SUR LES GÉNÉRALISATIONS DE QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE ET SUR CERTAINS CYCLES DE CONGRUENCES.

PAR

PAUL VINCENSINI

à BESANÇON.

Introduction.

Les généralisations dont il s'agit dans ce Mémoire portent sur des questions se rapportant à des figures contenant des éléments orthogonaux, et, plus spécialement, des réseaux et des congruences orthogonaux.

Nous nous demanderons ce que deviennent certains problèmes relatifs à des congruences ou à des réseaux orthogonaux, ou comment se transforment certaines propriétés de ces congruences ou de ces réseaux lorsque, à l'angle droit qui sert à les définir, on substitue un angle constant ω arbitraire.

Nous appellerons *congruences* (ω), les congruences telles que les deux plans focaux issus d'un même rayon quelconque fassent l'angle constant ω; de même, les *réseaux* (ω), seront les réseaux tels que les tangentes aux courbes conjuguées issues d'un même point quelconque, forment l'angle constant ω.

Si, avec C. Guichard, nous appellons réseaux parallèles des réseaux se correspondant avec parallélisme des tangentes homologues, et congruences parallèles des congruences se correspondant avec parallélisme des rayons homologues et correspondance des développables, nous pouvons dire que tout réseau (ou toute congruence) parallèle à un réseau (ω) (ou à une congruence (ω)) est un réseau (ω) (ou une congruence (ω)).

Un réseau et une congruence sont *orthogonaux* (C. Guichard), s'il existe entre les points du réseau et les droites de la congruence une correspondance telle que chaque droite de la congruence soit orthogonale au plan correspondant du réseau (plan déterminé par les tangentes aux courbes du réseau issues du point

19—3932. *Acta mathematica*. 71. Imprimé le 3 juillet 1939.

correspondant), et si, en outre, les développables (u, v) de la congruence correspondent aux courbes (u, v) du réseau.

Si un réseau et une congruence sont orthogonaux, et si l'on applique des transformations successives de Laplace, dans un sens déterminé (u par exemple), au réseau et à la congruence, on obtient deux suites d'éléments tels que deux éléments de même rang dans les deux suites (l'un est un réseau et l'autre une congruence) soient orthogonaux. Il résulte immédiatement de là, que tout réseau orthogonal à une congruence (ω) est un réseau (ω) et inversement.

Le numéro (5) de ce Mémoire porte sur une nouvelle généralisation des congruences d'Appell, congruences normales admettant un point pour enveloppée moyenne (enveloppe des plans perpendiculaires aux segments focaux en leurs milieux). L. Bianchi[1] a étudié les congruences, plus générales, assujetties seulement à avoir un point pour enveloppée moyenne, et les congruences d'Appell ainsi généralisées interviennent dans de nombreuses questions géométriques. Dans le Mémoire actuel la généralisation porte à la fois sur l'angle des plans focaux (que nous supposerons simplement constant), et sur la propriété de l'enveloppée moyenne (les plans moyens seront remplacés par les plans perpendiculaires aux segments focaux partageant ces segments dans un rapport constant). L'étude à laquelle on est ainsi conduit fournit, elle aussi, de nombreuses propriétés géométriques, dont certaines peuvent être formulées en énoncés particulièrement élégants. Nous nous permettons ici d'attirer l'attention sur les propriétés des cycles de transformations $T(0, \alpha)$ étudiés à la fin du numéro (5). Notre étude repose sur des formules générales établies dans un Mémoire de la *Société mathématique de Moscou*[2] auquel nous aurons à nous reporter.

1. — Réseaux et congruences (ω).

Toute surface S non sphérique porte, quelque soit l'angle constant ω $\left(0 < \omega < \frac{\pi}{2}\right)$, *deux* réseaux (ω) que l'on peut construire de la façon suivante. MX et MY étant les deux tangentes aux lignes de courbure en un point quelconque M de S, il existe, dans l'angle $\widehat{XMY}$ et son opposé par le sommet, deux droites MT_1, MT_2, faciles à déterminer si l'indicatrice des courbures de S est connue en chaque point, faisant l'angle ω avec leurs conjuguées MT'_1, MT'_2. Les deux familles de courbes de S, tangentes en chaque point M à MT_1, MT'_1,

---

[1] L. Bianchi. *Lezioni di geometria differenziale,* 3e édition, t. I.

[2] P. Vincensini. *Recueil de la Soc. math. de Moscou,* 40, 1933, p. 467.

forment un réseau (ω); de même MT_2, MT'_2 définissent un deuxième réseau (ω). Ces deux réseaux sont les seuls réseaux (ω) portés par S, et, en faisant varier S, on obtient tous les réseaux (ω) de l'espace. Ces réseaux peuvent être réels ou imaginaires; si S est à courbures opposées, les deux réseaux sont toujours réels quelque soit ω. Il est clair d'ailleurs, qu'en un même point M, les tangentes aux courbes de l'un des réseaux sont symétriques des tangentes de l'autre par rapport aux axes de l'indicatrice relative au point M. Le réseau des lignes de courbure de S apparaît comme un réseau (ω) *double*.

Si S est développable, les deux réseaux (ω) portés par S ont une famille de courbes en commun, savoir la famille des génératrices rectilignes de S; les deux familles de trajectoires des génératrices rectilignes sous l'angle ω achèvent de déterminer les deux réseaux. Dans tout ce qui suit, les surfaces S que nous envisagerons ne seront ni développables ni sphériques.

Considérons une congruence quelconque C *orthogonale* à un réseau (ω), c'est-à-dire, comme on l'a rappelé dans l'Introduction, telle que chaque rayon de la congruence soit orthogonal à un plan tangent du réseau et que les développables de la congruence correspondent aux courbes du réseau. Les deux plans focaux de la congruence C, issus de l'un quelconque de ses rayons, sont orthogonaux aux tangentes correspondantes du réseau (ω) envisagé. Il en résulte que l'angle des plans focaux de la congruence C est constant et égal à ω; C est une congruence (ω). L'ensemble des congruences (ω) est associé, par orthogonalité, à l'ensemble des réseaux (ω).

La détermination des congruences orthogonales à un réseau donné dépend, comme l'on sait, d'une équation de Laplace, que l'on sait former dès que le réseau est connu. A toute surface S, et pour une valeur déterminée de l'angle ω, on peut donc associer deux familles de congruences (ω) dépendant de deux équations (distinctes) de Laplace E_1, E_2, les congruences des deux familles s'associant par couples à plans focaux symétriques par rapport aux plans principaux de S. Lorsque l'angle ω varie, les deux équations E_1, E_2 varient en restant distinctes, pour se confondre lorsque $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Comme surfaces S donnant lieu à des réseaux (ω) particulièrement faciles à construire, nous signalerons les surfaces minima et, d'une façon plus générale, les surfaces pour lesquelles $\frac{R_1}{R_2} = \text{const.}$, R_1 et R_2 étant les deux rayons de courbure principaux en chaque point. Pour une surface S telle que $\frac{R_1}{R_2} = K$ (const.), les indicatrices aux différents points sont semblables; si donc on considère une famille quelconque de courbes isogonales aux lignes de courbure de l'un des systèmes (et par suite aussi à celles de l'autre), la famille conjuguée est isogonale à la famille initiale, et l'ensemble des deux familles constitue un réseau (ω).

Si S est minima, les différents réseaux (ω) portés par S sont constitués par les différents couples de familles de courbes coupant un système d'asymptotiques sous des angles égaux et de sens contraires.

2. — **Congruences et réseaux de Voss et de Guichard généralisés.**

Pour donner un premier exemple des généralisations auxquelles il est fait allusion dans l'Introduction, substituons les réseaux (ω) aux réseaux orthogonaux, dans la définition des congruences (de Guichard) dont les développables découpent sur les deux nappes focales les réseaux des lignes de courbure. Nous sommes ainsi amenés à étudier les congruences dont les deux réseaux focaux sont (ω), ou, ce qui revient au même, les réseaux (ω) se transformant en réseaux (ω) par une transformation de Laplace.

