho \int_{I_{\varrho}^i} \left| \frac{ds}{d\zeta_i} \right|^2 |d\zeta_i|$$

und

$$(10) \quad \frac{1}{M} \int_{\varrho'}^{\varrho''} d\varrho \int_{I_{\varrho}^{i,k}} \left| \frac{ds}{d\zeta_i^k} \right|^2 |\zeta_i^k| |d\zeta_i^k|.$$

Die geometrische Bedeutung jener ist klar: da die benachbarten Kurven I_{ϱ} und $I_{\varrho+d\varrho}$ überall im Abstand $d\varrho$ von einander laufen, so stellt $d\varrho |d\zeta_i|$ das Flächenelement dar, und das Integral repräsentiert den Inhalt der von den Bildkurven der Kurven I_{ϱ}^i erzeugten Fläche. Diese dagegen können nicht geometrisch interpretiert werden. Wir können aber zeigen, dass sie kleiner sind als die entsprechenden Flächeninhalte.

Dazu haben wir den kleinsten Abstand zwischen den Kurven $I_{\varrho}^{i,k}$ und $I_{\varrho+d\varrho}^{i,k}$ abzuschätzen. Dieser kleinste Abstand gehört notwendig zu einem Endpunkt des Querschnitts $I_{\varrho}^{i,k}$. Es genügt daher, dass wir den genannten Abstand für alle Querschnittsendpunkte bestimmen.

In Fig. 8 sei $OA = a_1$, $OB = a_2$ und M der Mittelpunkt des Kreises $I_{\varrho}^{i,k}$. Die Abstände der Kreise $I_{\varrho}^{i,k}$ und $I_{\varrho+d\varrho}^{i,k}$ an den beiden Endpunkten des Querschnitts nennen wir dn_1 und dn_2 . In den Fällen $k = 1, \dots, q-4$, wo die Kreise homothetisch sind, gilt $dn_1 : dn_2 = a_1 : a_2$.

Wenn wir die von den Querschnittsendpunkten beschriebenen Wege mit $|d\zeta_i^k|_1$ und $|d\zeta_i^k|_2$ bezeichnen, so gilt $dn_1 = |d\zeta_i^k|_1 \sin \varphi_1$, $dn_2 = |d\zeta_i^k|_2 \sin \varphi_2$, wobei φ_1 und φ_2 die Winkel sind, unter welchen $I_{\varrho}^{i,k}$ die von ihm getroffenen Halbkreise schneidet. Bezeichnet man nun die Ordinaten der Querschnittsendpunkte mit η_1 und η_2 und den Querschnittsradius mit R , und schreibt man statt λ_i^k einfacher λ , so erhält man durch leichte Rechnung

$$\sin \varphi_1 = \frac{\eta_1}{R} \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{\eta_2}{R} \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}.$$

Es wird also

$$(II) \quad \begin{aligned} dn_1 &= \left(\frac{\eta_1}{R}\right)^2 \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} R \frac{|d\zeta_i^k|_1}{\eta_1} \\ dn_2 &= \left(\frac{\eta_2}{R}\right)^2 \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} R \frac{|d\zeta_i^k|_2}{\eta_2} \end{aligned}$$

Ebenso folgt aus Fig. 8

$$d\varrho = |d\zeta_i| \sin \varphi \leq \frac{2(\varrho + 1)}{\varrho} \eta |d\zeta_i| \leq 4\eta^2 \cdot \frac{|d\zeta_i|}{\eta},$$

wenn man $\varrho \geq 1$ voraussetzt. Da nun die zugeordneten Randpunkte in den ζ_i - und ζ_i^2 -Ebenen durch lineare Transformationen ineinander übergehen, so gilt $\frac{|d\zeta_i|}{\eta} = \frac{|d\zeta_i^2|_1}{\eta_1}$ und folglich ist in der ζ_i^2 -Ebene

$$dn_1 = \left(\frac{\eta_1}{R}\right)^2 \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} R \frac{|d\zeta_i^2|}{\eta} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{\eta_1}{R\eta}\right)^2 \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} R d\varrho.$$

