SUR LES FONCTIONS INDÉFINIMENT DÉRIVABLES.

PAR

S. MANDELBROJT.

à PARIS.

Introduction. — Enoncé du théorème fondamental.

Nous donnons, dans ce mémoire, un théorème concernant les fonctions indéfiniment dérivables, les plus générales, définies dans un intervalle fermé, borné. Nous démontrons notamment que toute fonction indéfiniment dérivable peut, dans un tel intervalle, être décomposée en une somme de deux fonctions dont chacune appartient à une classe quasi analytique.

Nous disons qu'une fonction $f(x)$ indéfiniment dérivable, dans l'intervalle fermé $[a, b]$, est du *type fortement quasi analytique,* si, en posant $m_n = \max|f^{(n)}(x)|$, $(a \leq x \leq b)$, la série $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{m_n}}$ diverge. La classe $\{m_n\}_I$ de fonctions indéfiniment dérivables sur $I \equiv [a, b]$, (à chaque fonction φ de cette classe correspond une constante $\lambda > 0$ telle que les inégalités $|\varphi^{(n)}(x)| < \lambda^n m_n$, $(a \leq x \leq b;\ n \geq 1)$ ont lieu) est alors une classe quasi analytique. La quasi analyticité d'une telle classe serait en effet déjà assurée par la divergence de la série $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{\bar{m}_n}}$, où $\bar{m}_n$ a le sens suivant: on pose pour $r > 0$ et pour les entiers positifs n

$$T(r) = \overline{\text{borne}}_{n \geq 1} \frac{r^n}{m_n},$$

$$\bar{m}_n = \max_{r \geq 0} \frac{r^n}{T(r)}{}^{1}.$$

[1] Voir la note au bas de la page 25.

Or

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{m_n}} \leq \sum \frac{1}{\sqrt[n]{\bar{m}_n}}.$$

C'est pourquoi nous ajoutons l'adverbe «fortement».

Le théorème fondamental du Mémoire s'énonce de la manière suivante:

Théorème fondamental. *Toute fonction indéfiniment dérivable dans un intervalle fermé* $[a, b]$ *est, dans cet intervalle, la somme de deux fonctions du type fortement quasi analytique.*

Nous en tirerons plusieurs conclusions.

Les résultats de ce Mémoire ont été énoncés dans une Note aux C. R. de l'Académie des Sciences de Paris.[1] Toutefois, le théorème fondamental y est énoncé sous une forme un peu moins précise que celle que nous lui avons donnée dans ce Mémoire.

1. Quelques considérations préliminaires.

Soit $F(x)$ une fonction indéfiniment dérivable dans l'intervalle fermé $[-1, +1]$. $T_n(x)$ désignant le polynome de degré n

$$\cos (n \arc \cos x),$$

on peut mettre $F(x)$ sous la forme

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \tag{1}$$

cette série, ainsi que ses séries dérivées, étant uniformément convergentes dans l'intervalle $[-1, +1]$.

Posons pour $r \geq 1$

$$S(r) = \max_{1 \leq n \leq r} \frac{r^n}{M_n},$$

où $M_n = \max |F^{(n)}(x)|$, $(-1 \leq x \leq +1)$.

Il existe une constante numérique $A > 2$ *telle qu'on a, pour toutes les valeurs entières* $n > A$

---

[1] *C. R. de l'Académie des Sciences de Paris* (T. 208, 1939 p. 1780).

(2) $$|a_n| < \frac{1}{S\left(\frac{n}{A}\right)}.$$[1]

Posons en effet $x = \cos\theta$, et

$$\varphi(\theta) = F(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta$$

$$\varphi_p(\theta) = F^{(p)}(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(p)} \cos n\theta,$$

(où $F^{(p)}(x)$ désigne la dérivée p^e par rapport à x).