Conformément à un procédé de représentation des congruences dû à C. Guichard (*voir, par exemple*, L. Bianchi, *géometrie différentielle*, t. I, 3$^{\text{ème}}$ edition, chap. X, p. 483 et suivantes), supposons une congruence répondant à la question rapportée à ses développables (u, v). Soit

$$(1) \qquad d\sigma^2 = \alpha^2\, du^2 + 2\,\alpha\beta \cos\theta\, du\, dv + \beta^2\, dv^2$$

l'élément linéaire de la représentation sphérique de la congruence; θ est l'angle des plans focaux, et α, β, θ sont trois fonctions de u, v vérifiant l'équation de Gauss qui exprime que la courbure de la forme (1) est égale à l'unité

$$(2) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b\beta}{\alpha}\sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a\alpha}{\beta}\sin\theta\right) + \alpha\beta\sin\theta = 0,$$

où l'on a

$$(3) \qquad \begin{cases} a = \left\{ {12 \atop 1} \right\} = \dfrac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial v} - \cos\theta\dfrac{\partial\beta}{\partial u}}{\alpha\sin^2\theta}, \\[2ex] b = \left\{ {12 \atop 2} \right\} = \dfrac{\dfrac{\partial\beta}{\partial u} - \cos\theta\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}}{\beta\sin^2\theta}. \end{cases}$$

Prenons pour surface de départ de la congruence la surface moyenne, et désignons par x, y, z les cordonnées du point moyen sur le rayon (u, v) et par 2ϱ la distance des deux foyers F_1, F_2 portés par ce rayon. Si $F_1(x_1, y_1, z_1)$ et $F_2(x_2, y_2, z_2)$ correspondent respectivement aux courbes $u\,(v = \text{const.})$ et $v\,(u = \text{const.})$, les deux nappes focales (F_1) et (F_2) de la congruence sont définies par les équations

$$F_1) \qquad x_1 = x + \varrho X, \qquad y_1 = y + \varrho Y, \qquad z_1 = z + \varrho Z,$$

$$F_2) \qquad x_2 = x - \varrho X, \qquad y_2 = y - \varrho Y, \qquad z_2 = z - \varrho Z,$$

X, Y, Z étant les cosinus directeurs du rayon (u, v) c'est-à-dire les coordonnées du point (u, v) de la sphère unitaire donnant à l'élément linéaire de celle-ci la forme (1).

En exprimant que les développables de la congruence correspondent aux variations respectives de u et de v, on est conduit, pour ϱ, à l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u\, \partial v} + a \frac{\partial \varrho}{\partial u} + b \frac{\partial \varrho}{\partial v} + \left(\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} + \alpha\beta \cos\theta\right) \varrho = 0.$$

Toute solution de (4) fournit une congruence, rapportée à ses développables, dont la surface moyenne est définie par le système intégrable

$$(4') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + 2 b\varrho\right) X - \varrho \dfrac{\partial X}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\left(\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + 2 a\varrho\right) X + \varrho \dfrac{\partial X}{\partial v}. \end{cases}$$

Les éléments linéaires des deux nappes focales (F_1), (F_2) sont

$$ds_1^2 = e_1\, du^2 + 2 f_1\, du\, dv + g_1\, dv^2,$$

$$ds_2^2 = e_2\, du^2 + 2 f_2\, du\, dv + g_2\, dv^2,$$

avec

$$(5) \qquad \begin{cases} e_1 = 4\left(\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + b\varrho\right)^2, \qquad f_1 = -4 a\varrho\left(\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + b\varrho\right), \qquad g_1 = 4\varrho^2(a^2 + \beta^2), \\[2ex] e_2 = 4\varrho^2(b^2 + \alpha^2), \qquad f_2 = -4 b\varrho\left(\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + a\varrho\right), \qquad g_2 = 4\left(\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + a\varrho\right)^2. \end{cases}$$

Les équations (5) montrent que, pour les congruences qui nous intéressent, et en désignant par ω l'angle constant sous lequel se coupent les courbes des deux réseaux focaux, on doit avoir

$$\frac{a^2}{a^2+\beta^2}=\frac{b^2}{b^2+\alpha^2}=\cos^2\omega,$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{\beta}{a}=\pm\frac{\alpha}{b}=\operatorname{tang}\omega.$$

En tenant compte des expressions (3) de a, b, l'équation

$$\frac{\beta}{a}=\pm\frac{\alpha}{b}$$

s'écrit

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v}\pm\frac{\partial\beta}{\partial u}=0,$$

d'où l'on déduit, φ étant une nouvelle fonction inconnue

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u},\\[2mm] \beta=\pm\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}.\end{cases}$$

Le double signe n'a pas d'influence sur la forme générale de l'élément linéaire de la représentation sphérique. Moyennant un changement de notations, cet élément linéaire peut toujours être mis sous la forme

$$(6)\qquad d\sigma^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2du^2+2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cos\theta\,du\,dv+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2dv^2.$$

Dans la suite nous nous bornerons à prendre $\alpha=\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\beta=\frac{\partial\varphi}{\partial v}$; le problème est alors ramené à l'intégration du système formé par l'une des deux équations $\frac{\beta}{a}\left(\text{ou }\frac{\alpha}{b}\right)=\operatorname{tang}\omega$ et l'équation (2) de Gauss, soit en explicitant ces deux équations et en tenant compte de la première dans l'équation de Gauss

$$(7)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}=2\operatorname{cotg}\omega\cos^2\dfrac{\theta}{2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v},\\[3mm] \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+2\operatorname{cotg}\omega\sin\theta\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\sin\theta\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+\\[3mm] \qquad+\operatorname{cotg}\omega\cos\theta\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)=0.\end{cases}$$

Toute solution (φ, θ) du système (7) définit une infinité de congruences du type envisagé, toutes parallèles entre-elles, et dont la détermination effective exige l'intégration de (4), (4').

Le système (7) met en évidence, pour les congruences qui nous intéressent, un procédé de transformation analogue à la transformation de Sophus Lie pour les surfaces pseudosphériques. Si $[\varphi(u,v),\ \theta(u,v)]$ est une solution de système (7), on a immédiatement une nouvelle solution $[\varphi_1, \theta_1]$ *dépendant d'une constante arbitraire k,* en posant

$$\theta_1(u,v) = \theta\left(ku,\ \frac{v}{k}\right),$$

$$\varphi_1(u,v) = \varphi\left(ku,\ \frac{v}{k}\right).$$

La transformation précèdente fournit, à partir d'une congruence déterminée du type envisagé, ∞^1 congruences du même type définies au parallélisme près.

Nous n'entrerons pas dans le détail de la recherche explicite des congruences dont les deux réseaux focaux sont (ω), recherche qui, même dans le simple cas de Guichard $\left(\omega = \frac{\pi}{2}\right)$, ne peut être effectuée complètement. Nous nous contenterons ici, de voir ce que deviennent certaines propriétés géométriques des congruences de Guichard, lorsqu'on passe aux congruences plus générales que nous envisageons.

Il est bien connu que les congruences de Guichard sont des congruences de Ribaucour, c'est-à-dire des congruences dont les développables déterminent sur la surface moyenne un réseau conjugué (à invariants nécessairement égaux). L'image sphérique des développables d'une congruence de Ribaucour est celle des asymptotiques d'une certaine surface, dite *génératrice* de la congruence (condition nécessaire et suffisante), et, pour les congruences de Guichard, les surfaces génératrices sont les surfaces pseudosphériques. Il est facile de voir que la propriété que possèdent les congruences de Guichard de rentrer dans le type de Ribaucour, *est dûe à l'égalité et à l'invariance des angles des courbes des deux réseaux focaux, et appartient par suite aux congruences plus générales étudiées ici.*

Avec les notations employées, la condition necessaire et suffisante pour qu'une congruence soit de Ribaucour est

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v}.$$

Pour les congruences envisagées on a

$$a = \beta \operatorname{cotg} \omega,$$

$$b = \alpha \operatorname{cotg} \omega,$$

d'où, en tenant compte des expressions de α et β $\left(\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \ \beta = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)$.

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v} = \operatorname{cotg} \omega \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v},$$

ce qui prouve bien que les congruences sont de Ribaucour.

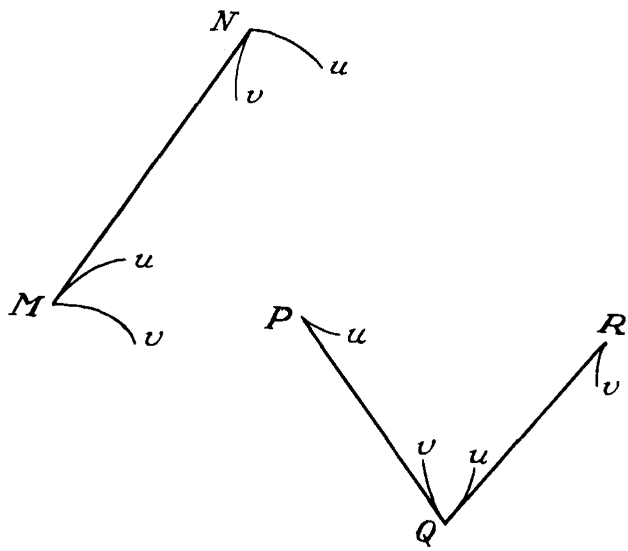

Fig. 1.