Der Ausdruck $\frac{\eta_1}{R\eta}$ nimmt für alle zugeordneten Halbkreispaare dieselben Werte an; es ist leicht zu sehen, dass sein Minimum positiv ist. Daher ist es klar, dass für genügend grosses M die Ungleichung

$$dn_1 > \frac{R d\varrho}{M}$$

für alle Werte ϱ gilt. Ferner liegt auf dem ganzen Bogen $I_\varrho^{i,2}$ der Quotient $\frac{|\zeta_i^2|}{R}$ unterhalb einer festen Schranke, woraus folgt, dass für ein noch grösseres M sogar

$$dn_1 > \frac{|\zeta_i^2| d\varrho}{M}$$

gelten wird. Da dn_2 zu dn_1 proportional ist, so erfüllt dn_2 eine ähnliche Ungleichung.

Vergleicht man dann die auf die ζ_i^2 -Ebene bezogene Grösse $\frac{dn_2}{|\zeta_i^2|}$ mit der zur ζ_i^2 -Ebene gehörigen Grösse $\frac{dn_1}{|\zeta_i^2|}$, so sieht man fast in derselben Weise ein, dass das Verhältnis dieser Grössen oberhalb einer festen positiven Schranke liegt. In der Tat folgt dieses sofort aus den Gleichungen (II), wenn man bedenkt, dass

die nicht-euklidischen Differentiale $\left| \frac{d\zeta_i^2}{\eta_2} \right|_2$ und $\left| \frac{d\zeta_i^2}{\eta_1} \right|_1$ in den betrachteten Ebenen einander gleich sind, und dass das Verhältnis der Grössen $\frac{\eta_2}{R}$ und $\frac{\eta_1}{R}$ ¹ ein positives Minimum hat. In dieser Weise fortsetzend erkennt man schliesslich, dass für ein gewisses M die Ungleichung

$$\text{Min} (dn_1, dn_2) > \frac{|\zeta_i^k| d\varrho}{M}$$

für alle ζ_i^k -Ebenen richtig ist. Allerdings sind in der ζ_i^{q-2} -Ebene dn_1 und dn_2 nicht mehr proportional; dafür kann aber auf dn_2 in der letzten Ebene genau dieselbe Überlegung angewandt werden wie auf dn_1 in der ersten Ebene.

Wählt man nun M in (9) gemäss der oben gestellten Forderung, so ist es klar, dass das Integral (10) kleiner sein wird als das Flächenintegral

$$\iint \left| \frac{ds}{d\zeta_i^k} \right|^2 d\omega$$

ausgestreckt über das von den Kurven $I_{\varrho}^{i,k}$ gebildete Gebiet. Denn das Flächenelement ist grösser als $|d\zeta_i^k| \cdot \text{Min} (dn_1, dn_2)$ und also grösser als $\frac{|\zeta_i^k| |d\zeta_i^k| d\varrho}{M}$.

Dieses Integral stellt die Grösse der Bildfläche des genannten Gebiets dar. Führt man in (9) die Integration zwischen den Grenzen ϱ' und ϱ'' aus, so erhält man also auf der rechten Seite einen Ausdruck, der kleiner ist als der Gesamthalt einer Fläche, die einerseits von den Bildkurven der Kurven $I_{\varrho'}$ und $I_{\varrho''}$, andererseits von den Geraden $\Im(s) = 0$ und $\Im(s) = 2\pi$ begrenzt wird. Daher wird

$$\frac{4\pi}{q} \log \frac{\varrho'' + K}{\varrho' + K} + \frac{1}{q\pi} \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\omega(\varrho)^2}{\varrho + K} d\varrho \leq 2\pi \log \frac{r_2(\varrho'')}{r_1(\varrho')}$$

oder

$$(2') \quad 2 \log \frac{\varrho''}{\varrho'} - \log \frac{r_1(\varrho'')}{r_1(\varrho')} \leq \omega(\varrho'') - \frac{1}{2q\pi^2} \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\omega(\varrho)^2}{\varrho + K} d\varrho + O\left(\frac{1}{\varrho'}\right).$$

Diese Ungleichung entspricht der Ungleichung (2) in Nr. 4.