En partant de l'égalité

(3) $$\varphi_p'(\theta) = -\sin\theta\,\varphi_{p+1}(\theta) = -\sin\theta\, F^{(p+1)}(\cos\theta),$$

(la dérivée du premier membre étant prise par rapport à θ), on voit immédiatement que

$$\sin\theta \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(p+1)} \cos n\theta = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n-1}^{(p+1)} - a_{n+1}^{(p+1)}\right) \sin n\theta + \frac{1}{2} a_0^{(p+1)} \sin\theta$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(p)}\, n \sin n\theta,$$

ce qui donne pour $n \geqq 2$

(4) $$a_n^{(p)} = \frac{a_{n-1}^{(p+1)} - a_{n+1}^{(p+1)}}{2n}.$$

On a, d'autre part, pour $n \geq 1$

$$a_n^{(q)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_q(\theta) \cos n\theta\, d\theta = -\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} \varphi_q'(\theta) \sin n\theta\, d\theta,$$

et, en tenant compte de l'égalité (3), on peut écrire

(5) $$|a_n^{(q)}| \leq \frac{2 M_{q+1}}{n}.$$

---

[1] J'ai démontré dans mon livre *Séries de Fourier et classes quasi analytiques de fonctions* (Paris 1935, p. 100) l'inégalité $|a_n| < \frac{n}{S\left(\frac{n}{A}\right)}$. L'inégalité (2) est démontrée dans mon livre *Classes quasi analytiques de fonctions* (en russe) (Leningrad, 1937, p. 69).

Les relations (4) et (5) donnent, pour $n > 2$, $1 \leq p \leq n-1$

$$|a^{(p-1)}_{n-p+1}| \leq \frac{|a^{(p)}_{n-p}| + |a^{(p)}_{n-p+2}|}{2(n-p+1)} \leq \frac{M_{p+1}}{n-p+1}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{n-p+2}\right) \leq \frac{2\,M_{p+1}}{(n-p)(n-p+1)}.$$

En combinant cette inégalité avec l'égalité (4) (en y remplaçant p par $p-2$) on évalue les coefficients $a^{(p-2)}$, etc. On trouve ainsi, après p opérations semblables $\left(\text{en posant } B = \overline{\text{borne}}\left[\frac{p^p}{p!}e^{-p}\right]^p\right)$,

$$(2') \qquad |a_n| < 2\,M_{p+1}\frac{(n-p-1)!}{n!} \leq \frac{2\,B\,e^{p+1}}{n^{p+1}}\,M_{p+1} \leq \frac{A^{p+1}\,M_{p+1}}{n^{p+1}}, \qquad (1 \leq p \leq n-1).$$

On a, par conséquent, pour $n \geq A$ (A constante > 2):

$$(2) \qquad |a_n| \leq \min_{1 \leq q \leq n} \frac{A^q\,M_q}{n^q} \leq \min_{1 \leq q \leq \frac{n}{A}} \frac{A^q\,M_q}{n^q} = \frac{1}{S\left(\frac{n}{A}\right)}.$$ [1]

Indiquons quelques propriétés de la fonction $S(r)$. — Il nous suffit de supposer que tous les M_n sont positifs.[2]

Désignons par $n(r)$ le plus grand entier positif $k \leq r$, tel que $S(r) = \frac{r^k}{M_k}$; on a $S(r) = \frac{r^{n(r)}}{M_{n(r)}}$, $n(r) \leq r$. $S(r)$ est évidemment une fonction strictement croissante de r; la fonction $n(r)$ est une fonction croissante de r, car si pour $r_1 > r$ on avait $n(r_1) < n(r)$, on aurait $r_1^{n(r)-n(r_1)} > r^{n(r)-n(r_1)} \geq \frac{M_{n(r)}}{M_{n(r_1)}}$, c'est à dire

---

[1] De l'inégalité (2') résulte seulement $|a_n| \leq \min\limits_{2 \leq q \leq n} \frac{A^q\,M_q}{n^q}$, mais on a aussi $|a_n| \leq \frac{2\,M_1}{n} < \frac{AM_1}{n}$, car

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\cos n\,\theta\,d\,\theta = -\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} \varphi'(\theta)\,\sin\,n\,\theta\,d\,\theta = \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} \sin\,\theta\,\frac{d\,F(\cos\,\theta)}{d\,(\cos\,\theta)}\cos\,n\,\theta\,d\,\theta, \quad \text{et}$$

$$\left|\frac{d\,F(\cos\,\theta)}{d\,(\cos\,\theta)}\right| = |F'(x)| \leq M_1.$$

[2] D'ailleurs lorsque $M_n = 0$, pour n assez grand, $F(x)$ est un polynome et le théorème fondamental devient trivial. Nous pouvons donc supposer dans la suite, que $M_n > 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