Les développables de ces congruences admettent même image sphérique que les asymptotiques de certaines surfaces (génératrices), qu'il serait intéressant d'étudier, et qui peuvent, en un certain sens, être considérées comme une généralisation des surfaces pseudosphériques.

En liaison intime avec les congruences de Guichard sont les réseaux de Voss, constitués par deux familles de géodésiques de certaines surfaces (surfaces de Voss). Considérons une congruence de Guichard (MN). Soient (M) le premier réseau focal (celui sur lequel les courbes u sont arètes de rebroussement) et (N) le second (fig. 1); les deux réseaux (M) et (N) sont orthogonaux, et l'on passe de (M) à (N) par une transformation de Laplace effectuée dans le sens u. Désignons par (PQ) une congruence quelconque orthogonale au réseau (M), (P) étant le premier réseau focal de la congruence et (Q) le second; cette congruence est, comme l'on sait, normale. Si l'on transforme simultanément, par la méthode de Laplace, dans le sens u, le réseau (M) et la congruence (PQ), on obtient, comme éléments transformés, le réseau (N), et la congruence (QR) formée par les tangentes aux courbes u du réseau (Q). (QR) et (N), premiers éléments transformés de Laplace, dans le sens d'une même variable, d'une congruence et d'un réseau orthogonaux, sont orthogonaux. La congruence (QR), orthogonale au réseau (N) qui est orthogonal, est donc normale. Le réseau (Q), deuxième réseau focal de la congruence (PQ), a pour tangentes les rayons de deux congruences normales; c'est un *réseau de Voss*, porté par la surface (de Voss) Q sur laquelle les courbes u et v sont géodésiques.

Le procédé par lequel les réseaux de Voss sont rattachés aux congruences de Guichard peut être appliqué aux congruences dont les deux réseaux focaux sont (ω); il permet alors de rattacher à ces dernières congruences les réseaux (généralisant ceux de Voss) dont les deux congruences focales (formées respectivement par les tangentes aux courbes u et v) sont (ω).

Supposons que dans la figure (1) la congruence (MN) jouisse de la propriété indiquée [les réseaux (M) et (N) sont (ω)]. La congruence (PQ), orthogonale au réseau (M) est (ω); sa transformée (QR) de Laplace dans le sens u, est orthogonale au réseau (N), et est par suite aussi (ω). Le réseau (Q), associé à la congruence (MN), jouit donc de la propriété que *ses deux congruences focales sont des congruences* (ω).

Les supports des réseaux tels que (Q) sont des surfaces spéciales, généralisant les surfaces de Voss admettant un système conjugué formé de géodésiques, et qui peuvent être caractérisées par la propriété géométrique suivante permettant une étude directe des réseaux envisagés. Les deux plans focaux de la congruence (PQ) sont, le plan tangent à la surface portant le réseau (Q) consideré, et le plan osculateur en Q à la courbe v de cette surface. Ces deux plans se coupant sous l'angle ω, on peut dire que, sur la surface (Q), les courbes v sont telles que *leurs différents plans osculateurs font l'angle constant ω avec les plans tangents correspondants;* les courbes u jouissent de la même propriété. Les surfaces de Voss correspondent à $\omega = \frac{\pi}{2}\cdot$

Les réseaux de Voss restent tels, comme l'on sait, par une déformation continue convenable de leurs surfaces supports. Il n'en est pas de même pour les réseaux (Q) qui les généralisent. Ces derniers *admettent cependant une défor-*

mation infinitésimale. La représentation sphérique de l'un de ces réseaux est en effet celle des développables de la congruence (MN) correspondante, et, pour cette représentation, on a, comme on l'a vu plus haut

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v},$$

ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une déformation infinitésimale de la surface support du réseau, au cours de laquelle le réseau reste conjugué.

3. — Congruences (ω) du type de Ribaucour.

On pourrait se demander s'il existe des congruences (ω) dont les deux réseaux focaux sont (ω) (les angles constants ω_1, ω_2 des plans focaux d'une telle congruence et de ses réseaux focaux étant ou non égaux). On constate, qu'en dehors des congruences paraboliques, correspondant à $\omega_1 = \omega_2 = 0$, il n'existe aucune congruence du type indiqué. On peut obtenir des problèmes intéressants en laissant l'un seulement des deux angles ω_1, ω_2 constant, et en substituant à l'invariance de l'autre des conditions géométriques convenables. Demandons nous quelles sont les congruences (ω) appartenant au type de Ribaucour.

Pour ces congruences, les surfaces génératrices jouissent de cette propriété que leurs lignes asymptotiques se coupent sous un angle constant ω. Les génératrices sont donc les surfaces (S) pour lesquelles *le rapport des rayons de courbure principaux est constant* (négatif).

Un exemple particulièrement simple et intéressant de congruences du type précédent est constitué par les congruences (ω) à surface moyenne plane. Ces congruences sont évidemment de Ribaucour (comme toutes les congruences à surface moyenne plane). On les obtient, à partir des surfaces S correspondantes, en projetant orthogonalement chaque point M de S en m sur un plan fixe P, en faisant tourner m, dans P, d'un angle droit, dans un sens déterminé, autour d'un point fixe du plan, et en menant par la nouvelle position de m la parallèle à la normale en M à S. L'ensemble des droites obtenues constitue une congruence (ω) [ω est l'angle constant des asymptotiques de la surface génératrice S] admettant P pour surface moyenne.

Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$ on a les congruences normales à surface moyenne plane.

Si S est un hélicoïde ou une surface de révolution, la congruence (ω) que la construction ci-dessus rappelée lui associe [le plan P étant perpendiculaire à l'axe de la surface] *est de révolution.* Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, la famille des hélicoïdes minima fournit (une homothétie étant négligée) ∞^1 congruences normales à surface moyenne plane; ces congruences, que nous avons étudiées en détail dans un Mémoire antérieur[1], appartiennent à la famille des congruences d'Appell (à enveloppée moyenne point). Nous avons montré, dans le mémoire cité, que le caténoïde fournit une congruence pour laquelle le point moyen est dans le plan moyen, et que les autres surfaces minima hélicoïdes fournissent des congruences pour lesquelles le point moyen est extérieur au plan moyen, la distance du point moyen au plan moyen étant d'ailleurs égale au *pas réduit* de l'hélicoïde envisagé.

Cherchons ici, d'une façon générale, les congruences (ω) à surface moyenne plane et à enveloppée moyenne point. Nous allons voir que la généralisation consistant à remplacer $\frac{\pi}{2}$ par $\omega\left(\neq \frac{\pi}{2}\right)$, *réduit*, pour chaque valeur de l'angle ω, le nombre de solutions, de ∞^1 $\left(\text{pour } \omega = \frac{\pi}{2}\right)$ à *deux* $\left(\text{pour } \omega \neq \frac{\pi}{2}\right)$.

Il est facile de vérifier que le fait, pour une congruence, d'admettre un point pour enveloppée moyenne et un plan pour surface moyenne, entraine, pour cette congruence, la propriété d'être *de révolution*, l'axe de révolution étant la perpendiculaire abaissée du point moyen sur le plan moyen. Les congruences cherchées seront donc de révolution, et par suite les surfaces S associées seront de révolution au hélicoïdales. La forme hélicoïdale *se trouve exclue* par la propriété qui sert de définition aux surfaces S actuelles $\left(\frac{R_1}{R_2} = K,\ K < 0 \text{ et } \neq -1\right)$. Les surfaces génératrices des congruences (ω) à enveloppée moyenne point et à surface moyenne plane, sont donc les surfaces S de révolution engendrées par la rotation, autour d'un axe Oz, des courbes (de Ribaucour) telles que, si I est le centre de courbure en un point quelconque M et N le point où la normale coupe Oz, on ait $\frac{\overline{MI}}{\overline{MN}} = K(< 0)$. Sur deux surfaces correspondant à des valeurs inverses de K les asymptotiques se coupent sous le même angle ω; il existe donc, pour chaque valeur de $\omega\left(\neq \frac{\pi}{2}\right)$, *deux* congruences (ω) à surface moyenne plane et à enveloppée moyenne point.