¹ R hat in den beiden Ebenen verschiedene Bedeutung.

Genau wie im Falle $q = 3$ kann man aus dieser Ungleichung zunächst schliessen, dass $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} r_1(\varrho) = \infty$ ist, d. h. dass das Existenzgebiet von $w(z)$ die ganze Ebene ist. Wir sind also berechtigt die Figur 6 als Figur in der z -Ebene aufzufassen. Es sei $\theta_i(r)$ der Zentriwinkel desjenigen auf dem Kreise $|z| = r$ gelegenen Bogens, der den linken Ufer von C_i^{q-1} mit dem rechten Ufer von C_{i+1}^2 verbindet. Diese Bogen sind alle punktfremd und genügen folglich der Bedingung $\sum_1^q \theta_i(r) \leq 2\pi$.

Man beweist nun genau wie auf S. 385 die Ungleichungen

$$\pi \int_{r_2(\varrho')}^{r_1(\varrho'')} \frac{dr}{r\theta_i(r)} \leq \log \frac{\varrho''}{\varrho'} + O\left(\frac{1}{\varrho'}\right), \quad (i = 1, \dots, q).$$

Durch Addition folgt

$$\pi \sum_1^q \int_{r_2(\varrho')}^{r_1(\varrho'')} \frac{dr}{r\theta_i(r)} \leq q \log \frac{\varrho''}{\varrho'} + O\left(\frac{1}{\varrho'}\right)$$

und, wenn man die Ungleichung

$$\sum_1^q \frac{1}{\theta_i(r)} \geq \frac{q^2}{\sum_1^q \theta_i(r)} \geq \frac{q^2}{2\pi}$$

benützt,

$$\frac{q}{2} \log \frac{r_1(\varrho'')}{r_2(\varrho')} \leq \log \frac{\varrho''}{\varrho'} + O\left(\frac{1}{\varrho'}\right)$$

oder

$$(5') \quad \frac{2}{q} \log \frac{\varrho''}{\varrho'} - \log \frac{r_1(\varrho'')}{r_1(\varrho')} \geq -\omega(\varrho') + O\left(\frac{1}{\varrho'}\right).$$

Zusammen mit (2') ergibt sich also

$$(6') \quad \omega(\varrho') + \omega(\varrho'') \geq \frac{1}{2q\pi^2} \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\omega(\varrho)^2}{\varrho + K} d\varrho + O\left(\frac{1}{\varrho'}\right),$$

und aus dieser Ungleichung lässt sich wie in Nr. 6 schliessen, dass

$$\omega(\varrho) = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log \varrho}}\right)$$

ist.

Aus den Ungleichungen (2') und (5') folgt dann die asymptotische Darstellung

$$r_1(\varrho) = A\varrho^{\frac{2}{3}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log \varrho}}\right)\right)$$

$$r_2(\varrho) = A\varrho^{\frac{2}{3}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log \varrho}}\right)\right),$$

wo A eine Konstante ist.

Die Anzahl $n(r, a)$ der im Kreise $|z| < r$ gelegenen a -Stellen der Funktion $w(z)$ erhält man nun sofort, wenn man beachtet, dass

$$n(r_1(\varrho), a) \leq n(\varrho, a) \leq n(r_2(\varrho), a)$$

ist, und die asymptotischen Darstellungen von $\nu(\varrho, a)$ S. 396 verwendet. Man findet so

$$n(r, a) = qA'r^{\frac{q}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log r}}\right)\right) \text{ für } a \neq a_1, \dots, a_q,$$

$$n(r, a_i) = (q-2)A'r^{\frac{q}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log r}}\right)\right), \quad (i = 1, \dots, q),$$

wo $A' = A^{-\frac{q}{2}}$.