$\frac{r_1^{n(r)}}{M_{n(r)}} > \frac{r_1^{n(r)}}{M_{n(r_1)}} = S(r_1)$, avec $n(r) \leq r < r_1$, contrairement à la définition de $S(r_1)$. On en tire immédiatement que $S(r+0) = S(r)$, $n(r+0) = n(r)$. On a $\log S(r) = n(r) \log r - \log M_{n(r)}$. Comme $n(r)$ prend des valeurs entières positives croissantes, on voit que, dans tout intervalle $[1, L]$, $(L > 1)$, $S(r)$ ne possède qu'un nombre fini de discontinuités, et il n'existe qu'un nombre fini de points, dans cet intervalle, où $S(r)$ n'est pas dérivable; $S(r)$ possède une dérivée à droite en chaque point: $[\log S(r)]'_+ = \frac{n(r)}{r}$. On a par conséquent, quelle que soit la valeur de $r_0 (\geq 1)$ où S est continue, et pour $r < r_0$

$$\log S(r) = \log S(r_0) + \int_{r_0}^{r} \frac{n(t)}{t} dt + \int_{r_0}^{r} d V(t), \tag{6}$$

où le dernier terme est une intégrale de Stieltjes correspondant à une distribution discrète de masse positive, placée d'ailleurs dans les points où S est discontinue.

Il suffit que $r > \max\left(\frac{M_2}{M_1}, \frac{M_3}{M_2}, \ldots, \frac{M_p}{M_{p-1}}\right)$, pour que $n(r) \geq p$. On voit ainsi que $n(r)$ tend vers l'infini avec r.

2. Démonstration du théorème.

Choisissons r_0 de sorte que $n(r_0) \geq 2$, $\log S(r_0) > 0$, et posons $m(r) = n(r) - 2$, pour $r \geq r_0$, et $m(r) = 0$ pour $r < r_0$. On a évidemment

$$\log S(r) \geq 2 \log\left(\frac{r}{r_0}\right) + \int_0^r \frac{m(t)}{t} dt = 2 \log\left(\frac{r}{r_0}\right) + \int_0^{r^2} \frac{m(t^{1/2})}{2t} dt,$$

et, en posant $N(r) = E\left[\frac{m(t^{1/2})}{2}\right]$[1], on a pour $r \geq r_0$

$$\log S(r) \geq 2 \log\left(\frac{r}{r_0}\right) + \int_0^{r^2} \frac{N(t)}{t} dt, \tag{7}$$

[1] Ex désigne la partie entière de x.

$N(t)$ étant une fonction prenant des valeurs entières positives tendant vers l'infini en croissant.

Désignons maintenant par $t_0, t_1, t_2, \ldots$ une suite de nombres croissants vérifiant les relations suivantes:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{c} t_0 = 0, \ t_{q+1} > a\, t_q \\ E\left[\dfrac{\displaystyle\int_{t_{q-1}}^{t_q} \frac{N(t)}{t}\, dt}{\log t_q - \log t_{q-1}}\right] > t_{q-1} \end{array} \right\} (q \geq 1)$$

où a est une constante > 1. Ce choix est possible car $N(t)$ tend vers l'infini en croissant[1]. Définissons maintenant les deux fonctions $N_1(t)$ et $N_2(t)$ de la manière suivante:

Posons d'abord

$$(9) \qquad \mathrm{N}_q = E\left[\dfrac{\displaystyle\int_{t_{q-1}}^{t_q} \frac{N(t)}{t}\, dt}{\log t_q - \log t_{q-1}}\right]$$

et

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} N_1(r) = \left\{ \begin{array}{ll} N(r), & \text{si } t_{2q} \leq r < t_{2q+1} \\ \mathrm{N}_{2(q+1)}, & \text{si } t_{2q+1} \leq r < t_{2(q+1)} \end{array} \right\} (q \geq 0) & \\ N_2(r) = \left\{ \begin{array}{lll} N(r), & \text{si } t_{2q+1} \leq r < t_{2(q+1)}, & (q \geq 0) \text{ et si } 0 \leq r < t_1 \\ \mathrm{N}_{2q+1}, & \text{si } t_{2q} \leq r < t_{2q+1} & (q \geq 1). \end{array} \right. & \end{array} \right.$$

Définissons les fonctions $T(r)$, $T_1^*(r)$, $T_2^*(r)$ de la manière suivante:

---

[1] En effet si $\varphi(x)$ est une fonction positive qui croît indéfiniment avec $x(>0)$ il suffit que λ soit assez grand et que $\dfrac{\log \lambda}{\log \beta}$ soit assez petit pour qu'il résulte de l'inégalité évidente, où $\beta > \lambda\alpha > 0$:

$$\frac{\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt}{\log \beta - \log \alpha} > \frac{\displaystyle\int_{\lambda\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt}{\log \beta - \log \alpha} \geq \varphi(\lambda\alpha)\left[1 - \frac{\log \lambda}{\log \beta - \log \alpha}\right],$$

que le premier terme de cette inégalité est aussi grand qu'on veut.

$$(11)\qquad \begin{cases} \log T(r) = \displaystyle\int_0^r \frac{N(t)}{t}\,d\,t, \\ \log T_1^*(r) = \displaystyle\int_0^r \frac{N_1(t)}{t}\,d\,t, \\ \log T_2^*(r) = \displaystyle\int_0^r \frac{N_2(t)}{t}\,d\,t. \end{cases}$$

Tout comme la fonction $N(r)$ les fonctions $N_1(r)$, $N_2(r)$ qui prennent, elles aussi, des valeurs entières ≥ 0, tendent vers l'infini en croissant. En nous bornant à la fonction $N_1(r)$ on vérifie immédiatement ces propriétés dans les intervalles $(t_{2q},\ t_{2q+1})$; mais dans $(t_{2q+1},\ t_{2(q+1)})$ on a

$$(12)\qquad N_1(r) = N_1(t_{2q+1}) = \mathrm{N}_{2(q+1)} \geq N(t_{2q+1}),$$

ce qui prouve que $N_1(r)$ a les propriétés voulues pour tout $r \geq 0$. On le démontre de la même manière pour $N_2(r)$.

On a, dans chaque intervalle $(t_{2q},\ t_{2q+1}) : T_1^*(r) \leq T(r)$, *et dans chaque intervalle* $(t_{2q+1},\ t_{2(q+1)}) : T_2^*(r) \leq T(r)$. Démontrons l'inégalité concernant $T_1^*(r)$. On a, en effet, lorsque $t_{2q} \leq r < t_{2q+1}$

$$\log T_1^*(r) = \int_0^r \frac{N_1(t)}{t}\,d\,t = \int_0^{t_1} \frac{N(t)}{t}\,d\,t + \mathrm{N}_2 \log\left(\frac{t_2}{t_1}\right) + \int_{t_2}^{t_3} \frac{N(t)}{t}\,d\,t + \cdots$$
$$+ \mathrm{N}_{2q} \log\left(\frac{t_{2q}}{t_{2q-1}}\right) + \int_{t_{2q}}^{r} \frac{N(t)}{t}\,d\,t,$$

et comme, d'après (9)

$$\mathrm{N}_{2p} \log\left(\frac{t_{2p}}{t_{2p-1}}\right) \leq \int_{t_{2p-1}}^{t_{2p}} \frac{N(t)}{t}\,d\,t,$$

on voit que

$$\log T_1^*(r) \leq \int_0^r \frac{N(t)}{t}\,d\,t = \log T(r).$$

On démontre de la même manière l'inégalité concernant $T_2^*(r)$.

Nous allons maintenant démontrer que

$$(13) \qquad \int_1^\infty \frac{\log T_1^*(r)}{r^2}\, d\,r = \int_1^\infty \frac{\log T_2^*(r)}{r^2}\, d\,r = \infty .$$

Démontrons, par exemple, que la première intégrale diverge. Si

$$t_{2q-1} \leq r < t_{2q},$$

$$\log T_1^*(r) = \int_0^r \frac{N_1(t)}{t}\, d\,t \geq \int_{t_{2q-1}}^r \frac{N_1(t)}{t}\, d\,t \geq N_1(t_{2q-1}) \log \left(\frac{r}{t_{2q-1}}\right) = \mathrm{N}_{2q} \log \left(\frac{r}{t_{2q-1}}\right),$$

et, en posant $\tau = \frac{r}{t_{2q-1}}$, on a d'après (8)

$$\int_{t_{2q-1}}^{t_{2q}} \frac{\log T_1^*(r)}{r^2}\, d\,r \geq \mathrm{N}_{2q} \int_{t_{2q-1}}^{t_{2q}} \frac{\log \left(\frac{r}{t_{2q-1}}\right)}{r^2}\, d\,r = \frac{\mathrm{N}_{2q}}{t_{2q-1}} \int_1^{\frac{t_{2q}}{t_{2q-1}}} \frac{\log \tau}{\tau^2}\, d\,\tau = b > 0,$$

où b est une constante, ce qui suffit, bien entendu, pour démontrer notre assertion.