---

[1] P. Vincensini. *Sur trois types de congruences rectilignes. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 3e Série, 19, 1927.

Les deux nappes focales de ces congruences sont symétriques par rapport au plan moyen. Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$ ce sont (*voir* le mémoire cité plus haut) les couples de paraboloïdes de révolution homofocaux symétriques par rapport au plan moyen. Nous allons effectuer leur détermination pour ω quelconque, en cherchant directement, sans passer par l'intermédiaire des surfaces génératrices de Ribaucour, les couples de surfaces de révolution symétriques par rapport au plan xOy telles que, pour la congruence de leurs tangentes communes, l'angle des plans focaux ait une valeur constante ω.

Soit

$$x^2 + y^2 = f(z)$$

l'équation de l'une, Σ, des nappes focales d'une congruence C répondant à la question. L'autre nappe, Σ', aura pour équation

$$x^2 + y^2 = f(-z),$$

et il s'agit de déterminer la fonction inconnue $f(z)$.

Envisageons la section σ de Σ par un plan parallèle à Oz quelconque, que, pour simplifier, nous prendrons perpendiculaire à l'axe Ox au point P d'abscisse λ, et menons par P une tangente à σ touchant σ en F. Cette tangente touchera σ' en F', symétrique de F par rapport à Ox, et, pour exprimer que la congruence C est du type (ω), il suffira d'exprimer que les plans tangents à Σ et Σ' en F et F' se coupent, quelque soit λ, sous l'angle constant ω.

La cote de F étant désignée par z, la condition pour que la tangente en F à σ coupe Ox au point P d'abscisse λ se traduit, comme il est aisé de le voir, par la relation

$$2\,[f(z) - \lambda^2] - z f'(z) = 0;$$

on en déduit, en fonction de z, l'abscisse $x = \lambda$ et l'ordonnée y de F:

$$x = \sqrt{\frac{2f - zf'}{2}}, \qquad y = \sqrt{\frac{zf'}{2}}.$$

Les coordonnées des points F et F' sont donc

$$F) \qquad \sqrt{\frac{2f - zf'}{2}}, \quad \sqrt{\frac{zf'}{2}}, \quad z,$$

$$F') \qquad \sqrt{\frac{2f - zf'}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{zf'}{2}}, \quad -z.$$

En écrivant que les plans tangents à Σ et Σ' en F et F' font l'angle ω, on est conduit à l'équation de Lagrange

$$f = \frac{1}{4}\cot\mathrm{g}^2\frac{\omega}{2}f'^2 + \frac{z}{2\sin^2\frac{\omega}{2}}f', \tag{8}$$

qui détermine les couples de surfaces cherchées.

L'intégration de l'équation (8), fournit les équations des premières nappes focales, Σ, des congruences (ω) à surface moyenne plane (plan xOy) et à enveloppée moyenne point (le point O); on trouve, une homothétie étant négligée

$$\left(\sqrt{z^2+f\sin^2\omega}-z\right)^{-\frac{1}{\cos\omega}} = z\cos\omega + \sqrt{z^2+f\sin^2\omega}, \qquad (x^2+y^2=f(z)).$$

Le cas où ω est tel que $\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ donne lieu à une construction élégante, fournissant une congruence (ω) d'une définition géométrique très simple. Prenons pour surface génératrice S la surface engendrée par la rotation, autour de Oz, d'une parabole de directrice Oz. Cette surface est une surface de Ribaucour correspondant à $K=-2$, et, si ω est l'angle de ses asymptotiques, on a $\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Supposons la parabole méridienne P de S située dans le plan xOz, l'axe étant Ox, et désignons par p son paramètre. Pour avoir la congruence (ω) relative à S, il suffira de construire ceux de ses rayons qui correspondent aux différents points M de S situés sur P, puis de faire tourner l'ensemble de ces rayons autour de Oz.

Soient M un point quelconque de P et m sa projection orthogonale sur le plan xOy (m est sur Ox). Conformément à la construction rappelée au début de ce numéro, faisons tourner m de $+\frac{\pi}{2}$ autour du point O, dans le plan xOy; m vient en m_1, projection d'un certain point M_1 de la parabole P_1 déduite de P par la rotation $+\frac{\pi}{2}$ autour de Oz. La parallèle menée par m_1 à la normale MN à P (N est le point où cette normale coupe Ox), est le rayon Δ de la congruence correspondant au point M de P. On a $\overline{mN}=p$, et, si l'on soumet P_1 à la translation $\overline{Nm}=-p$, ce qui amène P_1 en P_2 et M_1 en M_2 (sur P_2), on voit que M_2 est sur Δ. L'ensemble des rayons Δ issus des différents points de Oy constitue donc le conoïde droit d'axe Oy dont les génératrices s'appuient sur la parabole P_2. On peut par suite énoncer le résultat suivant:

Etant donnée une parabole P_1 d'axe Oy de directrice Oz et de paramètre p, amenons la en P_2 par une translation d'amplitude p normale à son plan, et envisageons le conoïde droit (C) d'axe Oy dont les génératrices s'appuient sur P_2. En faisant tourner (C) autour de la directrice Oz de P_1, on obtient une congruence à surface moyenne plane (le plan des axes de P_1 et P_2) et à angle ω des plans focaux constant $\left(\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

4. — **Congruences (ω) de Ribaucour dont les réseaux focaux se correspondent avec égalité des angles homologues.**

Les congruences (ω) à surface moyenne plane, déterminées au numéro précédent, sont des congruences (ω) particulières de Ribaucour telles que les réseaux focaux se correspondent avec égalité des angles homologues. Sans imposer de condition spéciale à la surface moyenne, cherchons les congruences (ω) de Ribaucour telles que les angles homologues des deux réseaux focaux soient égaux (sans être constants).

En désignant, pour nous conformer aux notations du numéro 2, par θ au lieu de ω l'angle constant des plans focaux, la question revient (*voir le* numéro 2) à mettre l'élément linéaire de la sphère de rayon *un* sous la forme

$$(6)\qquad d\sigma^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 du^2+2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cos\theta\, du\, dv+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 dv^2,\qquad (\theta=\text{const.}),$$

la fonction φ vérifiant, outre l'équation de Gauss, la condition $\frac{\partial a}{\partial u}=\frac{\partial b}{\partial v}$ exprimant que la congruence est de Ribaucour.

En explicitant les deux équations on obtient le système

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\log\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\partial u\,\partial v}=\dfrac{\partial^2\log\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\partial u\,\partial v}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2\log\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\partial u\,\partial v}+\cos^2\dfrac{\theta}{2}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}=0. \end{cases}$$

La première équation s'intègre immédiatement, et donne

$$\varphi=f(U+V),$$

où U et V sont des fonctions respectives de u et v. En changeant les variables u, v on peut prendre $\varphi = f(u+v)$, et il reste à déterminer la fonction $\varphi(t)$ $[t = u+v]$ vérifiant la deuxième équation (9). On a à intégrer l'équation différentielle ordinaire:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right) + \cos^2\frac{\theta}{2}\varphi'^2 = 0.$$

Moyennant un nouveau changement des variables u, v on obtient sans difficulté

$$\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{ch}(u+v)}.$$

Le $d\sigma^2$ de la représentation sphérique des congruences envisagées affecte donc la forme

$$(10) \qquad d\sigma^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}\operatorname{ch}^2(u+v)}(du^2 + 2\,du\,dv\cos\theta + dv^2), \qquad (\theta = \text{const.}).$$

Cette représentation sphérique est celle des asymptotiques des surfaces génératrices. On sait qu'une surface est *déterminée à un déplacement près* par la connaissance de l'image sphérique de ses asymptotiques. Les surfaces génératrices des congruences actuelles sont donc déterminées par le $d\sigma^2$ que l'on vient d'obtenir, et la forme de ce $d\sigma^2$ montre que ces surfaces sont précisément les surfaces de révolution $\left(\text{définies par } \frac{R_1}{R_2} = K\right)$ dont il a été question au numéro précédent. On peut donc dire:

Les congruences (ω) de Ribaucour telles que les angles homologues des deux réseaux focaux soient égaux, sont les congruences parallèles aux congruences (ω) de Ribaucour à surface moyenne plane et à enveloppée moyenne point déterminées au numéro précédent.