Also ist auch

$$n(r) = \text{Max } n(r, a) = qA'r^{\frac{q}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log r}}\right)\right),$$

d. h. $w(z)$ ist eine meromorphe Funktion vom mittleren Typus der Ordnung $\frac{q}{2}$. Ihre einzigen defekten Werte sind a_1, a_2, \dots, a_q mit den Defekten

$$\delta(a_i) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r) - n(r, a_i)}{n(r)} = \frac{2}{q}.$$

Die Defektsumme ist $q \cdot \frac{2}{q} = 2$.

B. 12. Wir haben dann noch den Fall zu erledigen, wo nicht alle Singularitäten ohne Umlauf der Punkte a_i erreichbar sind. In diesem Falle kann es eintreffen, dass über demselben Punkt a_i mehrere, etwa μ_i , Singularitäten liegen.

Die Summe $n = \sum_1^q \mu_i$ gibt die Gesamtanzahl der verschiedenen Singularitäten.

Die Struktur der Riemannschen Fläche F' geht nach NEVANLINNA aus einem Polygon mit n Ecken hervor, von denen μ_1 mit a_1 , μ_2 mit a_2 usw. bezeichnet sind. Dieses Grundpolygon ist noch durch einander nicht schneidende Diagonale in Teilpolygone von der Eigenschaft zerlegt, dass keine gleichbezeichnete Eckpunkte als Ecken desselben Teilpolygons auftreten. Jeder Diagonale wird

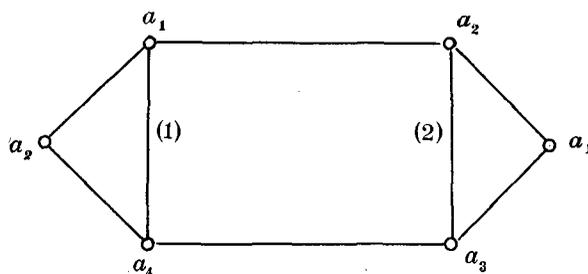


Fig. 9.

noch eine ganze Zahl zugeordnet, welche angibt, wie vielfach die betreffende Diagonale zu zählen ist. In Fig. 9 ist ein Schema für $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $\mu_3 = \mu_4 = 1$ gezeichnet; die Diagonale (a_1, a_4) wird einfach, die Diagonale (a_2, a_3) doppelt gerechnet.

Die Bedeutung der schematischen Figur ist folgende: Jedem Teilpolygon entspricht ein Blatt der Riemannschen Fläche F' , und in diesem Blatt sind diejenigen Punkte a_i singularär, die unter den Ecken des Teilpolygons vorkommen. Dabei werden auch die k -fachen Diagonale als $k - 1$ aneinander gelegte Zweiecke aufgefasst, und geben mithin zu Blättern mit nur zwei Singularitäten Anlass. Die Blätter hängen in der von der schematischen Figur angegebenen Weise zusammen. Schliesslich werden noch an die Seiten des Grundpolygons »logarithmische Enden« angehängt, die aus unendlich vielen, nur um die zwei zu den Endpunkten der betreffenden Seite gehörigen Punkte herumgewundenen Blättern bestehen.

Die zwei Singularitäten des i -ten logarithmischen Endes seien a_{i_1} und a_{i_2} ; die übrigen Punkte bezeichnen wir in einer beliebigen Reihenfolge mit $a_{i_3}, a_{i_4},$

$\dots, a_{i_{q-1}}$. Die Fläche F wird genau wie in den vorhin behandelten Fällen längs Schnitten C_i^k aufgeschnitten, die durch alle zu dem v -ten logarithmischen Ende gehörigen regulären Punkte über a_{i_k} hindurchgehen. Die Kurve C_i^k soll um die Punkte $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{k-1}}$ im negativen und um die Punkte $a_{i_{k+1}}, a_{i_{k+2}}, \dots, a_{i_q}$ im positiven Sinn herumlaufen. Die einzelnen Umläufe sollen genau übereinander liegen und in der $\zeta = \zeta(w, a_1, \dots, a_q)$ -Ebene auf Orthogonalkreisbogen des Einheitskreises abgebildet werden.