Voilà comment nous allons maintenant effectuer la décomposition de la fonction $F(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n T_n(x)$. Définissons les deux suites b_n et c_n, $(n = 0, 1 \ldots)$, de la manière suivante

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} b_n = \left\{ \begin{array}{ll} a_n, & \text{si } A\sqrt{t_{2q}} \leq n < A\sqrt{t_{2q+1}} \\ 0, & \text{si } A\sqrt{t_{2q+1}} \leq n < A\sqrt{t_{2(q+1)}} \end{array} \right\} (q \geq 0) \\ \\ c_n = \left\{ \begin{array}{ll} a_n, & \text{si } A\sqrt{t_{2q+1}} \leq n < A\sqrt{t_{2(q+1)}} \\ 0, & \text{si } A\sqrt{t_{2q}} \leq n < A\sqrt{t_{2q+1}} \end{array} \right\} (q \geq 0) \end{array} \right.$$

et posons

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_1(x) = \sum_{n=0}^\infty b_n T_n(x) \\ \\ F_2(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n T_n(x). \end{array} \right.$$

On a évidemment

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x). \tag{16}$$

Nous allons démontrer que chacune des deux fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ est du type fortement quasi analytique dans $[-1, +1]$.

Nous ferons la démonstration pour $F_1(x)$. Elle est analogue pour $F_2(x)$.

On a d'après (2), (7), (11), (14) et l'inégalité $T_1^*(r) \leq T(r)$, valable dans tout intervalle (t_{2q}, t_{2q+1}), lorsque $n > A$

$$|b_n| \leq \frac{1}{S\left(\frac{n}{A}\right)} \leq \left(\frac{A r_0}{n}\right)^2 \frac{1}{T\left(\frac{n^2}{A^2}\right)} \leq \left(\frac{A r_0}{n}\right)^2 \frac{1}{T_1^*\left(\frac{n^2}{A^2}\right)}.$$

On a, d'autre part, dans $[-1, +1]$, pour $1 \leq p \leq n$

$$p^p \,|T_n^{(p)}(x)| \leq \left(\frac{e}{2}\right)^p n^{2p}.$$

On peut donc écrire:

$$\begin{aligned} |F_1^{(p)}(x)| &\leq \sum_{n \geq p}^{\infty} |b_n|\,|T_n^{(p)}(x)| \leq (A r_0)^2 \left(\frac{e}{2p}\right)^p \sum_{n \geq p}^{\infty} \frac{n^{2p}}{n^2\, T_1^*\left(\frac{n^2}{A^2}\right)} \\ &\leq (A r_0)^2 \left(\frac{e}{2p}\right)^p \left(\sum_{n \geq p}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \max_{n \geq p} \frac{n^{2p}}{T_1^*\left(\frac{n^2}{A^2}\right)} \leq C^p \max_{n \geq p} \frac{\left(\frac{n}{A}\right)^{2p}}{T_1^*\left[\left(\frac{n}{A}\right)^2\right]} \\ &\leq C^p \max_{r \geq 0} \frac{r^p}{T_1^*(r)} = C^p M_p^1 \text{ [1]} \end{aligned} \tag{17}$$

où $C > 0$ est une constante.

On remarque que l'inégalité

$$M_p^1 = \max_{r \geq 0} \frac{r^p}{T_1^*(r)}, \qquad (p \geq 1) \tag{18}$$

implique pour les valeurs r, telles que $N_1(r) > 0$, l'égalité

[1] Les différentes étapes de (17) prouvent, d'après ce qui précède, que $|F_1^{(p)}(x)| < C^p M_p^1$, lorsque $p > A$. Mais en augmentant éventuellement la constante C cette inégalité devient aussi valable pour $1 \leq p \leq A$.