D'une façon générale, tout problème relatif à la recherche de congruences telles que les réseaux focaux se correspondent avec égalité des angles, exige la mise préalable de l'élément linéaire sphérique sous la forme (6). Dans le cas que nous venons d'envisager, la mise de l'élément linéaire sphérique sous la forme (6) a été facilitée par les deux circonstances suivantes: θ était constant et la congruence était de Ribaucour.

Le fait que la définition des congruences cherchées est compatible avec le groupe des transformations par parallélisme est ordinairement une grande cause de simplification; cela tient à ce que, si l'on néglige le parallélisme, l'équation (4) du numéro 2 n'entre pas en jeu. Cette circonstance explique, en particulier, les résultats obtenus par M. B. Gambier dans un problème du genre indiqué où, en dehors de l'égalité des angles homologues des réseaux focaux, on exige que sur les deux nappes focales les courbes non arètes de rebroussement des deux réseaux focaux soient géodésiques[1]. Si la solution du problème n'admet pas le groupe du parallélisme, il faut envisager dans leur ensemble *toutes* les équations qui interviennent dans la méthode de Guichard. C'est ce qui arrive, par exemple, dans le problème (qui rentre bien dans le type général indiqué plus haut) de la recherche des congruences rectilignes établissant entre les deux nappes focales une représentation *conforme*. Ce problème n'a pas encore reçu de solution générale; les seules solutions connues sont constituées par les congruences à nappes focales applicables par les points correspondants, déterminées par M. Finikoff[2], et les congruences de Thybaut à nappes focales minima[3].

5. — **Transformation des congruences** (ω).

Les congruences à enveloppée moyenne point interviennent dans de nombreuses questions de géométrie. Une de leurs propriétés les plus remarquables consiste en ce que, ces congruences, sont les transformées des congruences de normales, par ce que, dans un travail antérieur[4], nous avons appelé *la transformation* $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$.

(C) étant une congruence quelconque, faisons tourner chacun de ses rayons, D, autour de sa parallèle $\varDelta$ issue d'un point fixe O de l'espace, d'un angle déterminé α, dans un sens déterminé; D vient en D', et l'ensemble des droites D' constitue la congruence (C') transformée de (C) par la transformation $T(O, \alpha)$. Si la congruence (C) est normale et si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, (C') est une congruence admettant le point O pour enveloppée moyenne. Les congruences admettant un point O pour enveloppée moyenne sont dites congruences *d'Appell généralisées*, la dénomination de *congruences d'Appell* étant réservée à celles de ces congruences qui sont *normales*.

[1] B. Gambier. *Congruences de cercles; points focaux; Annales de Toulouse,* 1933.
[2] S. Finikoff. *Annali di Matematica, 4e série,* t. I, 1923—1924, p. 175, 184.
[3] *Voir par ex.* L. Bianchi. *Lezioni di geometria differenziale,* 3e edit. t. II, part. I, p. 188.
[4] *Bulletin de la Soc. Math. de Moscou,* 40, 1933, p. 467.

Si la congruence de départ (C) est non seulement normale mais du type d'Appell, toutes ses transformées par une $T(O, \alpha)$ [où l'angle constant α est arbitraire] sont des congruences d'Appell; il suffit d'ailleurs qu'une congruence normale admette *une* transformation $T(O, \alpha)$ après laquelle elle reste normale, pour être une congruence d'Appell, et admettre par suite les ∞^1 transformations $T(O, \alpha)$.

Pour l'établissement de ces propriétés je renvoie au Mémoire de la *Société mathématique de Moscou* cité plus haut. Dans ce même Mémoire, j'ai ramené les problèmes de la recherche de congruences normales jouissant de propriétés géométriques variées, à des problèmes relatifs à des congruences d'Appell généralisées jouissant de propriétés géométriques correspondantes. D'autre part, dans son Cours de 1928, C. Guichard, se plaçant au point de vue, tout différent, de la transformation des équations de Moutard, avait déjà été conduit à considérer les congruences d'Appell généralisées *du type de Ribaucour* comme transformées des *congruences W normales*. En vue d'une comparaison avec la transformation $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, j'indique rapidement ici en quoi consiste la transformation de Guichard.

Soient S, S' les deux nappes, rapportées à leurs asymptotiques (u, v), d'une congruence W, dont le rayon générateur (AA') touche S et S' en $A(x_1, x_2, x_3)$ et $A'(x'_1, x'_2, x'_3)$. Les cosinus normalisés (ξ_1, ξ_2, ξ_3) de la normale en A à S sont, comme il est bien connu, trois solutions d'une même équation de Moutard

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \, \partial v} = M \xi, \tag{11}$$

et l'on a:

$$x'_1 = x_1 + (\xi_2 \xi'_3 - \xi_3 \xi'_2),$$
$$x'_2 = x_2 + (\xi_3 \xi'_1 - \xi_1 \xi'_3),$$
$$x'_3 = x_3 + (\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1),$$

où ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 (cosinus normalisés de la normale à S' en A') vérifient le système

$$\left\{\begin{aligned} \xi' \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \xi'}{\partial u}\lambda &= \quad \xi \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial u}\lambda, \\ \xi' \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\partial \xi'}{\partial v}\lambda &= -\xi \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v}\lambda, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

λ étant une solution de l'équation de Moutard (11) vérifiée par les ξ.

[1] *Bulletin de la Soc. math. de Moscou,* 40, 1933, p. 467.

Si l'on considère le point P de coordonnées ($y_1 = \lambda \xi'_1$, $y_2 = \lambda \xi'_2$, $y_3 = \lambda \xi'_3$), les formules (12), jointes aux formules de Lelieuvre

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \xi_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial u} - \xi_3 \frac{\partial \xi_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u} = \cdots, \quad \frac{\partial x_3}{\partial u} = \cdots,$$

montrent sans peine que la surface $\Sigma(y_1, y_2, y_3)$ lieu du point P est associée à S *avec orthogonalité des éléments linéaires*, et que, par suite, la congruence obtenue en menant par P la parallèle $\varDelta$ à la normale à S en A *est une congruence de Ribaucour admettant Σ pour surface moyenne* (P est le milieu du segment focal de $\varDelta$).

Cela étant, si la congruence W (AA') est normale, les normales à S et S' en A et A', de paramètres directeurs respectifs (ξ_1, ξ_2, ξ_3) et (ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3), sont rectangulaires, et il en est de même de leurs parallèles OP et $\varDelta$ (O est l'origine des coordonnées). Le plan perpendiculaire à $\varDelta$ en P passe par le point fixe O, et la congruence de Ribaucour ($\varDelta$) *est une congruence d'Appell généralisée.*

La transformation de Guichard des congruences W normales en congruences d'Appell généralisées du type de Ribaucour qui vient d'être exposée est, comme l'on voit, essentiellement distincte de la transformation $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ appliquée aux mêmes congruences W normales. Il est alors possible de transformer les congruences W normales en de nouvelles congruences *normales* (non nécessairement W), en leur appliquant d'abord la transformation de Guichard, puis la transformation $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ aux congruences d'Appell du type de Ribaucour transformées. Les congruences normales transformées constituent une nouvelle famille de congruences normales spéciales, dont l'étude ne peut être faite ici où nous avons seulement voulu justifier, en ce qui concerne les congruences d'Appell, généralisées ou non, l'opportunité de nouvelles généralisations.

Substituons, aux congruences normales $\left(\text{dont l'angle des plans focaux est } \frac{\pi}{2}\right)$, les congruences (ω) dont il a été question dans les numéros qui précédent (dont l'angle des plans focaux, ω, est simplement constant). Il est alors naturel d'étudier la transformation $T(O, \alpha)$ des congruences (ω), et de voir si, pour quelque valeur particulière de l'angle de transformation α, la congruence transformée ne jouirait pas de quelque propriété géométrique analogue à celle qui définit les congruences d'Appell généralisées, pour lesquelles le point O se projette, sur chaque rayon, au milieu du segment focal. Cette étude nous conduira à substituer aux congruences d'Appell généralisées, les congruences telles que les projections du point fixe O sur les différents rayons partagent les segments focaux dans un rapport constant. Considérant ensuite la propriété dont jouissent les congruences d'Appell de rester normales au cours de la transformation continue $T(O, \alpha)$, nous serons conduits à des congruences (ω) spéciales (généralisant les congruences normales d'Appell) restant (ω) au cours de la transformation continue $T(O, \alpha)$.