Als dann werden noch die regulären Punkte des Grundpolygons in willkürlicher Weise mit den Endpunkten der Kurven C_i^k verbunden durch Kurvenstücke, die einander nicht schneiden dürfen, sonst aber völlig beliebig sind. Die endgültigen Schnitte, deren Anzahl $n(q-2)$ ist, bestehen also aus je einer der Kurven C_i^k nebst einem angehängten Kurvenstück, das durch einen oder mehrere der Punkte a_v des Grundpolygons hindurchgeht.

Auf der so aufgeschnittenen Fläche F wird jeder Zweig von $\zeta(w)$ eindeutig. Dem Anfangspunkt des Schnittes C_i^k entsprechen aber jetzt im allgemeinen zwei verschiedene Punkte auf der Peripherie des Einheitskreises, etwa $S'_{i,k} \varepsilon_{i_k}$ und $S''_{i,k} \varepsilon_{i_k}$, wo $S'_{i,k}$ und $S''_{i,k}$ gewisse Transformationen aus der Gruppe S sind, in bezug auf welche die Funktion $\zeta(w)$ automorph ist. Da man auf der aufgeschnittenen Fläche vom Anfangspunkt des Schnittes C_i^2 zum Anfangspunkt von C_{i-1}^{q-1} kommen kann, indem man nur den Punkt $a_{i_1} = a_{(i-1)_q}$ zweimal im positiven Sinn umläuft, so ist $S''_{i-1, q-1} \equiv S'_{i, 2} S_{i_1}^2$. Die Anfangspunkte der Schnitte C_i^k und C_i^{k+1} ($k = 2, \dots, q-2$) können ohne irgendeinen Umlauf verbunden werden. Demnach ist $S'_{i, k+1} \equiv S''_{i, k}$.

Zu den übrigen Punkten a_{i_k} auf dem linken Ufer von C_i^k gehören die Punkte $S'_{i,k} T'_{i,k}{}^\lambda \varepsilon_{i_k}$, $\lambda = 1, 2, \dots$. Hierbei ist $T'_{i,k} = S_{i_1}^{-1} S_{i_2}^{-1} \dots S_{i_{k-1}}^{-1}$. Zu den Punkten auf dem rechten Ufer gehören die Punkte $S''_{i,k} T''_{i,k}{}^\lambda \varepsilon_{i_k}$, $\lambda = 1, 2, \dots$, wo $T''_{i,k} = S_{i_q} S_{i_{q-1}} \dots S_{i_{k+1}}$. Die Bilder der beiden Ufer erhält man, wenn man die zwischenliegenden Orthogonalkreisbogen zeichnet. Diese Kreisbogen häufen sich gegen die Punkte $S'_{i,k} \omega'_{i,k}$ und $S''_{i,k} \omega''_{i,k}$, wo $\omega'_{i,k}$ und $\omega''_{i,k}$ die anziehenden Fixpunkte der Transformationen $T'_{i,k}$ und $T''_{i,k}$ bezeichnen. Für $k = 2, \dots, q-2$ gilt wieder $\omega''_{i,k} = \omega'_{i, k+1}$, denn $T''_{i,k} \equiv T'_{i, k+1}$. Insgesamt gibt es n parabolische und $n(q-3)$ hyperbolische Häufungspunkte, denn wegen der oben bewiesenen

Relationen ist $S'_{i,2} \varepsilon_{i_1} = S''_{i-1, q-1} S_{i_1}^{-2} \varepsilon_{i_1} = S''_{i-1, q-1} \varepsilon_{i_1} = S''_{i-1, q-1} \varepsilon_{(i-1)_{q-1}}$ und $S''_{i,k} \omega''_{i,k} = S'_{i, k+1} \omega''_{i,k} = S'_{i, k+1} \omega'_{i, k+1}$.