$$T_1^*(r) = \max_{p \geq 1} \frac{r^p}{M_p^1}. \tag{19}$$

En effet l'inégalité

$$\max_{q \geq 1} \frac{r^q}{M_q^1} \leq T_1^*(r)$$

est évidente d'après (18); mais on peut aussi écrire

$$\max_{q \geq 1} \frac{r^q}{M_q^1} = \max_{q \geq 1} \frac{r^q}{\max\limits_{\varrho \geq 0} \dfrac{\varrho^q}{T_1^*(\varrho)}} \geq \frac{r^{N_1(r)}}{\max\limits_{\varrho \geq 0} \dfrac{\varrho^{N_1(r)}}{T_1^*(\varrho)}}, \tag{20}$$

et comme lorsque $\varrho_2 > \varrho_1$ on a

$$\log\left[\frac{\varrho^{N_1(r)}}{T_1^*(\varrho_2)}\right] - \log\left[\frac{\varrho^{N_1(r)}}{T_1^*(\varrho_1)}\right] = N_1(r)\log\varrho_2 - \int_0^{\varrho_2} \frac{N_1(t)}{t}\,dt -$$

$$\left[N_1(r)\log\varrho_1 - \int_0^{\varrho_1} \frac{N_1(t)}{t}\,dt\right] = N_1(r)\log\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) - \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{N_1(t)}{t}\,dt,$$

on voit que le premier membre de cette inégalité est compris entre les deux quantités

$$[N_1(r) - N_1(\varrho_2)]\log\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) \quad \text{et} \quad [N_1(r) - N_1(\varrho_1)]\log\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right),$$

et l'expression

$$\frac{\varrho^{N_1(r)}}{T_1^*(\varrho)}$$

reste constante lorsque $N_1(\varrho) = N_1(r)$, croît lorsque $N_1(\varrho) < N_1(r)$, et décroît lorsque $N_1(\varrho) > N_1(r)$. On a par conséquent:

$$\max_{\varrho \geq 0} \frac{\varrho^{N_1(r)}}{T_1^*(\varrho)} = \frac{r^{N_1(r)}}{T_1^*(r)},$$

et, en tenant compte de (20), on a bien

$$\max_{q \geq 1} \frac{r^q}{M_q^1} \geq T_1^*(r),$$

et l'égalité (19) est ainsi démontrée.

En remarquant maintenant, que, d'une manière générale, quelque soit $p > 1$, et quelles que soient les deux quantités $r_2 > r_1 > 0$, on a

$$[p - N_1(r_2)] \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \leq \log\left[\frac{r_2^p}{T_1^*(r_2)}\right] - \log\left[\frac{r_1^p}{T_1^*(r_1)}\right] \leq [p - N_1(r_1)] \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

on voit que, si on range les valeurs que prend la fonction $N_1(r)$ par ordre croissant: $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ et si $n_i \leq p \leq n_{i+1}$

$$M_p^1 = \frac{r'^{n_i+1}}{T_1^*(r_{\prime})}$$

où r' est la plus petite valeur de r telle que $N_1(r) = n_{i+1}$, et que

$$\log M_{p+1}^1 - \log M_p^1 = \log r', \tag{21}$$

si $n_i \leq p < p + 1 \leq n_{i+1}$. Ainsi la différence (21) croît avec p, ce qui prouve que $\log M_p^1$ est une fonction convexe de p, c'est à dire

$$M_\varkappa^1 \leq M_p^{1\,\frac{q-\varkappa}{q-p}} M_p^{1\,\frac{\varkappa-p}{q-p}}, \quad (p < \varkappa < q).$$

Ainsi, en résumé

1°) $T_1^*(r) = \max\limits_{p \geq 1} \dfrac{r^p}{M_p^1}$

2°) $\log M_p^1$ — fonction convexe de p

3°) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log T_1^*(r)}{r^2}\, dr = \infty.$

Ces trois conditions impliquent, comme on sait, la divergence de la série

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt[n]{M_n^1}}.^{1}$$

Ainsi *la fonction* $F_1(x)$ *est du type fortement quasi analytique.*

[1] Voir mon livre cité plus haut *Séries de Fourier et classes quasi analytiques de fonctions* (p. 75). Ceci résulte d'ailleurs immédiatement des recherches de M. Ostrowski sur la quasi analyticité (Acta mathematica t. 53, 1930).

La fonction $F_2(x)$ l'est également, et *nous avons pu décomposer* $F(x)$ *en une somme de deux fonctions du type fortement quasi analytique.*

Notre théorème est ainsi démontré pour l'intervalle $[-1, +1]$.