Propriétés de la transformation $T(O, \alpha)$. — Nous rappelons ici quelques propriétés de la transformation $T(O, \alpha)$ qui nous serviront dans la suite, et pour l'établissement desquelles nous renvoyons à notre Mémoire du *Recueil de la Société mathématique de Moscou* déjà cité.

(C) étant une congruence quelconque de rayon générateur (D) (fig. 2), désignons par F, F' les foyers portés par D, et par φ, φ' les foyers situés sur le rayon D' homologue de D dans la transformée (C') de (C) par $T(O, \alpha)$.

I étant le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur D et K le point correspondant sur D', appelons S et P la somme et le produit des valeurs algébriques des segments $\overline{IF}$ et $\overline{IF'}$, et S', P' les quantités analogues relatives à D'

$$\begin{cases} S = \overline{IF} + \overline{IF'}, \\ P = \overline{IF} \times \overline{IF'}, \end{cases} \qquad \begin{cases} S' = \overline{K\varphi} + \overline{K\varphi'}, \\ P' = \overline{K\varphi} \times \overline{K\varphi'}. \end{cases}$$

On a, quelque soit α

$$P = P',$$

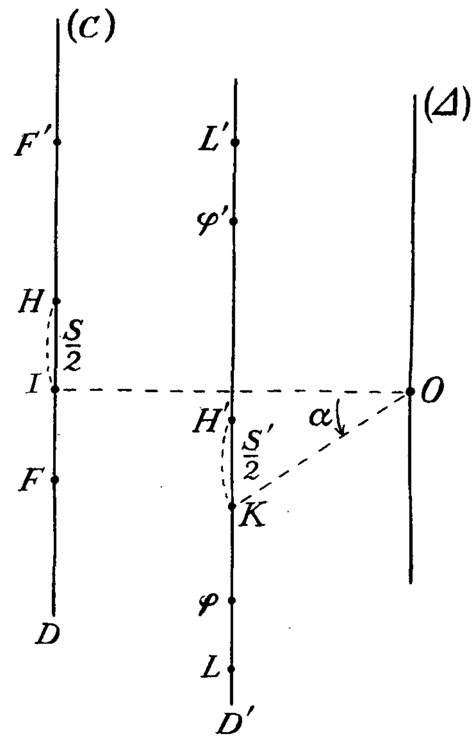

Fig. 2.

et, si π est le paramètre moyen de (C) relatif au rayon D

$$S' = S \cos\alpha + \pi \sin\alpha. \tag{13}$$

Si l'on soumet (C') à la transformation $T(O, -\alpha)$, S' se transforme en S; si π' est le paramètre moyen relatif à D' dans (C'), on déduit aussitôt de cette remarque l'expression de S au moyen des éléments de S'

$$S = S' \cos\alpha - \pi' \sin\alpha, \tag{14}$$

et par suite la formule de transformation des paramètres moyens

$$\pi' = - S \sin \alpha + \pi \cos \alpha. \tag{15}$$

(13) et (15) donnent immédiatement

$$S'^2 + \pi'^2 = S^2 + \pi^2. \tag{16}$$

Le paramètre moyen de (C) a pour expression

$$\pi = 2 \sqrt{d^2 - \delta^2}, \tag{17}$$

$2d$ et 2δ désignant, respectivement, les distances des points limites et des foyers portés par un rayon quelconque. Pour la congruence transformée on a

$$\pi' = 2 \sqrt{d'^2 - \delta'^2}. \tag{17'}$$

Les angles ω et ω' des plans focaux relatifs à deux rayons homologues de (C) et (C') sont définis par

$$\sin \omega = \frac{\delta}{d}, \quad \sin \omega' = \frac{\delta'}{d'}; \tag{18}$$

les expressions de π et π' peuvent donc s'écrire

$$\begin{aligned} \pi &= 2 d \cos \omega = 2 \delta \operatorname{cotg} \omega, \\ \pi' &= 2 d' \cos \omega' = 2 \delta' \operatorname{cotg} \omega'; \end{aligned} \tag{19}$$

d'autre part, H désignant le milieu de FF' sur D (fig. 2), on a

$$P = \overline{IF} \times \overline{IF'} = \overline{IH}^2 - \overline{HF}^2 = \frac{S^2}{4} - \delta^2,$$

et de même

$$P' = \frac{S'^2}{4} - \delta'^2.$$

L'égalité de P et P' prouve que

$$S^2 - 4\delta^2 = S'^2 - 4\delta'^2, \tag{20}$$

et la comparaison de (16) et (20) met en évidence l'invariant $\pi^2 + 4\delta^2$ de la transformation ($\pi^2 + 4\delta^2 = \pi'^2 + 4\delta'^2$). D'après (17), $\pi^2 + 4\delta^2 = 4d^2$; on peut donc dire que la distance limite d sur chaque rayon *reste invariante au cours d'une transformation* $T(O, \alpha)$ *quelconque.*

Transformation $T(O, \alpha)$ des congruences (ω). — Supposons que, pour la congruence (C) dont il est question ci-dessus, l'angle des plans focaux, ω, soit *constant*. Pour la congruence (C') transformée par $T(O, \alpha)$ on a, d'après (13) et compte tenu de (19)

$$S' = S \cos \alpha + 2\, d \cos \omega \sin \alpha.$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la formule précédente devient

$$\frac{S'}{2\, d} = \cos \omega,$$

ou encore, en se rappelant l'invariance de d

(21) $$\frac{S'}{2\, d'} = \cos \omega.$$

Si nous nous reportons à la figure 2 où, sur le rayon D' de (C'), nous avons marqué, en même temps que le milieu H' du segment focal (et du segment limite) les deux points limites L et L', nous voyons que nous pouvons écrire la relation (21)

$$\frac{\overline{KH'}}{\overline{LH'}} = \cos \omega,$$

ou encore

(22) $$\frac{\overline{KL}}{\overline{KL'}} = - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \cdot$$

K étant la projection orthogonale du point fixe O sur D', (22) permet d'énoncer le résultat suivant:

Les transformées par $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ *des congruences* (ω) *sont les congruences telles que les projections du point fixe* O *sur les différents rayons partagent les segments limites dans un rapport constant (négatif).*

Si (C) est normale, on a $\overline{KL} + \overline{KL'} = 0$, et (C') est une congruence d'Appell généralisée; d'autre part les foyers φ et φ' sont confondus avec les points limites L et L', de sorte que φ et φ' peuvent être substitués aux points limites dans l'énoncé précédent, et fournir ainsi le théorème rappelé au début de ce numéro relatif à la transformation des congruences normales en congruences d'Appell généralisées. L'existence de ce théorème est dûe, comme l'on voit, à la coïncidence des points limites et des foyers dans une congruence normale; dans la généralisation étudiée ici le rôle important est joué par les points limites et non par les foyers.

Un cas particulier intéressant est celui où la congruence (C) de départ est une congruence *pseudosphérique* (congruence (ω) particulière pour laquelle d est une constante). Sur les différents rayons de la congruence transformée (C'), on a

$$\overline{LL'} = 2d',$$

$$\frac{\overline{LK}}{\overline{KL'}} = \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2};$$

les divisions $(LKH'K')$ sont donc *égales sur tous les rayons de* (C), et l'on a en particulier

$$\overline{KH'} = \text{const.} = d \cos\omega.$$

Le plan perpendiculaire en H' à D' (plan moyen) enveloppe donc une sphère de centre O et de rayon $R = d\cos\omega$, et l'on retrouve ainsi un résultat énoncé dans le Mémoire cité plus haut:

Les transformées par une $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ *des congruences pseudosphériques sont les congruences à enveloppée moyenne sphérique pour lesquelles la distance des couples de points limites associés est constante.*

Si l'on appelle *enveloppées limites* d'une congruence les surfaces enveloppes des plans perpendiculaires aux rayons en leurs points limites, le résultat précédent peut être énoncé de la façon suivante:

Les transformées par une $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ *des congruences pseudosphériques sont les congruences admettant pour enveloppées limites deux sphères concentriques (de centre* O.)

Un autre cas particulier qui mérite d'être signalé est celui où la congruence de départ (C) est une congruence *parabolique* (congruence (ω) particulière pour laquelle $\omega = 0$). Pour la transformée (C') d'une telle congruence par une $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ arbitraire on a en effet, d'après (21)

$$\frac{S'}{2} = d',$$

ce qui prouve que K est confondu avec l'un des deux points limites du rayon D', et que, par suite, le plan perpendiculaire à D' en ce point limite (plan limite) passe par le point fixe O. Ainsi

Les congruences transformées par une $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ *arbitraire des congruences paraboliques sont celles dont l'un des deux plans limites passe par un point fixe.*

En particulier, si la congruence (C) est formée par les tangentes à un système de lignes asymptotiques d'une surface pseudosphérique, l'une des deux sphères enveloppées par les plans limites de la congruence transformée se réduit à un point et l'autre à une sphère de rayon d ayant pour centre ce point.