Der Übergang zur ζ_i -Ebene geschieht dann durch eine lineare Transformation, welche den Punkt $S'_{i,2} \varepsilon_{i_1} = S''_{i-1, q-1} \varepsilon_{(i-1)_q}$ ins Unendliche wirft, und bei welcher der zugehörigen parabolischen Transformation eine Translation um eine Einheit entspricht. Die Rollen der Punkte A und B in Fig. 8 werden von den zu $S'_{i,2} \varepsilon_{i_2}$ und $S''_{i-1, q-1} \varepsilon_{(i-1)_{q-1}}$ gehörigen Bildpunkten übernommen. Alsdann kann man die Querschnitte I^i_ϱ in derselben Weise definieren wie vorhin. Zur ζ_i^k -Ebene kommt man durch eine Transformation, welche den Punkt $\omega'_{i,k}$ in den Punkt ∞ überführt. Auch die Definitionen von $I^{i,k}_\varrho$ können ohne weiteres übernommen werden.

Man kann nun denselben Beweis wie im vorigen Abschnitt durchführen. An die Stelle von q kommt jetzt die Anzahl n der parabolischen Fixpunkte, d. h. die Anzahl der verschiedenen logarithmischen Singularitäten. Als Endresultat bekommt man also die asymptotische Darstellung

$$r_1(\varrho) = A \varrho^{\frac{2}{n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log \varrho}}\right) \right)$$

$$r_2(\varrho) = A \varrho^{\frac{2}{n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log \varrho}}\right) \right).$$

Ebenso erhält man hieraus für $a \neq a_1, \dots, a_q$

$$n(r, a) = n A' r^{\frac{2}{n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log r}}\right) \right).$$

Die a_i -Stellen fehlen in allen logarithmischen Enden, deren eine Singularität gleich a_i ist. Da die Anzahl dieser Enden $2\mu_i$ ist, so folgt

$$n(r, a_i) = (n - 2\mu_i) A' r^{\frac{2}{n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log r}}\right) \right).$$

Also ist

$$n(r) = \text{Max } n(r, a) = n A' r^{\frac{2}{n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log r}}\right) \right)$$

und

$$\delta(a_i) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r) - n(r, a_i)}{n(r)} = \frac{2\mu_i}{n}.$$

Alle Funktionen $w(z)$, deren Umkehrfunktionen keine algebraische und nur eine endliche Anzahl n von transzendenten Singularitäten besitzen, von denen μ_1 über a_1 , μ_2 über a_2 , usw. endlich μ_q über a_q gelegen sind, sind in der ganzen z -Ebene meromorphe Funktionen vom mittleren Typus der Ordnung $\frac{n}{2}$, welche nur die defekten Werte a_1, a_2, \dots, a_q mit den Defekten

$$\delta(a_v) = \frac{2\mu_v}{n}$$

besitzen. Die totale Defektsumme beträgt $\sum_1^q \frac{2\mu_v}{n} = 2$.

13. Es verdient schliesslich hervorgehoben zu werden, dass das obige Resultat auch für solche Funktionen $w(z)$ gilt, deren Umkehrfunktionen ausser den n transzendenten Singularitäten noch eine endliche Anzahl von algebraischen Singularitäten aufweisen. Um dieses zu beweisen müssen die Punkte, über welchen die algebraischen Verzweigungspunkte liegen, zu den Punkten a_i mitgerechnet werden, und bei der Aufschneidung der Riemannschen Fläche muss dafür gesorgt werden, dass die Schnitte auch durch alle algebraischen Singularitäten hindurchgehen. Da dieses auf die logarithmischen Enden keine Einwirkung hat, so wird man den Beweis genau in der obigen Weise durchführen.

Der bedeutungsvollste Punkt in der vorhergehenden Untersuchung war die Bestimmung des asymptotischen Verhaltens der fuchsoiden Funktion $z(\zeta)$ in der Umgebung der Ecken des Fundamentalgebiets. Die Anwendung auf die Wertverteilung der Funktion $w(z)$ ergab sich dann fast von sich selbst.

Unabhängig von dieser Anwendung besitzt die oben verwendete Methode auch eine allgemeine Bedeutung, welche darin liegt, dass sie die Bestimmung des asymptotischen Verhaltens einer fuchsschen oder fuchsoiden Funktion in der Umgebung einer Ecke ihres Fundamentalgebiets direkt aus dem Gestalt dieses Gebiets gestattet. Bekanntlich bietet diese Aufgabe bei Verwendung anderer Methoden erhebliche Schwierigkeiten.