Il suffit maintenant d'appliquer une transformation linéaire pour voir que le théorème est vrai dans le cas général.

3. Sur un problème de M. Carleman.

M. Carleman a posé dans son livre sur les fonctions quasi analytiques, un problème intéressant qui, avec la terminologie que nous avons adoptée dans l'introduction, peut se formuler ainsi: *peut-on affirmer que deux fonctions du type fortement quasi analytique, dans un intervalle fermé, dont toutes les dérivées (ainsi que les fonctions elles mêmes) coincident en un point, sont identiques?*[1]

M. San Juan a donné à cette question une réponse négative.[2] Il a notamment démontré que la fonction

$$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-\sqrt[4]{t}} \sin \sqrt[4]{t}\, e^{-xt}\, dt, \quad (x \geq 0),$$

dont toutes les dérivées sont nulles à l'origine, est la somme de deux fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ du type fortement quasi analytique dans l'intervalle $(0, \infty)$. Les fonctions φ_1 et $-\varphi_2$ répondent donc, par la négative, à la question de M. Carleman. Les fonctions φ_i, $(i = 1, 2)$ sont de la forme

$$\varphi_i(x) = \int_0^\infty \alpha_i(x) \sin \sqrt[4]{t}\, e^{-xt}\, dt, \quad (i = 1, 2),$$

où $\alpha_1(t) + \alpha_2(t) = e^{-\sqrt[4]{t}}$, et en chaque point t une des deux fonctions α est nulle.

Mais le théorème fondamental que nous venons de démontrer permet de répondre à la question de M. Carleman d'une manière plus large. Appliqué aux fonctions dont toutes les dérivées s'annulent en un point de l'intervalle $[a, b]$, ce théorème s'énonce, en effet, de la manière suivante:

Toute fonction, non identiquement nulle, indéfiniment dérivable dans un intervalle $[a, b]$, *et qui s'annule, avec toutes ses dérivées, en un point* $x_0 (a \leq x_0 \leq b)$ *est la différence de deux fonctions du type fortement quasi analytique qui coincident ainsi que toutes leurs dérivées en* x_0.

---

[1] Voir le livre de M. Carleman *Les fonctions quasi analytiques*, (Paris 1926, p. 77).

[1] Sans Juan. *C. R. du Congrès des Mathématiques d'Oslo* (T. 2, 1936, p. 94).

4. Généralisation du théorème fondamental donnant les conditions de quasi analyticité.

Soit $\{A_n\}$ une suite de nombres positifs. Posons

$$T(r) = \overline{\operatorname*{borne}_{n \geq 1}} \frac{r^n}{A_n},$$

$$\bar{A}_n = \max_{r \geq 0} \frac{r}{T(r)}.$$

Le théorème de MM. Denjoy-Carleman peut s'énoncer de la manière suivante:[1] *Une condition nécessaire et suffisante pour que la classe $\{A_n\}_I$ soit quasi analytique dans un intervalle $I \equiv [a, b]$ est que la série*

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{\bar{A}_n}} \tag{22}$$

soit divergente.

Autrement dit si deux fonctions appartenant à $\{A_n\}_I$ coincident avec leurs dérivées en un point x_0 de $[a, b]$, elles coincident partout dans $[a, b]$. Ou encore toute fonction de $\{A_n\}_I$ qui s'annule, avec toutes ses dérivées, en x_0 est identiquement nulle. Par contre, si la série (22) converge, on peut construire une fonction appartenant à $\{A_n\}_I$ qui s'annule, avec toutes ses dérivées en un point donné x_0 de $[a, b]$ et qui ne soit pas identiquement nulle dans cet intervalle. Ou encore, on peut construire un couple de fonctions (et, bien entendu, une infinité de fonctions) qui coincident avec leurs dérivées en x_0 et qui ne sont pas identiques (qui sont toutes différentes entre elles, lorsqu'on en envisage une infinité).

On peut maintenant énoncer le théorème suivant:

Si la série (22) converge, on peut construire deux fonctions du type fortement quasi analytique qui appartiennent à la classe $\{A_n\}_I$, qui coincident avec toutes leurs dérivées en un point $x_0 \in I \equiv [a, b]$, et qui ne sont pas identiques.