Nouvelle généralisation des congruences d'Appell. — Demandons nous maintenant s'il existe des congruences (ω) se transformant en congruences du même type par une transformation $T(O, \alpha)$. (C) étant une congruence (ω) de rayon générateur D, évaluons l'angle ω' des plans focaux issus du rayon D', transformé de D, de la congruence transformée (C').

Si, dans la formule (15) donnant π', on remplace π' et π par leur premières expressions (19), et si l'on tient compte de ce que $d' = d$, on obtient la formule

$$\cos \omega' = \cos \omega \cos \alpha - \frac{S}{2d} \sin \alpha, \tag{23}$$

que l'on peut encore écrire, d'après (18)

$$\cos \omega' = \cos \omega \cos \alpha - \frac{S}{2\delta} \sin \omega \sin \alpha. \tag{24}$$

(23) ou (24) montrent comment varie l'angle ω relatif à un rayon déterminé D de (C), lorsqu'on effectue le cycle complet des transformations $T(O, \alpha)$ $[0 \leqq \alpha \leqq 2\pi]$.

Pour qu'il existe une valeur de α pour laquelle l'angle ω' *soit constant sur chaque rayon* D' *de* (C'), il faut et il suffit, comme l'on voit, que $\frac{S}{2\delta}$ soit une constante; ω' est alors constant *pour toutes les congruences transformées* correspondant aux diverses valeurs de α (et, en général, variable d'une congruence à une autre).

La condition $\frac{S}{2\delta} =$ const. signifie que les projections du point fixe O sur les différents rayons de la congruence (C) partagent les segments focaux dans un rapport constant. On peut donc énoncer le résultat suivant:

Les congruences (ω) *restant telles au cours des* ∞^1 *transformations* $T(O, \alpha)$ *correspondant aux différentes valeurs de* α, *sont celles pour lesquelles il existe un point fixe de l'espace dont les projections orthogonales sur les différents rayons partagent* *les segments focaux dans un rapport constant.* Le point O qui intervient dans la définition de la transformation est alors le point fixe.

Pour que l'angle ω, non seulement reste constant sur toutes les congruences transformées, mais *soit le même pour toutes ces congruences,* il faut et il suffit, comme le montre la formule (24) qui définit les variations de cet angle lorsque α varie, que l'on ait

$$S = 0, \quad \cos\omega = 0,$$

c'est à dire que (C) soit une congruence normale à enveloppée moyenne point (congruence d'Appell). Ainsi:

Les seules congruences (ω) pour lesquelles l'angle ω reste invariant au cours de ∞^1 transformations $T(O,\alpha)$ sont les congruences d'Appell relatives au point O.

Plaçons nous dans le cas général où (C) est simplement (ω), sans être du type d'Appell, et voyons comment varie le rapport constant $\frac{S}{2\,d}$ lorsque α varie. Si l'on soumet (C'), transformée de (C) par $T(O,\alpha)$, à la transformation inverse $T(O,-\alpha)$, on retrouve (C), et l'on déduit de la formule (23)

$$\cos\omega = \cos\omega' \cos\alpha + \frac{S'}{2\,d'} \sin\alpha,$$

d'où, après avoir remplacé $\cos\omega'$ par son expression (23)

$$\frac{S'}{2\,d'} = \frac{S}{2\,d} \cos\alpha + \cos\omega \sin\alpha.$$

Le rapport $\frac{S'}{2\,d'}$ est maximum lorsque

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\omega}{\left(\frac{S}{2\,d}\right)}.$$

Lorsqu'il en est ainsi, l'expression (23) de $\cos\omega'$ montre que $\cos\omega' = 0$, ce qui prouve que la congruence transformée est *normale.* Dans tout cycle de congruences (ω) $\left[\omega \neq \frac{\pi}{2}\right]$, transformées de l'une quelconque d'entre-elles par les différentes transformations $T(O,\alpha)$, *figurent donc deux congruences normales,* symétriques par rapport à O (définies par des valeurs de α différant de π). Les divers cycles possibles *peuvent donc être définis par les différentes congruences normales* (C)

telles qu'il existe un point fixe O dont les projections sur les différents rayons partagent les segments focaux dans un rapport constant K.

Si, dans un tel cycle, on choisit comme congruence (C) initiale l'une des deux congruences normales, la formule (24) donnant l'angle constant ω' relatif aux différentes transformées prend la forme simple

$$\cos \omega' = - \frac{S}{2\,\delta} \sin \alpha,$$

ou encore, en évaluant $\frac{S}{2\,\delta}$ $\left[\text{c'est à dire } \frac{\overline{IH}}{\overline{FH}} \text{ dans la figure (2)}\right]$ en fonction du rapport constant K dans lequel les projections du point fixe O sur les rayons de (C) partagent algébriquement les segments focaux

$$\cos \omega' = \frac{1 + K}{1 - K} \sin \alpha. \tag{25}$$

(25) montre que, pour les congruences (C_α), $(C_{-\alpha})$, transformées d'une même congruence normale (C) du type envisagé par les deux transformations $T(O, \alpha)$, $T(O, -\alpha)$, l'angle des plans focaux est le même. L'égalité des segments limites sur deux rayons homologues quelconques de (C_α) et $(C_{-\alpha})$ entraine donc l'égalité des segments focaux. Il résulte alors de la propriété relative à l'invariance, dans toute transformation $T(O, \alpha)$, du produit des distances de la projection du point fixe O sur un rayon quelconque aux deux foyers portés par ce rayon, que les projections de O sur les différents rayons des deux congruences (C_α) et $(C_{-\alpha})$ *partagent les segments focaux des deux congruences dans le même rapport.*

La remarque précédente conduit à la conclusion suivante. Etant donnée une congruence (ω) telle que les projections orthogonales d'un point fixe O de l'espace sur ses différents rayons partagent les segments focaux dans un rapport constant K, *il existe toujours une transformation $T(O, \alpha)$ transformant la congruence envisagée en une congruence de même définition (même angle ω et même rapport K).*

Les congruences d'Appell $\left(\omega = \frac{\pi}{2},\ K = -1\right)$ fournissent le seul cas exceptionnel, pour lequel le nombre des congruences transformées avec conservation de l'angle ω et du rapport K dépasse *un*, et est par suite infini.

La particularité présentée par le cas exceptionnel qui vient d'être signalé, est à rapprocher de celle que présentent les surfaces minima, d'admettre une déformation continue à un paramètre au cours de laquelle elles restent minima.

Les deux questions sont d'ailleurs intimement liées, comme je l'ai montré dans un Mémoire des *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure* »*Sur certaines congruences de normales dans leurs relations avec les surfaces à courbure totale constante et leurs transformations*«, (3), t. XLVIII, 1931.

Dans les cycles de congruences (ω) dont il vient d'être question figurent deux autres congruences remarquables (symétriques par rapport à O), à savoir, les congruences *à enveloppée moyenne point et à angle de plans focaux constant,* déduites des deux congruences normales du cycle par la transformation $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)\cdot$ Ces congruences spéciales peuvent être prises comme congruences de départ pour définir les différents cycles.

La relation (25) prouve immédiatement, que le rapport constant K, attaché à la congruence normale déduite par $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ d'une congruence à enveloppée moyenne point dont les plans focaux font l'angle constant ω, est $K = -\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}\cdot$ Si, en particulier, on considère une congruence à enveloppée moyenne point (O) parabolique, c'est à dire, comme il est aisé de le constater, une congruence formée par les tangentes aux asymptotiques sphériques d'une surface *admettant un système d'asymptotiques situées sur des sphères concentriques de centre* O, le rapport constant dans lequel les projections de O sur les différents rayons de la congruence normale transformée partagent les segments focaux est *zéro.* Pour la congruence transformée, les projections de O sur les différents rayons coïncident avec les foyers situés sur l'une des deux nappes focales. Cette nappe focale admet donc *un système de géodésiques sphériques* situées sur des sphères concentriques de centre O, et la congruence elle même est formée par les tangentes à cette famille de géodésiques.

Cycles complets et incomplets de congruences (ω)**.** — Si l'on a égard à la réalité des plans focaux (des développables) d'un même cycle de congruences (ω), on est conduit à envisager deux types de cycles: ceux pour lesquels l'angle constant ω des plans focaux est *réel pour toutes les valeurs de l'angle de transformation* α, et ceux pour lesquels il n'en est pas ainsi.

Le cycle étant défini, comme on l'a expliqué plus haut, par une congruence normale (C) telle que les projections du point fixe O sur les différents rayons partagent les segments focaux dans le rapport constant K, la formule (25) (où nous avons supprimé l'accent *prime*)

$$\cos\omega = \frac{1+K}{1-K}\sin\alpha \tag{25}$$

définissant l'angle constant ω relatif à la congruence (C_α), montre que, pour que l'angle ω soit réel pour toutes les valeurs de α, il faut et il suffit que $K \leqq 0$, c'est à dire, que les projections du point fixe O sur les différents rayons de la congruence normale de départ (C), soient sur le segment focal lui même; nous dirons alors que le cycle est *complet*.

Si $K > 0$ le cycle est *incomplet;* seules, donnent des congruences (ω) à nappes focales réelles, les valeurs de α pour lesquelles

$$|\sin\alpha| \leqq \left|\frac{1-K}{1+K}\right|. \tag{26}$$

Les valeurs α et $\pi+\alpha$ donnant des congruences symétriques par rapport à O, on peut se borner à faire varier α entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; si α_0 est l'angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ défini par l'égalité (26), on voit que les seules congruences du cycle à développables réelles sont celles qui correspondent aux angles de transformation α tels que

$$-\alpha_0 \leqq \alpha \leqq \alpha_0 .$$

Pour les valeurs limites $\alpha = \pm\,\alpha_0$, on a $|\cos\omega| = 1$; les deux congruences limitant la portion de cycle à développables réelles sont donc des *congruences paraboliques*.

Dans le cas du cycle incomplet, les congruences du cycle à enveloppée moyenne point, qui correspondent à $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, sont à développables imaginaires. Dans le cas du cycle complet elles sont à développables réelles, mais alors les congruences paraboliques n'existent plus.

Les transformées par $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ des congruences paraboliques étant, comme on l'a vu, des congruences telles que les plans limites de l'un des systèmes passent par le point fixe O (l'une des enveloppées limites est le point O), on peut dire que dans tout cycle incomplet de congruences (ω) figurent, en dehors des deux congruences normales (symétriques) des quatre congruences paraboliques (deux à deux symétriques) et des deux congruences à enveloppée moyenne point à développables imaginaires (symétriques), *quatre congruences* (deux à deux symétriques) dont l'une des enveloppées limites se réduit à un point (le point O).

Celles de ces quatre nouvelles congruences qui correspondent à des valeurs de α comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ sont définies par $\alpha_0 - \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} - \alpha_0$; elles sont à développables réelles ou imaginaires suivant que $\alpha_0 \geqq \frac{\pi}{4}$ ou que $\alpha_0 < \frac{\pi}{4}\cdot$

Les deux tableaux suivants indiquent les particularités remarquables que présentent les deux espèces de cycles complets et incomplets. La première colonne de chaque tableau indique la valeur de l'angle de transformation, et la deuxième les particularités de la congruence (ω) correspondante. Dans les deux cas la congruence à partir de laquelle on commence à effectuer la transformation $(\alpha = 0)$ est la congruence normale.

Cycle complet ($K < 0$; nous réservons le cas où $K = 0$):

α	Congruences (ω), toutes à développables réelles,
$-\frac{\pi}{2}$	Congr. à enveloppée moyenne point,
0	Congr. normale,
$+\frac{\pi}{2}$	Congr. à enveloppée moyenne point.

Cycle incomplet ($K < 0$):

Nous supposerons $\alpha_0 < \frac{\pi}{4}$; si $\alpha_0 < \frac{\pi}{4}$ il faut intervertir $\alpha_0 - \frac{\pi}{2}$ et $-\alpha_0$, de même que $\frac{\pi}{2} - \alpha_0$ et α_0.

α	Congruences (ω),
$-\frac{\pi}{2}$	Congr. *à enveloppée moyenne point* (à developpable *imaginaires*),
	Congruences à développables *imaginaires*,
$\alpha_0 - \frac{\pi}{2}$	Congr. dont une enveloppée limite est un point (développables *imaginaires*),
	Congruences à développables *imaginaires*,
$-\alpha_0$	Congr. *parabolique*,
	Congruences à développables *réelles*,
0	Congr. *normale*,
	Congruences à développables *réelles*,
α_0	Congr. *parabolique*,
	Congruences à développables *imaginaires*,
$\frac{\pi}{2} - \alpha_0$	Congr. dont une enveloppée limite est un point (développables *imaginaires*),
	Congruences à développables *imaginaires*,
$+\frac{\pi}{2}$	Congr. à enveloppée moyenne point (à développables *imaginaires*).

Cas où $K=0$. — Le tableau correspondant au cas où $K=0$ est le premier des deux précédents, où les deux congruences à enveloppée moyenne point correspondant à $\omega = \pm \frac{\pi}{2}$ jouissent en outre de la propriété d'être *paraboliques* (donc formées par les tangentes aux asymptotiques sphériques d'une surface admettant un système d'asymptotiques situées sur des sphères concentriques de centre O), et où la congruence normale est telle que l'une de ses enveloppées limites est le point O (donc formée par les tangentes aux géodésiques sphériques d'une surface admettant ∞^1 géodésiques situées sur des sphères concentriques de centre O.)

La nappe focale (Ω) portant les géodésiques sphériques de la congruence normale (C), et l'unique nappe focale (Σ) de la congruence (C') transformée de (C) par $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, sont dans une relation telle qu'il existe une même famille de sphères concentriques déterminant, sur (Ω) une famille de géodésiques et sur (Σ) une famille d'asymptotiques. Les géodésiques sphériques de (Ω) et les asymptotiques correspondantes de (Σ) sont évidemment deux à deux *polaires* l'une de l'autre sur une même sphère de centre O, et, lorsqu'un rayon de (C) reste tangent à une géodésique sphérique de (Σ), le rayon homologue de (C') reste tangent à l'asymptotique polaire. Les deux congruences (C) et (C') sont donc telles *qu'une famille de développables de l'une corresponde à une famille de développables de l'autre.* La propriété relative à l'invariance du produit des distances des projections de O aux foyers situés sur un même rayon, au cours de la transformation continue $T(O, \alpha)$, montre que, sur toutes les congruences transformées, ce produit est *nul*, et que par suite, pour *toutes* ces congruences, l'un des deux systèmes d'arètes de rebroussement des développables est formé de courbes sphériques. Toutes les courbes sphériques situées sur une même sphère sont évidemment *parallèles* sur cette sphère; en outre, toutes les congruences transformées étant des congruences (ω) [l'angle constant ω étant défini, à partir de la congruence normale, par la relation (25) qui s'écrit ici $\cos\omega = \sin\alpha$], on voit que, toute nappe focale de l'une quelconque des ∞^1 congruences transformées portant des arètes de rebroussement sphériques jouit de cette propriété que *les plans osculateurs aux différentes courbes sphériques en leurs différents points font le même angle avec les plans tangents correspondants à la nappe focale.* Chaque congruence normale (C) du type actuellement envisagé fournit donc une configuration de ∞^1 surfaces jouissant de la propriété suivante:

Il existe ∞^1 *sphères concentriques déterminant, sur chacune des* ∞^1 *surfaces,* ∞^1 *courbes le long desquelles le plan osculateur coupe la surface sous un angle constant, cet angle étant le même pour une même surface et variable d'une surface à l'autre.*

Le tableau relatif au cas du cycle incomplet montre qu'une nouvelle circonstance intéressante surgit si $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}\cdot$ Dans ce cas, en effet, les congruences paraboliques correspondant à $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$ jouissent en outre de la propriété *d'admettre une enveloppée limite point* (le point O).

La valeur de K donnant $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ est, comme le montre (26)

$$K = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\cdot$$

On peut donc énoncer le résultat suivant:

Les transformées par $T\left(O, \pm \frac{\pi}{4}\right)$, *des congruences normales telles que les projections du point fixe* O *sur les différents rayons partagent les segments focaux dans le rapport constant* $\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$, *sont des congruences paraboliques admettant une enveloppé limite point* (*le point* O).