Il est évident que ce théorème précise le théorème de MM. Denjoy-Carleman (la partie concernant le cas où (22) converge).

---

[1] M. Denjoy a donné une condition suffisante; M. Carleman a donné une condition nécessaire et suffisante. Voir p. 61 du livre cité de M. Carleman. Pour la forme de cette condition mentionnée ici, voir mon livre cité p. 25, ainsi que le Mémoire de M. Ostrowski, cité à la même page.

Supposons que l'intervalle $[a, b]$ soit contenu à l'intérieur de l'intervalle $[-1, +1]$, ce qui ne diminue évidemment pas la généralité. On peut former, d'après le théorème de M. Carleman, une fonction $F(x)$ telle que

$$\left.\begin{array}{r} F(x_0) = F^{(n)}(x_0) = 0 \\ |F^{(n)}| \leq \bar{A}_n \end{array}\right\} (n \geq 1, \quad -1 \leq x_0 \leq 1, \quad -1 \leq x \leq +1).$$ [1]

D'après ce que nous avons vu au cours du raisonnement du § 1,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n T_n(x)$$

avec

$$|d_n| \leq \min_{1 \leq q \leq n} \frac{A^q A_q}{n^q},$$

pour $n > A$, où A est une constante numérique.

On a, d'autre part, dans $[a, b]$

$$|T_n^{(p)}(x)| < \lambda^p n^p, \quad (1 \leq p \leq n).$$

Si on effectue alors la décomposition de $F(x)$ en suivant la méthode du § 2, on voit que

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x),$$

et on a, pour p assez grand, dans $[a, b]$

$$|F_1^{(p)}(x)| \leq \sum_{n \geq p} |d_n| \, |T_n^{(p)}(x)| \leq \lambda^p \left[\frac{A^p \bar{A}_p}{p^p} p^p + \frac{A^p \bar{A}_p}{(p+1)^p} (p+1)^p + \sum_{n \geq p+2}^{\infty} \frac{A^{p+2} \bar{A}_{p+2}}{n^{p+2}} n^p \right]$$

$$= \lambda^p A^p \left[2 \bar{A}_p + \left(A^2 \sum_{n \geq p} \frac{1}{n^2} \right) \bar{A}_{p+2} \right] = C^p (2 \bar{A}_p + L \bar{A}_{p+2})$$

où C et L sont des constantes. Comme, pour p assez grand, $\bar{A}_p$ croît avec p on a

(23) $$|F_1^{(p)}(x)| < k^p \bar{A}_{p+2} \quad (k \text{ constante} > 0).$$

[1] Comme $(\overline{\bar{A}_n}) = \bar{A}_n$ (car $\{\log \bar{A}_n\}$ est la plus grande suite convexe dont les termes sont inférieurs à ceux de la suite $\{\log \bar{A}_n\}$, et comme lorsque la série (22) converge, on peut construire une fonction $F(x)$, telle que $F^{(n)}(x_0) = 0$, $|F^{(n)}(x)| \leq A_n$, on peut le faire de même en remplaçant A_n par $\bar{A}_n$.

On a de même

$$(23') \qquad |F_2^{(p)}(x)| < k^p \bar{A}_{p+2}.$$

Il est d'ailleurs évident que $F_1^{(p)}(x_0) = -F_2^{(p)}(x_0)$, $(p \geq 0)$. Les fonctions

$$f_1(x) = \int_{x_0}^{x} d\,x \int_{x_0}^{x} F_1(x)\,d\,x$$

$$f_2(x) = -\int_{x_0}^{x} d\,x \int_{x_0}^{x} F_2(x)\,d\,x$$

sont encore telles que $f_1^{(p)}(x_0) = f_2^{(p)}(x_0)$, $(p \geq 0)$, elles appartiennent, d'après (23) et (23'), à la classe $\{A_n\}_I$, dans $[a, b]$ et, en partant de la remarque que la primitive d'une fonction du type quasi analytique est du même type,[1] on voit que $f_1(x)$ et $f_2(x)$ correspondent à notre énoncé. Notre théorème est ainsi démontré.

---

[1] Ceci résulte du fait qui si $M_n > 0$, les séries $\sum \frac{1}{\sqrt[n+p]{M_n}}$, où p est un nombre réel fixe, quelconque, convergent ou divergent en même temps que $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}}$. (Voir le livre cité de M. Carleman, p. 106).